Modifikace FEC - dynamická kontaktní úloha v lineární vazkopružnosti se třením

Lanzendörfer, Martin
2007

Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Modifikace FEC – dynamická kontaktní úloha v lineární vazkopružnosti se třením

M. Lanzendörfer

Technical report No. 1007

Pod Vodárenskou věží 2, 182 07 Prague 8, phone: +420 266 051 111, fax: +420 286 585 789,
e-mail:ics@cs.cas.cz

Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Modifikace FEC – dynamická kontaktní úloha v lineární vazkopružnosti se třením

M. Lanzendörfer

Technical report No. 1007

Abstrakt:

Kód FEC byl připraven k řešení dynamických kontaktních problémů v lineární pružnosti, bez tření. Vypracovaná modifikace implementuje lineární vazkopružný model materiálu a ve formulaci kontaktní úlohy zahrnuje Trescův model daného tření.

Předložená studie je výzkumnou zprávou projektu MPO ČR č. FT-TA/087 za rok 2007.

Keywords:
metoda konečných prvků, dynamická kontaktní úloha se třením, vazkopružnost, matematické programování

1 Úvod

1.1 Úvod, motivace

Matematický model jednostranného kontaktu pružných těles má rozsáhlé důležité aplikace od průmyslového vývoje až po například výzkum biomechaniky lidského skeletu. Program s pracovním názvem FEC (resp. FEC 3D), sestavený za účelem řešení stacionárních kontaktních úloh v lineární pružnosti metodou konečných prvků ve třech prostorových dimenzích, byl již na ÚI AV ČR používán ke studiu některých aplikací v biomechanice a v geomechanice (viz například [9]). Software FEC je popsán v technických zprávách [1], [4] a [6], další vyvíjené metody jsou popisovány v [8]. Výchozí kód používá formulaci kontaktu pomocí podmínek Signoriniho typu společně s Trescovým modelem tření. Ve zprávě [10] byla popsána modifikace kódu FEC připravená pro numerické simulace dynamické kontaktní úlohy bez tření, v lineární pružnosti. Ta byla také aplikována na řešení problémů v biomechanice lidského kolenního kloubu a jeho náhrady, viz [12].

Při řešení některých reálných úloh v řadě oborů, například biomechanice, geomechanice, mechanice a technologii, je potřeba uvažovat i jinou než dokonale pružnou odezvu materiálů. V některých aplikacích je vhodné uvažovat modely, popisující napěťovou odezvu nejen v závislosti na aktuální deformaci, ale také na krátké historii deformace. V následující zprávě popíšeme formulaci modelu v lineární vazkopružnosti. Současně budeme uvažovat kontaktní úlohu se zahrnutím třecích sil, s modelem nestacionárního Trescova tření. Popíšeme časovou a prostorovou diskretizaci a následně předložíme jednoduchou modifikaci kódu FEC, která zahrnuje numerické řešení těchto úloh. Vývoj byl součástí projektu MPO ČR pod označením FT-TA/087.

1.2 Fyzikální formulace

Mějme oblast Ω představující sjednocení $\bar{s}$ jednotlivých pružných těles $\Omega = \cup_{s=1}^{\bar{s}} \Omega^s \subset \mathbb{R}^3$ ve třírozměrném prostoru. Hranici oblasti rozdělme disjunktně podle uvažovaných okrajových podmínek na $\partial\Omega = \Gamma_{\boldsymbol{F}} \cup \Gamma_{\boldsymbol{u}} \cup \Gamma_{\mathrm{c}}$, přičemž $\Gamma_{\mathrm{c}} = \cup_{r,s} \Gamma_{\mathrm{c}}^{rs}$, kde $\Gamma_{\mathrm{c}}^{rs} = \Gamma_{\mathrm{c}}^{r} \cap \Gamma_{\mathrm{c}}^{s}$ představuje kontaktní rozhraní mezi tělesy Ω^r a Ω^s, $\Gamma_{\mathrm{c}}^{s} \subset \partial\Omega^s$. Uvažujme časový interval $I = (0, T)$, v němž budeme vývoj mechanického systému studovat. Hledáme posunutí $\boldsymbol{u} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3$, splňující následující:

V celé oblasti Ω je splněna pohybová rovnice

$$\rho\, \partial_{tt}\boldsymbol{u} + \alpha\, \partial_t \boldsymbol{u} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, \partial_t \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g} \quad \text{v } I \times \Omega, \tag{1.1}$$

kde $\rho > 0$ je materiálová hustota (konstantní v každém tělese Ω^s) a $\alpha > 0$ je tlumící parametr. Ve vazkopružném modelu obvykle uvažujeme $\alpha = 0$. Značíme ∂_t, respektive ∂_{tt} první, respektive druhou derivaci podle času. Pro tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ uvažujeme vztah

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, \partial_t \boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\sigma}_1(\partial_t \boldsymbol{u}) \\ &= \boldsymbol{C}_0 \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{e}(\partial_t \boldsymbol{u}), \\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}) &= \tfrac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla^T \boldsymbol{v}\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

tedy $\boldsymbol{\sigma}_0$ je lineárně závislé na linearizovaném tenzoru deformace (tenzoru malých deformací) $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$ a člen $\boldsymbol{\sigma}_1$ přidává obdobnou lineární závislost na rychlosti deformace. Přitom $\boldsymbol{C}_0$, $\boldsymbol{C}_1$ jsou tenzory čtvrtého řádu takové, že platí podmínky symetrie a podmínky pozitivní definitnosti, viz například [1], [5]. Program FEC je navíc připraven a používán pro modely izotropního materiálu; pro každou oblast Ω^s jsou zadávány dvě materiálové konstanty určující elastickou odezvu: Youngův modul pružnosti E_0 a Poissonova konstanta σ_0; vazká odezva v $\boldsymbol{\sigma}_1(\partial_t \boldsymbol{u})$ je v současné verzi modelována obdobně, předepsáním dvou konstant E_1 a σ_1.

