



národní  
úložiště  
šedé  
literatury

**Modifikace FEC - dynamická kontaktní úloha v lineární vazkopružnosti se třením**

Lanzendörfer, Martin  
2007

Dostupný z <http://www.nusl.cz/ntk/nusl-37853>

Dílo je chráněno podle autorského zákona č. 121/2000 Sb.

Tento dokument byl stažen z Národního úložiště šedé literatury (NUŠL).

Datum stažení: 29.05.2024

Další dokumenty můžete najít prostřednictvím vyhledávacího rozhraní [nusl.cz](http://www.nusl.cz) .



Institute of Computer Science  
Academy of Sciences of the Czech Republic

## Modifikace FEC – dynamická kontaktní úloha v lineární vazkopružnosti se třením

M. Lanzendörfer

Technical report No. 1007



Institute of Computer Science  
Academy of Sciences of the Czech Republic

## Modifikace FEC – dynamická kontaktní úloha v lineární vazkopružnosti se třením

M. Lanzendörfer

Technical report No. 1007

### Abstrakt:

Kód FEC byl připraven k řešení dynamických kontaktních problémů v lineární pružnosti, bez tření. Vypracovaná modifikace implementuje lineární vazkopružný model materiálu a ve formulaci kontaktní úlohy zahrnuje Trescův model daného tření.

Předložená studie je výzkumnou zprávou projektu MPO ČR č. FT-TA/087 za rok 2007.

### Keywords:

metoda konečných prvků, dynamická kontaktní úloha se třením, vazkopružnost, matematické programování

# 1 Úvod

## 1.1 Úvod, motivace

Matematický model jednostranného kontaktu pružných těles má rozsáhlé důležité aplikace od průmyslového vývoje až po například výzkum biomechaniky lidského skeletu. Program s pracovním názvem FEC (resp. FEC 3D), sestavený za účelem řešení stacionárních kontaktních úloh v lineární pružnosti metodou konečných prvků ve třech prostorových dimenzích, byl již na ÚI AV ČR používán ke studiu některých aplikací v biomechanice a v geomechanice (viz například [9]). Software FEC je popsán v technických zprávách [1], [4] a [6], další vyvíjené metody jsou popisovány v [8]. Výchozí kód používá formulaci kontaktu pomocí podmínek Signoriniho typu společně s Trescovým modelem tření. Ve zprávě [10] byla popsána modifikace kódu FEC připravená pro numerické simulace dynamické kontaktní úlohy bez tření, v lineární pružnosti. Ta byla také aplikována na řešení problémů v biomechanice lidského kolenního kloubu a jeho náhrady, viz [12].

Při řešení některých reálných úloh v řadě oborů, například biomechanice, geomechanice, mechanice a technologii, je potřeba uvažovat i jinou než dokonale pružnou odezvu materiálů. V některých aplikacích je vhodné uvažovat modely, popisující napětíovou odezvu nejen v závislosti na aktuální deformaci, ale také na krátké historii deformace. V následující zprávě popíšeme formulaci modelu v lineární vazkopružnosti. Současně budeme uvažovat kontaktní úlohu se zahrnutím třecích sil, s modelem nestacionárního Trescova tření. Popíšeme časovou a prostorovou diskretizaci a následně předložíme jednoduchou modifikaci kódu FEC, která zahrnuje numerické řešení těchto úloh. Vývoj byl součástí projektu MPO ČR pod označením FT-TA/087.