Na hranici $\Gamma_{\boldsymbol{u}}$ uvažujeme tělesa pevně uchycena, posunutí je tedy předepsáno pomocí Dirichletovy okrajové podmínky

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_D \quad \text{na } I \times \Gamma_{\boldsymbol{u}}, \tag{1.3}$$

zatímco na hranici $\Gamma_{\boldsymbol{F}}$ je předepsáno zatížení těles pomocí Neumannovy okrajové podmínky

$$\boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{f} \quad \text{na } I \times \Gamma_{\boldsymbol{F}}, \tag{1.4}$$

kde $\boldsymbol{n}$ značí normálový vektor k hranici $\Gamma_{\boldsymbol{F}}$. Jak $\boldsymbol{u}_D$ tak $\boldsymbol{f}$ se mohou měnit v závislosti na čase.

Na kontaktním rozhraní předepisujeme Signoriniho podmínku nepronikání

$$\begin{array}{c} [\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}]^{rs} \le 0\,, \qquad \sigma_{\boldsymbol{n}}^{rs} \le 0 \\ \sigma_{\boldsymbol{n}}^{rs}[\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}]^{rs} = 0 \end{array} \qquad \text{na } I\times\Gamma_{\mathrm{c}}, \tag{1.5}$$

kde $[*]^{rs} := *^r - *^s$ značí skok hodnoty $*$ na rozhraní těles Ω^r a Ω^s, kde $\boldsymbol{n}$ značí jednotkový normálový vektor ke kontaktní hranici Γ_{c}^{rs} a kde $\sigma_{\boldsymbol{n}}^{rs} = \sigma_{\boldsymbol{n}}^{r} = \sigma_{\boldsymbol{n}}^{s}$, $\sigma_{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}$ je normálová část napětí na kontaktním rozhraní. Zároveň na kontaktním rozhraní uvažujeme Trescův model tření, tedy podmínku

$$\begin{array}{c} |\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}}^{rs}| \le g_c^{rs}\,, \qquad [\partial_t \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{t}}]^{rs} = -\gamma\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}}^{rs} \\ [\partial_t \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{t}}]^{rs}(|\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}}^{rs}| - g_c^{rs}) = 0 \end{array} \qquad \text{na } I\times\Gamma_{\mathrm{c}}, \tag{1.6}$$

kde $\gamma(t,\boldsymbol{x}) > 0$ je libovolná (nikoliv předepsaná) skalární funkce, kde $g_c^{rs} > 0$ je dané tření na rozhraní Ω^r a Ω^s, kde $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{t}} := \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ je tečná složka posunutí a kde $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}}^{rs} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}}^{r} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}}^{s}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}} := (\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{n}) - \sigma_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}$ je tečné napětí na rozhraní Γ_c^{rs}.

Řešení vychází z předepsané počáteční podmínky

$$\boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \qquad \partial_t\boldsymbol{u}|_{t=0} = \bar{\boldsymbol{u}}_0 \qquad \text{v } \Omega, \tag{1.7}$$

kde předpokládáme, že $\boldsymbol{u}_0$ je splňuje Signoriniho kontaktní podmínku (1.5) a je v souladu s Dirichletovou okrajovou podmínkou (1.3).

2 Model pro numerické simulace

2.1 Časová diskretizace

Zvoleným schématem diskretizace v časové proměnné bylo semi-implicitní schéma, stejně jako v [10]. Volba je motivována tím, aby výsledná úloha v každém časovém kroku měla strukturu shodnou se stacionární úlohou řešenou v původním kódu FEC. Pro pevně zvolenou velikost časového kroku $\tau > 0$ uvažujeme jednotlivé časové hladiny

$$t_k = k\tau, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Rovnici (1.1) pak diskretizujeme v čase jako (horní index ^{k} značí vždy hodnotu v čase t_k):

$$\rho\left(\frac{\boldsymbol{u}^k - 2\boldsymbol{u}^{k-1} + \boldsymbol{u}^{k-2}}{\tau^2}\right) + \alpha\left(\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau}\right) - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{u}^k) - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_1\left(\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau}\right) = \boldsymbol{g} \quad \text{v } \Omega, \tag{2.1}$$

což po přeuspořádání členů dává:

$$\left(\frac{\rho}{\tau^2} + \frac{\alpha}{\tau}\right)\boldsymbol{u}^k - \operatorname{div}\left(\left(\boldsymbol{\sigma}_0 + \frac{\boldsymbol{\sigma}_1}{\tau}\right)(\boldsymbol{u}^k)\right) = \boldsymbol{g} + \left(2\frac{\rho}{\tau^2} + \frac{\alpha}{\tau}\right)\boldsymbol{u}^{k-1} - \frac{1}{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_1(\boldsymbol{u}^{k-1}) - \frac{\rho}{\tau^2}\boldsymbol{u}^{k-2}. \tag{2.2}$$

Okrajové podmínky (1.3), (1.4) a (1.5) jednoduše vyžadujeme na každé časové hladině

$$\boldsymbol{u}^k = \boldsymbol{u}_D^k \quad \text{na } \Gamma_{\boldsymbol{u}}, \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^k\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{f}^k \quad \text{na } \Gamma_{\boldsymbol{F}}, \tag{2.4}$$

$$\begin{array}{c} [\boldsymbol{u}^k\cdot\boldsymbol{n}]^{rs} \le 0\,, \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}^k \le 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}^k[\boldsymbol{u}^k\cdot\boldsymbol{n}]^{rs} = 0 \end{array} \qquad \text{na } \Gamma_{\mathrm{c}}, \tag{2.5}$$

hodnoty $\boldsymbol{f}^k$ a $\boldsymbol{u}_D^k$ se opět mohou pro různá k lišit. Okrajové podmínky (1.6) Trescova modelu tření přejdou v

$$\begin{array}{c} |\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}}^{rs,k}| \le g_c^{rs}\,, \qquad [\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{t}}^k - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{t}}^{k-1}]^{rs} = -\gamma\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}}^{rs,k} \\ [\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{t}}^k - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{t}}^{k-1}]^{rs}(|\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}}^{rs,k}| - g_c^{rs}) = 0 \end{array} \qquad \text{na } \Gamma_{\mathrm{c}}. \tag{2.6}$$

Pro předepsání počáteční podmínky jednoduchým způsobem předpokládáme zadání $\boldsymbol{u}^0$ a $\boldsymbol{u}^{-1}$, přičemž $\boldsymbol{u}^0$ předepisuje počáteční posunutí v čase $t = 0$ a $\boldsymbol{u}^{-1}$ je zvoleno tak, aby nahradilo počáteční podmínku $\partial_t\boldsymbol{u}|_{t=0} = \bar{\boldsymbol{u}}_0$, tedy tak, že platí (viz (1.7))

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}_0, \qquad \frac{\boldsymbol{u}^0 - \boldsymbol{u}^{-1}}{\tau} = \bar{\boldsymbol{u}}_0.$$

2.2 Variační formulace v daném časovém kroku

Zopakujme zde variační formulaci úlohy, na níž je postaveno řešení metodou konečných prvků, viz také [1], [2], [3]. Označme $\boldsymbol{W} = \mathbf{W}^{1,2}(\Omega^1)^3 \times \cdots \times \mathbf{W}^{1,2}(\Omega^{\bar{s}})^3$, kde $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega^s)$ je standardní Sobolevův prostor. Pak množina přípustných posunutí (přípustných z hlediska Dirichletovy okrajové podmínky a Signoriniho kontaktní podmínky) na dané časové hladině t_k je

$$\boldsymbol{K}^k = \left\{ \boldsymbol{v} \;\middle|\; \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}, \quad \begin{array}{rll} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_D^k & \text{na} & \Gamma_D \\ [\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}]^{rs} \leq 0 & \text{na} & \cup_{r,s} \Gamma_c^{rs} \end{array} \right\}. \tag{2.7}$$

Funkcionál potenciální energie v čase t_k definujeme jako

$$\mathcal{L}^k(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - F^k(\boldsymbol{v}) + j^k(\boldsymbol{v}), \tag{2.8}$$

kde

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega (\boldsymbol{C}_0 + \tfrac{1}{\tau} \boldsymbol{C}_1)\, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega (\tfrac{\rho}{\tau^2} + \tfrac{\alpha}{\tau}) \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2.9}$$

$$F^k(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_{\boldsymbol{F}}} \boldsymbol{f}^k \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_\Omega \big(\boldsymbol{g} + (\tfrac{2\rho}{\tau^2} + \tfrac{\alpha}{\tau}) \boldsymbol{u}^{k-1} - \tfrac{\rho}{\tau^2} \boldsymbol{u}^{k-2}\big) \cdot \boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{C}_1}{\tau} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{k-1}) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2.10}$$

$$j^k(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_c^{rs}} g_c^{rs} \left| [\boldsymbol{v_t} - \boldsymbol{u_t}]^{rs} \right| \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{2.11}$$

Poznamenejme, že v každém tělese Ω^s, $s = 1, \ldots, \bar{s}$ uvažujeme obecně různé konstanty $\rho = \rho^s$ a $\alpha = \alpha^s$. Obdobně pro $\boldsymbol{x} \in \Omega^s$ uvažujeme $[\boldsymbol{C}_m \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})]_{ij} = [\boldsymbol{C}_m^s \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^s)]_{ij} = \sum_{\hat{i}\hat{j}} C^s_{m,\hat{i}\hat{j}ij} e_{\hat{i}\hat{j}}(\boldsymbol{u}^s)$, kde $\boldsymbol{C}_m^s$, $m = 0, 1$, jsou zadány na každé podoblasti Ω^s různými materiálovými parametry (v používaném nejjednodušším případě konstantami E_m^s, σ_m^s).