## 1.2 Fyzikální formulace

Mějme oblast  $\Omega$  představující sjednocení  $\bar{s}$  jednotlivých pružných těles  $\Omega = \cup_{s=1}^{\bar{s}} \Omega^s \subset \mathbb{R}^3$  ve třírozměrném prostoru. Hranici oblasti rozdělme disjunktčně podle uvažovaných okrajových podmínek na  $\partial\Omega = \Gamma_{\mathbf{F}} \cup \Gamma_{\mathbf{u}} \cup \Gamma_{\mathbf{c}}$ , přičemž  $\Gamma_{\mathbf{c}} = \cup_{r,s} \Gamma_{\mathbf{c}}^{r,s}$ , kde  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{r,s} = \Gamma_{\mathbf{c}}^r \cap \Gamma_{\mathbf{c}}^s$  představuje kontaktní rozhraní mezi tělesy  $\Omega^r$  a  $\Omega^s$ ,  $\Gamma_{\mathbf{c}}^s \subset \partial\Omega^s$ . Uvažujme časový interval  $I = (0, T)$ , v němž budeme vývoj mechanického systému studovat. Hledáme posunutí  $\mathbf{u} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , splňující následující:

V celé oblasti  $\Omega$  je splněna pohybová rovnice

$$\rho \partial_{tt} \mathbf{u} + \alpha \partial_t \mathbf{u} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}) = \mathbf{g} \quad \text{v } I \times \Omega, \quad (1.1)$$

kde  $\rho > 0$  je materiálová hustota (konstantní v každém tělese  $\Omega^s$ ) a  $\alpha > 0$  je tlumící parametr. Ve vazkopružném modelu obvykle uvažujeme  $\alpha = 0$ . Značíme  $\partial_t$ , respektive  $\partial_{tt}$  první, respektive druhou derivaci podle času. Pro tenzor napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  uvažujeme vztah

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}) &= \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}_1(\partial_t \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{C}_0 \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}_1 \mathbf{e}(\partial_t \mathbf{u}), \\ \mathbf{e}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

tedy  $\boldsymbol{\sigma}_0$  je lineárně závislé na linearizovaném tenzoru deformace (tenzoru malých deformací)  $\mathbf{e}(\mathbf{u})$  a člen  $\boldsymbol{\sigma}_1$  přidává obdobnou lineární závislost na rychlosti deformace. Přitom  $\mathbf{C}_0$ ,  $\mathbf{C}_1$  jsou tenzory čtvrtého řádu takové, že platí podmínky symetrie a podmínky pozitivní definitnosti, viz například [1], [5]. Program FEC je navíc připraven a používán pro modely izotropního materiálu; pro každou oblast  $\Omega^s$  jsou zadávány dvě materiálové konstanty určující elastickou odezvu: Youngův modul pružnosti  $E_0$  a Poissonova konstanta  $\sigma_0$ ; vazká odezva v  $\boldsymbol{\sigma}_1(\partial_t \mathbf{u})$  je v současné verzi modelována obdobně, předepsáním dvou konstant  $E_1$  a  $\sigma_1$ .

Na hranici  $\Gamma_{\mathbf{u}}$  uvažujeme tělesa pevně uchycena, posunutí je tedy předepsáno pomocí Dirichletovy okrajové podmínky

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{na } I \times \Gamma_{\mathbf{u}}, \quad (1.3)$$

zatímco na hranici  $\Gamma_{\mathbf{F}}$  je předepsáno zatížení těles pomocí Neumannovy okrajové podmínky

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{na } I \times \Gamma_{\mathbf{F}}, \quad (1.4)$$

kde  $\mathbf{n}$  značí normálový vektor k hranici  $\Gamma_F$ . Jak  $\mathbf{u}_D$  tak  $\mathbf{f}$  se mohou měnit v závislosti na čase.

Na kontaktním rozhraní předepisujeme Signoriniho podmínku nepronikání

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]^{rs} &\leq 0, & \sigma_{\mathbf{n}}^{rs} &\leq 0 \\ \sigma_{\mathbf{n}}^{rs} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]^{rs} &= 0 \end{aligned} \quad \text{na } I \times \Gamma_c, \quad (1.5)$$

kde  $[*]^{rs} := *^r - *^s$  značí skok hodnoty  $*$  na rozhraní těles  $\Omega^r$  a  $\Omega^s$ , kde  $\mathbf{n}$  značí jednotkový normálový vektor ke kontaktní hranici  $\Gamma_c^{rs}$  a kde  $\sigma_{\mathbf{n}}^{rs} = \sigma_{\mathbf{n}}^r = \sigma_{\mathbf{n}}^s$ ,  $\sigma_{\mathbf{n}} = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$  je normálová část napětí na kontaktním rozhraní. Zároveň na kontaktním rozhraní uvažujeme Trescův model tření, tedy podmínku