Řešením $\boldsymbol{u}^k$ naší úlohy na časové hladině t_k je minimum funkcionálu $\mathcal{L}^k(\boldsymbol{v})$ v množině přípustných posunutí $\boldsymbol{K}^k$

$$\boldsymbol{u}^k \in \boldsymbol{K}^k : \quad \mathcal{L}^k(\boldsymbol{u}^k) \leq \mathcal{L}^k(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^k. \tag{2.12}$$

Jelikož funkcionál $\mathcal{L}^k(\boldsymbol{v})$ je díky členu $j^k(\boldsymbol{v})$ nehladký, formulujeme namísto úlohy minimalizace úlohu hledání sedlového bodu následujícím způsobem. Zavedeme množinu $\boldsymbol{\Lambda}$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \{ \boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\mu} \in L^\infty(\Gamma_c)^3,\ |\boldsymbol{\mu}| \leq 1 \text{ skoro všude na } \Gamma_c \}$$

a všimneme si, že

$$j^k(\boldsymbol{v}) = \sup_{\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\Lambda}} J^k(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu}), \qquad J^k(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu}) = \int_{\Gamma_c^{rs}} g_c^{rs} \boldsymbol{\mu} \cdot [\boldsymbol{v_t} - \boldsymbol{u_t}^{k-1}]^{rs}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{2.13}$$

Definujeme tedy v čase t_k funkcionál sedlového bodu

$$\mathcal{H}^k(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} A(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - F^k(\boldsymbol{v}) + J^k(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu}). \tag{2.14}$$

Řešením naší úlohy na časové hladině t_k je pak pár $(\boldsymbol{u}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$ takový, že:

$$\boldsymbol{u}^k \in \boldsymbol{K}^k, \boldsymbol{\lambda}^k \in \boldsymbol{\Lambda} : \quad \mathcal{H}^k(\boldsymbol{u}^k, \boldsymbol{\mu}) \leq \mathcal{H}^k(\boldsymbol{u}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \leq \mathcal{H}^k(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\lambda}^k) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^k, \forall \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\Lambda}. \tag{2.15}$$

Za řešení dynamické úlohy diskretizované v čase pak považujme posloupnost $\{\boldsymbol{u}^k\}_{k=1}^{\bar{k}}$ (kde $t_{\bar{k}} = T$), případně vhodně zvolenou interpolaci, která z této posloupnosti vychází.

2.3 Aproximace konečnými elementy

Mějme připravenu regulární triangulaci $\mathcal{T}_h$ (h značí velikost nejdelší hrany triangulace) jednotlivých těles Ω^s, s čtyřstěnnými elementy (simplexy) $\mathcal{T}_{hn}$, $n = 1, \ldots, N_{el}$ a s vrcholy a_m, $m = 1, \ldots, N_v$. Předpokládáme, že tělesa uvažovaná ve vzájemném kontaktu mají společnou hranici Γ_c^{rs} a že vrcholy sousedících elementů z Γ_c^r a Γ_c^s vždy tvoří pár (v němž oba vrcholy mají stejné souřadnice a jemuž přísluší normálový vektor $\boldsymbol{n}$). Stejně tak sousedící stěny elementů na Γ_c tvoří páry, které značíme S_{hl}, $l = 1, \dots, N_{mult}$.

Množiny $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{K}^k$ a $\boldsymbol{\Lambda}$ aproximujeme konečně-dimenzionálními množinami

$$\boldsymbol{W}_h = \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \mathcal{C}(\Omega^1)^3 \times \cdots \times \mathcal{C}(\Omega^{\bar{s}})^3 \mid \boldsymbol{v}_h|_T \in P_1(T)^3, \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}, \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{K}_h^k = \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{W}_h \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{v}_h(a_m) = \boldsymbol{u}_D^k(a_m),\ \forall a_m \in \Gamma_D \\ [\boldsymbol{v}_h(a_m^{rs}) \cdot \boldsymbol{n}]^{rs} \le 0,\ \forall a_m^{rs} \in \Gamma_c^{rs} \end{array} \right\}, \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_h = \left\{ \boldsymbol{\mu}_h \in \boldsymbol{\Lambda} \mid \boldsymbol{\mu}_h|_S \in P_0(S)^3, \forall S = \overline{T} \cap \Gamma_c, T \in \mathcal{T}_h \right\}. \tag{2.18}$$

Za řešení $(\boldsymbol{u}_h^k, \boldsymbol{\lambda}_h^k)$ aproximované úlohy v čase t_k pak považujeme aproximaci

$$\boldsymbol{u}_h^k \in \boldsymbol{K}_h^k, \boldsymbol{\lambda}_h^k \in \boldsymbol{\Lambda}_h : \qquad \mathcal{H}^k(\boldsymbol{u}_h^k, \boldsymbol{\mu}_h) \le \mathcal{H}^k(\boldsymbol{u}_h^k, \boldsymbol{\lambda}_h^k) \le \mathcal{H}^k(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\lambda}_h^k) \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h^k, \forall \boldsymbol{\mu}_h \in \boldsymbol{\Lambda}_h.$$

Vektor posunutí $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h^k$ je určen svými souřadnicemi ve vhodné bázi prostoru $\boldsymbol{W}_h$, tedy vektorem $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{N_{dof}}$ obsahujícím složky vektoru posunutí ve vrcholech a_m. Číslo N_{dof} je počet stupňů volnosti, v našem případě rovné trojnásobku počtu vrcholů, které neleží na Γ_D, tedy těch vrcholů, na kterých není posunutí dáno explicitně Dirichletovou okrajovou podmínkou. Vektor Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\mu}_h \in \boldsymbol{\Lambda}_h$ je určen vektorem $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{3N_{mult}}$ obsahujícím složky vektoru posunutí na stěnách na Γ_c. Vektory $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ jsou tedy algebraickou reprezentací vektorů $\boldsymbol{v}_h$ a $\boldsymbol{\mu}_h$. Obdobně na jednotlivém elementu triangulace budeme značit $\boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^{12}$ vektor obsahující 3 složky posunutí ve 4 vrcholech čtyřstěnu; prvky $\boldsymbol{\Delta}$ jsou výběrem z prvků vektoru $\boldsymbol{y}$. Na stěně elementu na kontaktním rozhraní označíme $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^3$ vektor Lagrangeových multiplikátorů; prvky $\mathbf{Z}$ jsou tedy výběrem z prvků vektoru $\boldsymbol{z}$. Označme $\boldsymbol{\Delta}_S \in \mathbb{R}^9$ výběr prvků z $\boldsymbol{\Delta}$, určující hodnoty $\boldsymbol{v}_h$ na stěně S.