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}}^{rs}| &\leq g_c^{rs}, & [\partial_t \mathbf{u}_{\mathbf{t}}]^{rs} &= -\gamma \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}}^{rs} \\ [\partial_t \mathbf{u}_{\mathbf{t}}]^{rs} (|\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}}^{rs}| - g_c^{rs}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{na } I \times \Gamma_c, \quad (1.6)$$

kde  $\gamma(t, \mathbf{x}) > 0$  je libovolná (nikoliv předepsaná) skalární funkce, kde  $g_c^{rs} > 0$  je dané tření na rozhraní  $\Omega^r$  a  $\Omega^s$ , kde  $\mathbf{u}_{\mathbf{t}} := \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$  je tečná složka posunutí a kde  $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}}^{rs} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}}^r = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}}^s$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}} := (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) - \sigma_{\mathbf{n}}\mathbf{n}$  je tečné napětí na rozhraní  $\Gamma_c^{rs}$ .

Řešení vychází z předepsané počáteční podmínky

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \partial_t \mathbf{u}|_{t=0} = \bar{\mathbf{u}}_0 \quad \text{v } \Omega, \quad (1.7)$$

kde předpokládáme, že  $\mathbf{u}_0$  je splňuje Signoriniho kontaktní podmínku (1.5) a je v souladu s Dirichletovou okrajovou podmínkou (1.3).

## 2 Model pro numerické simulace

### 2.1 Časová diskretizace

Zvolným schématem diskretizace v časové proměnné bylo semi-implicitní schéma, stejně jako v [10]. Volba je motivována tím, aby výsledná úloha v každém časovém kroku měla strukturu shodnou se stacionární úlohou řešenou v původním kódu FEC. Pro pevně zvolenou velikost časového kroku  $\tau > 0$  uvažujeme jednotlivé časové hladiny

$$t_k = k\tau, \quad k = 1, 2, \dots$$

Rovnici (1.1) pak diskretizujeme v čase jako (horní index  $k$  značí vždy hodnotu v čase  $t_k$ ):

$$\rho \left( \frac{\mathbf{u}^k - 2\mathbf{u}^{k-1} + \mathbf{u}^{k-2}}{\tau^2} \right) + \alpha \left( \frac{\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}}{\tau} \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}^k) - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_1 \left( \frac{\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}}{\tau} \right) = \mathbf{g} \quad \text{v } \Omega, \quad (2.1)$$

což po přeuspořádání členů dává:

$$\left( \frac{\rho}{\tau^2} + \frac{\alpha}{\tau} \right) \mathbf{u}^k - \operatorname{div} \left( (\boldsymbol{\sigma}_0 + \frac{\boldsymbol{\sigma}_1}{\tau})(\mathbf{u}^k) \right) = \mathbf{g} + \left( 2\frac{\rho}{\tau^2} + \frac{\alpha}{\tau} \right) \mathbf{u}^{k-1} - \frac{1}{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}^{k-1}) - \frac{\rho}{\tau^2} \mathbf{u}^{k-2}. \quad (2.2)$$

Okrajové podmínky (1.3), (1.4) a (1.5) jednoduše vyžadujeme na každé časové hladině

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}_D^k \quad \text{na } \Gamma_u, \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^k \mathbf{n} = \mathbf{f}^k \quad \text{na } \Gamma_F, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}^k \cdot \mathbf{n}]^{rs} &\leq 0, & \sigma_{\mathbf{n}}^k &\leq 0, \\ \sigma_{\mathbf{n}}^k [\mathbf{u}^k \cdot \mathbf{n}]^{rs} &= 0 \end{aligned} \quad \text{na } \Gamma_c, \quad (2.5)$$

hodnoty  $\mathbf{f}^k$  a  $\mathbf{u}_D^k$  se opět mohou pro různá  $k$  lišit. Okrajové podmínky (1.6) Trescova modelu tření přejdou v