Výraz $\mathcal{H}^k(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h)$ lze vyjádřit jako součet příspěvků za všechny elementy, tj. za objemy jednotlivých čtyřstěnů a za ty jejich stěny, které leží na hranici $\Gamma_{\boldsymbol{F}}$ nebo na kontaktní hranici Γ_c. Jelikož funkce z prostoru $\boldsymbol{W}_h$ jsou lineární na každém elementu T_{hn} a funkce z $\boldsymbol{\Lambda}_h$ jsou na každé stěně kontaktní hranice konstantní, lze jednotlivé příspěvky $\mathcal{H}^k(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h)$ vyjádřit následujícím způsobem.

$$\frac{1}{2} A(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h) \Big|_{T_{hn}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Delta}^T \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{\Delta}, \tag{2.19}$$

kde definujeme $\boldsymbol{C}_n \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ na základě (2.9). Obdobně lineární člen $F^k(\boldsymbol{v}_h)$ napíšeme jako

$$F^k(\boldsymbol{v}_h)\big|_{T_{hn}} = \boldsymbol{\Delta}^T \boldsymbol{b}_n^k,$$

přičemž vektor $\boldsymbol{b}_n^k \in \mathbb{R}^{12}$ je definován vztahem (2.10). Konečně příspěvek $J_h^k(\boldsymbol{v}_h^k, \boldsymbol{\mu}_h^k)$ na stěně S_{hl} lze vyjádřit jako

$$J^k(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h)\big|_{S_{hl}} = (\boldsymbol{\Delta}_S^T \boldsymbol{G}_l^T + \boldsymbol{h}_l^{k\,T}) \mathbf{Z}, \tag{2.20}$$

kde $\boldsymbol{G}_l \in \mathbb{R}^{3 \times 9}$ a $\boldsymbol{h}_l^k \in \mathbb{R}^3$ jsou definovány vztahem (2.13). Platí $\boldsymbol{h}_l^k = \boldsymbol{G}_l \boldsymbol{\Delta}_S^{k-1}$ kde $\boldsymbol{\Delta}_S^{k-1}$ je obdoba $\boldsymbol{\Delta}_S$ vztahující se k vektoru řešení předcházejícího časového kroku.

Funkcionál $\mathcal{H}^k(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h)$ je tedy algebraicky reprezentován funkcí

$$\mathcal{F}^k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b}^k + \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{h}^k, \tag{2.21}$$

kde matice $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{N_{dof} \times N_{dof}}$ a $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{N_{mult} \times N_{dof}}$ a vektory $\boldsymbol{b}^k \in \mathbb{R}^{N_{dof}}$ a $\boldsymbol{h}^k \in \mathbb{R}^{N_{mult}}$ vzniknou sečtením příspěvků $\boldsymbol{C}_n$, $\boldsymbol{b}_n^k$ a $\boldsymbol{G}_l$, $\boldsymbol{h}_l^k$ za všechny elementy T_{hn} a stěny na kontaktu S_{hl} (a eliminací neznámých ve vrcholech s Dirichletovou okrajovou podmínkou). Matice $\boldsymbol{C}$ je symetrická, positivně definitní, řídká a blokově diagonální (bloky odpovídají jednotlivým podoblastem Ω^s). Matice $\boldsymbol{G}$ obsahuje jen N_{cont} nenulových, řídkých sloupců, kde N_{cont} je počet stupňů volnosti vrcholů ležících na kontaktní hranici, zpravidla $N_{cont} << N_{dof}$.

Signoriniho podmínku nepronikání na kontaktní hranici, aproximovanou nerovností $(2.17)_2$, vyžadovanou jen ve vrcholech elementů na kontaktním rozhraní

$$[\boldsymbol{v}_h(a_m^{rs}) \cdot \boldsymbol{n}]^{rs} \le 0,\ \forall a_m^{rs} \in \Gamma_c^{rs}, \tag{2.22}$$

lze napsat pro každý kontaktní pár jako

$$\boldsymbol{A}_m^T \boldsymbol{\Delta}_P \leq 0, \tag{2.23}$$

kde $\boldsymbol{\Delta}_P \in \mathbb{R}^6$ obsahuje vektory posunutí ve dvou vrcholech tvořících kontaktní pár a_m^{rs} a kde $\boldsymbol{A}_m \in \mathbb{R}^6$ je vektor odpovídající podmínce (2.22) (v podstatě lze říci $\boldsymbol{A}_m^T = [\boldsymbol{n}, -\boldsymbol{n}]$). Aproximovaná kontaktní podmínka pro celou úlohu lze tedy vyjádřit jako nerovnost

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0}, \tag{2.24}$$

kde $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^{N_{pairs}}$ a $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{N_{pairs} \times N_{dof}}$ má jen N_{cont} nenulových, řídkých sloupců (N_{pairs} je počet kontaktních párů a N_{cont} počet stupňů volnosti na Γ_c, platí $N_{pairs}, N_{cont} << N_{dof}$).