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}}^{rs,k}| &\leq g_c^{rs}, & [\mathbf{u}_{\mathbf{t}}^k - \mathbf{u}_{\mathbf{t}}^{k-1}]^{rs} &= -\gamma \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}}^{rs,k} \\ [\mathbf{u}_{\mathbf{t}}^k - \mathbf{u}_{\mathbf{t}}^{k-1}]^{rs} (|\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t}}^{rs,k}| - g_c^{rs}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{na } \Gamma_c. \quad (2.6)$$

Pro předepsání počáteční podmínky jednoduchým způsobem předpokládáme zadání  $\mathbf{u}^0$  a  $\mathbf{u}^{-1}$ , přičemž  $\mathbf{u}^0$  předepisuje počáteční posunutí v čase  $t = 0$  a  $\mathbf{u}^{-1}$  je zvoleno tak, aby nahradilo počáteční podmínku  $\partial_t \mathbf{u}|_{t=0} = \bar{\mathbf{u}}_0$ , tedy tak, že platí (viz (1.7))

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0, \quad \frac{\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^{-1}}{\tau} = \bar{\mathbf{u}}_0.$$

## 2.2 Variační formulace v daném časovém kroku

Zopakujeme zde variační formulaci úlohy, na níž je postaveno řešení metodou konečných prvků, viz také [1], [2], [3]. Označme  $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{1,2}(\Omega^1)^3 \times \dots \times \mathbf{W}^{1,2}(\Omega^{\bar{s}})^3$ , kde  $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega^s)$  je standardní Sobolevův prostor. Pak množina přípustných posunutí (přípustných z hlediska Dirichletovy okrajové podmínky a Signoriniho kontaktní podmínky) na dané časové hladině  $t_k$  je

$$\mathbf{K}^k = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{W}, \quad \begin{array}{ll} \mathbf{v} = \mathbf{u}_D^k & \text{na } \Gamma_D \\ [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]^{rs} \leq 0 & \text{na } \cup_{r,s} \Gamma_c^{rs} \end{array} \right\}. \quad (2.7)$$

Funkcionál potenciální energie v čase  $t_k$  definujeme jako

$$\mathcal{L}^k(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - F^k(\mathbf{v}) + j^k(\mathbf{v}), \quad (2.8)$$

kde

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{C}_0 + \frac{1}{\tau}\mathbf{C}_1) \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left( \frac{\rho}{\tau^2} + \frac{\alpha}{\tau} \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (2.9)$$

$$F^k(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_F} \mathbf{f}^k \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{s} + \int_{\Omega} \left( \mathbf{g} + \left( \frac{2\rho}{\tau^2} + \frac{\alpha}{\tau} \right) \mathbf{u}^{k-1} - \frac{\rho}{\tau^2} \mathbf{u}^{k-2} \right) \cdot \mathbf{v} + \frac{\mathbf{C}_1}{\tau} \mathbf{e}(\mathbf{u}^{k-1}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \quad (2.10)$$

$$j^k(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_c^{rs}} g_c^{rs} |[v_t - u_t]^{rs}| \, d\mathbf{s}. \quad (2.11)$$

Poznamenejme, že v každém tělese  $\Omega^s$ ,  $s = 1, \dots, \bar{s}$  uvažujeme obecně různé konstanty  $\rho = \rho^s$  a  $\alpha = \alpha^s$ . Obdobně pro  $\mathbf{x} \in \Omega^s$  uvažujeme  $[\mathbf{C}_m \mathbf{e}(\mathbf{u})]_{ij} = [\mathbf{C}_m^s \mathbf{e}(\mathbf{u}^s)]_{ij} = \sum_{\hat{i}\hat{j}} C_{m,\hat{i}\hat{j}}^s e_{\hat{i}\hat{j}}(\mathbf{u}^s)$ , kde  $\mathbf{C}_m^s$ ,  $m = 0, 1$ , jsou zadány na každé podoblasti  $\Omega^s$  různými materiálovými parametry (v používaném nejjednodušším případě konstantami  $E_m^s, \sigma_m^s$ ).

Řešením  $\mathbf{u}^k$  naší úlohy na časové hladině  $t_k$  je minimum funkcionálu  $\mathcal{L}^k(\mathbf{v})$  v množině přípustných posunutí  $\mathbf{K}^k$

$$\mathbf{u}^k \in \mathbf{K}^k : \quad \mathcal{L}^k(\mathbf{u}^k) \leq \mathcal{L}^k(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}^k. \quad (2.12)$$

Jelikož funkcionál  $\mathcal{L}^k(\mathbf{v})$  je díky členu  $j^k(\mathbf{v})$  nehladký, formulujeme namísto úlohy minimalizace úlohu hledání sedlového bodu následujícím způsobem. Zavedeme množinu  $\Lambda$

$$\Lambda = \{ \boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\mu} \in L^\infty(\Gamma_c)^3, |\boldsymbol{\mu}| \leq 1 \text{ skoro všude na } \Gamma_c \}$$

a všimneme si, že

$$j^k(\mathbf{v}) = \sup_{\boldsymbol{\mu} \in \Lambda} J^k(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}), \quad J^k(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = \int_{\Gamma_c^{rs}} g_c^{rs} \boldsymbol{\mu} \cdot [v_t - \mathbf{u}_t^{k-1}]^{rs} \, d\mathbf{s}. \quad (2.13)$$

Definujeme tedy v čase  $t_k$  funkcionál sedlového bodu

$$\mathcal{H}^k(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2}A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - F^k(\mathbf{v}) + J^k(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}). \quad (2.14)$$

Řešením naší úlohy na časové hladině  $t_k$  je pak pár  $(\mathbf{u}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$  takový, že:

$$\mathbf{u}^k \in \mathbf{K}^k, \boldsymbol{\lambda}^k \in \Lambda : \quad \mathcal{H}^k(\mathbf{u}^k, \boldsymbol{\mu}) \leq \mathcal{H}^k(\mathbf{u}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \leq \mathcal{H}^k(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^k) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}^k, \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda. \quad (2.15)$$

Za řešení dynamické úlohy diskretizované v čase pak považujeme posloupnost  $\{\mathbf{u}^k\}_{k=1}^{\bar{k}}$  (kde  $t_{\bar{k}} = T$ ), případně vhodně zvolenou interpolaci, která z této posloupnosti vychází.

## 2.3 Aproximace konečnými elementy

Mějme připravenou regulární triangulaci  $\mathcal{T}_h$  ( $h$  značí velikost nejdelší hrany triangulace) jednotlivých těles  $\Omega^s$ , s čtyřstěnnými elementy (simplexy)  $\mathcal{T}_{hn}$ ,  $n = 1, \dots, N_{el}$  a s vrcholy  $a_m$ ,  $m = 1, \dots, N_v$ . Předpokládáme, že tělesa uvažovaná ve vzájemném kontaktu mají společnou hranici  $\Gamma_c^{rs}$  a že vrcholy

sousedících elementů z  $\Gamma_c^r$  a  $\Gamma_c^s$  vždy tvoří pár (v němž oba vrcholy mají stejné souřadnice a jemuž přísluší normálový vektor  $\mathbf{n}$ ). Stejně tak sousedící stěny elementů na  $\Gamma_c$  tvoří páry, které značíme  $S_{hl}$ ,  $l = 1, \dots, N_{mult}$ .