Celá úloha je diskretizací metodou konečných prvků popsaným způsobem v každém časovém kroku k převedena na algebraickou úlohu hledání sedlového bodu funkce

$$\mathcal{F}^k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \min_{\tilde{\boldsymbol{y}}} \max_{\tilde{\boldsymbol{z}}} \mathcal{F}^k(\tilde{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{z}}) \tag{2.25}$$

při současném zachování omezujících podmínek:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0} \tag{2.26}$$

$$z_{3l-2}^2 + z_{3l-1}^2 + z_{3l}^2 \leq 1, \qquad l = 1, 2, \ldots. \tag{2.27}$$

Tato úloha je ve FEC řešena Uzawovou metodou, popsanou například v [2, 5], jejíž algoritmus je následující.

1. Je dán parametr $\rho > 0$. Nastav počáteční $\boldsymbol{z}^0 := (0, \ldots, 0)$ a $i := 0$.
2. Dokud není splněno zastavovací kritérium (*), opakuj:
   (a) $i := i + 1$.
   (b) Urči $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b}^k + \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{z}^{i-1}$.
   (c) Spočti $\boldsymbol{y}^i$ jako řešení minimalizační úlohy s omezením:

   $$\boldsymbol{y}^i \longleftarrow \min_{\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0}} \frac{1}{2} \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{r}.$$

   Minimalizační úloha s omezením $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0}$, je řešena metodou sdružených projektovaných gradientů popsanou například v [1].
   (d) Urči $\hat{\boldsymbol{z}}^i := \boldsymbol{z}^{i-1} + \rho(\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}^i + \boldsymbol{h}^k)$.
   (e) Urči $\boldsymbol{z}^i := \Pi_{\boldsymbol{\Lambda}}(\hat{\boldsymbol{z}}^i)$, kde projekce $\Pi_{\boldsymbol{\Lambda}}$ je definována jako projekce vektorů multiplikátorů na jednotlivých kontaktních stěnách:

   $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_{3l-2}^i \\ \boldsymbol{z}_{3l-1}^i \\ \boldsymbol{z}_{3l}^i \end{pmatrix} := \pi \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{z}}_{3l-2}^i \\ \hat{\boldsymbol{z}}_{3l-1}^i \\ \hat{\boldsymbol{z}}_{3l}^i \end{pmatrix}, \qquad l = 1, 2, \ldots,$$

   kde $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je projekce do jednotkové koule:

   $$\pi(\boldsymbol{\zeta}) := \begin{cases} \boldsymbol{\zeta}, & ||\boldsymbol{\zeta}|| \leq 1 \\ \dfrac{1}{||\boldsymbol{\zeta}||} \boldsymbol{\zeta}, & ||\boldsymbol{\zeta}|| \geq 1. \end{cases}$$

Jako zastavovací kritérium (*) je ve FEC používán test na velikost změny aproximace mezi jednotlivými iteracemi, $||\boldsymbol{y}^k - \boldsymbol{y}^{k-1}|| / ||\boldsymbol{y}^k||, ||\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^{k-1}|| / ||\boldsymbol{z}^k|| < \varepsilon$, viz [5]. Poznamenejme, že toto kritérium není vždy dobré; jednak vhodná volba $\varepsilon > 0$ závisí na zadané úloze (a na volbě parametru ρ) a jednak pomalá konvergence algoritmu mezi jednotlivými kroky (stagnace) nijak nevypovídá o přesnosti získaného řešení algebraické úlohy. Přitom ve stacionárních úlohách je snadnější vyladit parametry ρ a ε pro řešení algebraické úlohy pro daný typ úlohy, v dynamické úloze však chování algebraických problémů může záviset také na délce časového kroku τ nebo se dokonce může v různých časových krocích k lišit. Lze tedy uvažovat o jiných zastavovacích kritériích či o použití jiného algoritmu pro řešení úlohy.

3 Implementace

Program FEC je kód implementovaný v jazyce `Fortran 77`, bez použití dalších specializovaných knihoven. Byl sestaven pro řešení statických kontaktních úloh v lineární pružnosti, základní stavební prvky implementace jsou popsány v [1] a následných zprávách [2, 3, 4, 6]. Implementace dynamické úlohy do kódu FEC je popsána ve zprávě [10]. Verze popisovaná zde se od této liší zahrnutím vazkopružného modelu a zahrnutím Trescova modelu tření. V následující kapitole jen stručně vyjmenujeme, kterých částí kódu FEC se úpravy dotkly.

Vazkopružnost

Zahrnutí vazkopružného modelu jednoduše řečeno spočívá v přidání členu $\boldsymbol{\sigma}_1(\partial_t \boldsymbol{u})$ v (1.2) v rovnici (1.1). Po časové diskretizaci a převedení na variační formulaci se objeví dva nové členy, které bylo nutno zabudovat do podprogramů sestavujících algebraickou úlohu (2.21).