Množiny  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{K}^k$  a  $\mathbf{\Lambda}$  aproximujeme konečně-dimenzionálními množinami

$$\mathbf{W}_h = \{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{C}(\Omega^1)^3 \times \dots \times \mathcal{C}(\Omega^5)^3 \mid \mathbf{v}_h|_T \in P_1(T)^3, \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{K}_h^k = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h \mid \begin{array}{l} \mathbf{v}_h(a_m) = \mathbf{u}_D^k(a_m), \forall a_m \in \Gamma_D \\ [\mathbf{v}_h(a_m^{rs}) \cdot \mathbf{n}]^{rs} \leq 0, \forall a_m^{rs} \in \Gamma_c^{rs} \end{array} \right\}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{\Lambda}_h = \{ \boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{\Lambda} \mid \boldsymbol{\mu}_h|_S \in P_0(S)^3, \forall S = \bar{T} \cap \Gamma_c, T \in \mathcal{T}_h \}. \quad (2.18)$$

Za řešení  $(\mathbf{u}_h^k, \boldsymbol{\lambda}_h^k)$  aproximované úlohy v čase  $t_k$  pak považujeme aproximaci

$$\mathbf{u}_h^k \in \mathbf{K}_h^k, \boldsymbol{\lambda}_h^k \in \mathbf{\Lambda}_h : \quad \mathcal{H}^k(\mathbf{u}_h^k, \boldsymbol{\mu}_h) \leq \mathcal{H}^k(\mathbf{u}_h^k, \boldsymbol{\lambda}_h^k) \leq \mathcal{H}^k(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\lambda}_h^k) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h^k, \forall \boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{\Lambda}_h.$$

Vektor posunutí  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h^k$  je určen svými souřadnicemi ve vhodné bázi prostoru  $\mathbf{W}_h$ , tedy vektorem  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_{dof}}$  obsahujícím složky vektoru posunutí ve vrcholech  $a_m$ . Číslo  $N_{dof}$  je počet stupňů volnosti, v našem případě rovné trojnásobku počtu vrcholů, které neleží na  $\Gamma_D$ , tedy těch vrcholů, na kterých není posunutí dáno explicitně Dirichletovou okrajovou podmínkou. Vektor Lagrangeových multiplikátorů  $\boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{\Lambda}_h$  je určen vektorem  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{3N_{mult}}$  obsahujícím složky vektoru posunutí na stěnách na  $\Gamma_c$ . Vektory  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  jsou tedy algebraickou reprezentací vektorů  $\mathbf{v}_h$  a  $\boldsymbol{\mu}_h$ . Obdobně na jednotlivém elementu triangulace budeme značit  $\boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^{12}$  vektor obsahující 3 složky posunutí ve 4 vrcholech čtyřstěny; prvky  $\boldsymbol{\Delta}$  jsou výběrem z prvků vektoru  $\mathbf{y}$ . Na stěně elementu na kontaktním rozhraní označíme  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^3$  vektor Lagrangeových multiplikátorů; prvky  $\mathbf{Z}$  jsou tedy výběrem z prvků vektoru  $\mathbf{z}$ . Označme  $\boldsymbol{\Delta}_S \in \mathbb{R}^9$  výběr prvků z  $\boldsymbol{\Delta}$ , určující hodnoty  $\mathbf{v}_h$  na stěně  $S$ .

Výraz  $\mathcal{H}^k(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h)$  lze vyjádřit jako součet příspěvků za všechny elementy, tj. za objemy jednotlivých čtyřstěňů a za ty jejich stěny, které leží na hranici  $\Gamma_F$  nebo na kontaktní hranici  $\Gamma_c$ . Jelikož funkce z prostoru  $\mathbf{W}_h$  jsou lineární na každém elementu  $T_{hn}$  a funkce z  $\mathbf{\Lambda}_h$  jsou na každé stěně kontaktní hranice konstantní, lze jednotlivé příspěvky  $\mathcal{H}^k(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h)$  vyjádřit následujícím způsobem.

$$\frac{1}{2} A(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \Big|_{T_{hn}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{C}_n \boldsymbol{\Delta}, \quad (2.19)$$

kde definujeme  $\mathbf{C}_n \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  na základě (2.9). Obdobně lineární člen  $F^k(\mathbf{v}_h)$  napíšeme jako

$$F^k(\mathbf{v}_h) \Big|_{T_{hn}} = \boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{b}_n^k,$$

příčemž vektor  $\mathbf{b}_n^k \in \mathbb{R}^{12}$  je definován vztahem (2.10). Konečně příspěvek  $J_h^k(\mathbf{v}_h^k, \boldsymbol{\mu}_h^k)$  na stěně  $S_{hl}$  lze vyjádřit jako

$$J^k(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h) \Big|_{S_{hl}} = (\boldsymbol{\Delta}_S^T \mathbf{G}_l^T + \mathbf{h}_l^{kT}) \mathbf{Z}, \quad (2.20)$$

kde  $\mathbf{G}_l \in \mathbb{R}^{3 \times 9}$  a  $\mathbf{h}_l^k \in \mathbb{R}^3$  jsou definovány vztahem (2.13). Platí  $\mathbf{h}_l^k = \mathbf{G}_l \boldsymbol{\Delta}_S^{k-1}$  kde  $\boldsymbol{\Delta}_S^{k-1}$  je obdoba  $\boldsymbol{\Delta}_S$  vztahující se k vektoru řešení předcházejícího časového kroku.

Funkcionál  $\mathcal{H}^k(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h)$  je tedy algebraicky reprezentován funkcí

$$\mathcal{F}^k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{b}^k + \mathbf{y}^T \mathbf{G}^T \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{h}^k, \quad (2.21)$$

kde matice  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N_{dof} \times N_{dof}}$  a  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N_{mult} \times N_{dof}}$  a vektory  $\mathbf{b}^k \in \mathbb{R}^{N_{dof}}$  a  $\mathbf{h}^k \in \mathbb{R}^{N_{mult}}$  vzniknou sečtením příspěvků  $\mathbf{C}_n$ ,  $\mathbf{b}_n^k$  a  $\mathbf{G}_l$ ,  $\mathbf{h}_l^k$  za všechny elementy  $T_{hn}$  a stěny na kontaktu  $S_{hl}$  (a eliminací neznámých ve vrcholech s Dirichletovou okrajovou podmínkou). Matice  $\mathbf{C}$  je symetrická, pozitivně definitní, řídká a blokově diagonální (bloky odpovídají jednotlivým podoblastem  $\Omega^s$ ). Matice  $\mathbf{G}$  obsahuje jen  $N_{cont}$  nenulových, řídkých sloupců, kde  $N_{cont}$  je počet stupňů volnosti vrcholů ležících na kontaktní hranici, zpravidla  $N_{cont} \ll N_{dof}$ .

Signorininiho podmínku nepronikání na kontaktní hranici, aproximovanou nerovností (2.17)<sub>2</sub>, vyžadovanou jen ve vrcholech elementů na kontaktním rozhraní

$$[\mathbf{v}_h(a_m^{rs}) \cdot \mathbf{n}]^{rs} \leq 0, \forall a_m^{rs} \in \Gamma_c^{rs}, \quad (2.22)$$

lze napsat pro každý kontaktní pár jako

$$\mathbf{A}_m^T \Delta_P \leq 0, \quad (2.23)$$

kde  $\Delta_P \in \mathbb{R}^6$  obsahuje vektory posunutí ve dvou vrcholech tvořících kontaktní pár  $a_m^{rs}$  a kde  $\mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^6$  je vektor odpovídající podmínce (2.22) (v podstatě lze říci  $\mathbf{A}_m^T = [\mathbf{n}, -\mathbf{n}]$ ). Aproximovaná kontaktní podmínka pro celou úlohu lze tedy vyjádřit jako nerovnost

$$\mathbf{A}\mathbf{y} \leq \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

kde  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N_{pairs}}$  a  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_{pairs} \times N_{dof}}$  má jen  $N_{cont}$  nenulových, řídkých sloupců ( $N_{pairs}$  je počet kontaktních párů a  $N_{cont}$  počet stupňů volnosti na  $\Gamma_c$ , platí  $N_{pairs}, N_{cont} \ll N_{dof}$ ).