- V definici bilineární formy $A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, viz (2.9), je nově přičítán tenzor $\frac{1}{\tau}\boldsymbol{C}_1$ k původnímu $\boldsymbol{C}_0$. Tato modifikace zasahuje do podprogramu

  ```
  subroutine ELSTIFF(...),
  ```

  kde jsou sestavovány lokální matice $\boldsymbol{C}_n$, viz (2.19). Viz také [10] a [6],

- Ve formulaci $F^k(\boldsymbol{v})$, viz (2.10), je nově obsažen výraz $\int_\Omega \frac{\boldsymbol{C}_1}{\tau}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{k-1}) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. Oproti původní verzi byla proto upravena struktura matic MPrevX a MPrevVH, které slouží k sestavování těch příspěvků $F^k(\boldsymbol{v})$, jejichž hodnota závisí na řešení v předcházející časové hladině $\boldsymbol{u}^{k-1}$. Příslušná modifikace FEC se projevila v podprogramu

  ```
  subroutine RStiff(...),
  ```

  který prvky matic MPrevX a MPrevVH připravuje, viz [10].

Tření

Sestavení algebraické úlohy hledání sedlového bodu s maticí $\boldsymbol{G}$ je obsaženo již ve verzi FEC pro stacionární úlohy a je popsáno například v [6]. Matice $\boldsymbol{G}$ je uložena ve formátu CSR (*Compressed Sparse by Rows*) a je sestavována podprogramem

```
subroutine FricBS(...).
```

Jak plyne z (2.20), struktura matice $\boldsymbol{G}$ nedoznala oproti původní stacionární formulaci žádné změny. Dynamická verze se od stacionárního kódu popisovaného v [6] liší jen zacházením s hodnotami okrajových podmínek, což je již obecně popsáno v [10].

Ve formulaci (2.21) se nově objevuje člen $\boldsymbol{h}^k$. Přitom ale platí, že $\boldsymbol{h}^k = \boldsymbol{G}\boldsymbol{y}^{k-1}$, kde $\boldsymbol{y}^{k-1}$ je vektor řešení spočtený v předchozím časovém kroku. Vektor $\boldsymbol{h}^k$ tedy není nutné sestavovat po elementech, ale lze jej v každém časovém kroku k získat pouhým vynásobením matice $\boldsymbol{G}$ (ta se s časem nemění) a vektoru předchozího řešení.

Vstupní a výstupní data

Program FEC po překladu tvoří jediný spustitelný soubor `fec06.x`, který se volá bez dalších parametrů. Výsledkem běhu programu je řada výstupních souborů `*.gmv.kkkk` v adresáři `./gmv/`, kde `kkkk` je číslo časového kroku. Tyto výstupní soubory jsou určeny pro vizualizaci programem GMV, (*General Mesh Viewer*), viz [11]. Soubor obsahuje popis sítě konečných prvků a vektor posunutí v každém vrcholu sítě. Geometrie oblasti je deformována podle spočtených hodnot řešení, tj. souřadnice vrcholů sítě jsou posunuty o spočtený vektor posunutí přenásobený konstantou `DisplacementMagnification`, která je předepsána v podprogramu `OUT2GMV3(...)`.

Zadání časového intervalu a délky kroku τ a další parametry běhu programu jsou zadány v souborech `TIME.IN` a `SOLPAR.IN`. V `SOLPAR.IN` je zejména zadáván parametr ρ Uzawova algoritmu. Zahrnutí vazkopružného modelu stejně jako zahrnutí třecích sil jsou volitelné a lze je v `TIME.IN` zapnout či vypnout.

`bTmDiscretisation` – určuje chování programu:

- 0 výpočet stacionárního řešení, tj. žádná časová diskretizace, hodnoty okrajových podmínek se uvažují v čase `dTime=dTmStart`
- 1 výpočet kvazistacionární úlohy, tj. v modelu se neuvažuje setrvačný ani tlumící člen
- 2 výpočet dynamické úlohy
- -1 žádný výpočet (načte datové struktury a exportuje síť ve výstupním formátu, bez hodnot řešení)

`bFrictionTreatment` – 2 pro zahrnutí (Trescova) tření, 0 pro model bez tření, (1 pro původní stacionární formulaci tření, experimentální možnost)

`bViscoelasticity` – 1 pro vazkopružný model, 0 pro elastický model

`dTmStart` – začátek časového intervalu

`dTmEnd` – konec časového intervalu

`dTimeStep` – velikost časového kroku

Geometrická a materiálová data jsou programem načtena ze třech zdrojových souborů: `USR_FIRST.TXT`, `USR_MESH.TXT` a `USR_MATERIAL.TXT`. Soubor `USR_FIRST.TXT` se načítá jako první a obsahuje informace o rozměrech zadávaných datových polí. Nejdůležitější položky jsou (zápis v souboru odpovídá názvům proměnných ve zdrojovém kódu):

`NoTetras` – počet elementů sítě (čtyřstěnů)

`NoVertices` – počet vrcholů

`NoBoundaries` – počet stěn elementů na hranici oblasti

`NoSubdomains` – počet těles, resp. oblastí s různými materiálovými vlastnostmi

`NoContactBoundaries` – počet (dvojic) stěn elementů na kontaktní hranici

`NoContactPairs` – počet dvojic vrcholů na kontaktní hranici (tj. dvojic, na kterých je realizována kontaktní podmínka nepronikání)

V souboru `USR_MATERIAL.TXT` jsou předepsány následující položky. Jejich zápis odpovídá datové struktuře ve zdrojovém kódu `FEC`, index `I` odpovídá číslu podoblasti.

`(Weight(J,I),J=1,3)`
vektor síly působící na jednotku hmotnosti

`EStiff(I), SigStiff(I)`
Youngův modul pružnosti E_0 a Poissonova konstanta σ_0

`EVisco(I), SigVisco(I)`
konstanty E_1 a σ_1 udávající vazkou odezvu tenzoru napětí

`RhoDensity(I), AlphaDamping(I)`
materiálová hustota ρ a tlumící koeficient α

Hodnoty polí popisujících geometrii sítě jsou zadány v souboru `USR_MESH.TXT`. Zápis položek opět odpovídá zápisu uvnitř zdrojového kódu:

`VX(I),VY(I),VZ(I)`
: souřadnice vrcholu s indexem `I`, `I=1..NoVertices`

`(ITNODE(J,I),J=1,5)`
: indexy vrcholů (`J=1..4`) čtyřstěnu `I`, `I=1..NoTetras`;
  číslo podoblasti (`J=5`) ke které čtyřstěn náleží

`(IBNDRY(J,I),J=1,5)`
: indexy vrcholů (`J=1..3`) stěny `I`, `I=1..NoBoundaries`;
  typ okrajové podmínky (`J=4`) zadané na této stěně:

  1 homogenní (nulová) Neumannova o.p.

  2 nehomogenní Neumannova o.p., tj. předepsané zatížení

  -1 Dirichletova o.p., tj. předepsané posunutí

  -2 jednostranný kontakt

  -3 oboustranný kontakt

  0 vnitřní stěna, tj. stěna mezi oblastmi, které jsou součástí stejného tělesa (ale liší se např. materiálovými vlastnostmi)

`(ICCB(J,I),J=1,3)`
: indexy stěn (J=1,2) přiléhajících k sobě na kontaktní hranici, `I=1..NoContactBoundaries`

`(ICP(J,I),J=1,2)`
: indexy vrcholů tvořících kontaktní dvojici, `I=1..NoContactPairs`

`CPX(I),CPY(I),CPZ(I)`
: souřadnice normálového vektoru příslušejícího ke kontaktní dvojici, `I=1..NoContactPairs`

`(ICCB2(J,I),J=1,3)`
`(ICP2(J,I),J=1,2)`
`CPX2(I),CPY2(I),CPZ2(I)`
: obdobně indexy stěn, indexy vrcholů a souřadnice normálového vektoru, pro oboustranný kontakt

Jednoduché vzorové příklady vstupních dat jsou součástí zdrojového kódu `FEC`.

4 Shrnutí

Předložená zpráva popisuje formulaci problému kontaktu několika těles, modelovaných v lineární vazkopružnosti, s Trescovým modelem tření. Úloha byla diskretizována v čase pomocí semi-implicitního schématu a v prostoru metodou konečných prvků. V předložené zprávě popisujeme jednoduchý způsob, jakým byla modifikována implementace programu `FEC` popsaná v předchozí zprávě [10] tak, aby zahrnula jak vazkopružný model tak nestacionární model tření.

Předložená studie je výzkumnou zprávou projektu MPO ČR č. `FT-TA/087` za rok 2007.

Literatura

[1] Z. Kestřánek, "Numerical analysis of the contact problem, comparison of methods for finding the approximate solution," Tech. Rep. No. 648, Institute of Computer Science, AS CR, 1995.

[2] Z. Kestřánek and J. Nedoma, "The conjugate projected gradient method – numerical tests and results," Tech. Rep. No. 677, Institute of Computer Science, AS CR, 1996.

[3] J. Nedoma and Z. Kestřánek, "Preconditioners for contact problems in elasticity," Tech. Rep. No. 739, Institute of Computer Science, AS CR, 1998.

[4] Z. Kestřánek and J. Nedoma, "FEC - a code for contact problems in thermoelasticity," Tech. Rep. No. 740, Institute of Computer Science, AS CR, 1998.

[5] Z. Kestřánek, *Numerical analysis of the 3D contact problem of Signorini type with friction in thermoelasticity. H-version of the finite element approximation.* PhD thesis, Technical University Prague, 1999.

[6] Z. Kestřánek, "Description of the finite element program for contact problem," Tech. Rep. No. 831, Institute of Computer Science, AS CR, 2001.

[7] J. Nedoma, J. Stehlík, M. Bartoš, F. Denk, V. Džupa, J. Fousek, I. Hlaváček, Z. Klézl, and I. Květ, *Biomechanika lidského skeletu a umělých náhrad jeho částí.* Universita Karlova v Praze – Nakladatelstvi Karolinum, 2006.

[8] J. Nedoma and J. Daněk, "Dynamic and quasi-static FE simulations of the function of human joints and their total replacements based on the mortar approach," Tech. Rep. No. 1005, Institute of Computer Science, AS CR, 2007.

[9] J. Nedoma and J. Daněk, "Dynamic and quasi-static simulations of the function of knee joint and its artificial replacements in 2D and 3D," in preparation.

[10] M. Lanzendörfer, "Modifikace `FEC` – kód pro dynamickou kontaktní úlohu v lineární pružnosti," Tech. Rep. No. 980, Institute of Computer Science, AS CR, 2006.

[11] L. A. National Laboratory, "The general mesh viewer." `http://www-xdiv.lanl.gov/XCM/gmv/GMVHome.html`.

[12] M. Lanzendörfer and J. Daněk, "Aplikace `FEC` v biomechanice kolenního kloubu," Tech. Rep. No. 1006, Institute of Computer Science, AS CR, 2007.