Celá úloha je diskretizací metodou konečných prvků popsáním způsobem v každém časovém kroku  $k$  převedena na algebraickou úlohu hledání sedlového bodu funkce

$$\mathcal{F}^k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{z}} \mathcal{F}^k(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (2.25)$$

při současném zachování omezujících podmínek:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} \leq \mathbf{0} \quad (2.26)$$

$$z_{3l-2}^2 + z_{3l-1}^2 + z_{3l}^2 \leq 1, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Tato úloha je ve FEC řešena Uzawovou metodou, popsanou například v [2, 5], jejíž algoritmus je následující.

1. Je dán parametr  $\rho > 0$ . Nastav počáteční  $\mathbf{z}^0 := (0, \dots, 0)$  a  $i := 0$ .
2. Dokud není splněno zastavovací kritérium (\*), opakuj:
  - (a)  $i := i + 1$ .
  - (b) Urči  $\mathbf{r} := \mathbf{b}^k + \mathbf{G}^T \mathbf{z}^{i-1}$ .
  - (c) Spočti  $\mathbf{y}^i$  jako řešení minimalizační úlohy s omezením:

$$\mathbf{y}^i \leftarrow \min_{\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y} \leq \mathbf{0}} \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{r}.$$

Minimalizační úloha s omezením  $\mathbf{A}\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$ , je řešena metodou sdružených projektovaných gradientů popsanou například v [1].

- (d) Urči  $\hat{\mathbf{z}}^i := \mathbf{z}^{i-1} + \rho(\mathbf{G}\mathbf{y}^i + \mathbf{h}^k)$ .
- (e) Urči  $\mathbf{z}^i := \Pi_{\Lambda}(\hat{\mathbf{z}}^i)$ , kde projekce  $\Pi_{\Lambda}$  je definována jako projekce vektorů multiplikátorů na jednotlivých kontaktních stěnách:

$$\begin{pmatrix} z_{3l-2}^i \\ z_{3l-1}^i \\ z_{3l}^i \end{pmatrix} := \pi \begin{pmatrix} \hat{z}_{3l-2}^i \\ \hat{z}_{3l-1}^i \\ \hat{z}_{3l}^i \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

kde  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je projekce do jednotkové koule:

$$\pi(\boldsymbol{\zeta}) := \begin{cases} \boldsymbol{\zeta}, & \|\boldsymbol{\zeta}\| \leq 1 \\ \frac{1}{\|\boldsymbol{\zeta}\|} \boldsymbol{\zeta}, & \|\boldsymbol{\zeta}\| \geq 1. \end{cases}$$

Jako zastavovací kritérium (\*) je ve FEC používán test na velikost změny aproximace mezi jednotlivými iteracemi,  $\|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}^{k-1}\|/\|\mathbf{y}^k\|, \|\mathbf{z}^k - \mathbf{z}^{k-1}\|/\|\mathbf{z}^k\| < \varepsilon$ , viz [5]. Poznamenejme, že toto kritérium není vždy dobré; jednak vhodná volba  $\varepsilon > 0$  závisí na zadané úloze (a na volbě parametru  $\rho$ ) a jednak pomalá konvergence algoritmu mezi jednotlivými kroky (stagnace) nijak nevyovídá o přesnosti získaného řešení algebraické úlohy. Přitom ve stacionárních úlohách je snadnější vyladit parametry  $\rho$  a  $\varepsilon$  pro řešení algebraické úlohy pro daný typ úlohy, v dynamické úloze však chování algebraických problémů může záviset také na délce časového kroku  $\tau$  nebo se dokonce může v různých časových krocích  $k$  lišit. Lze tedy uvažovat o jiných zastavovacích kritériích či o použití jiného algoritmu pro řešení úlohy.



### 3 Implementace

Program FEC je kód implementovaný v jazyce Fortran 77, bez použití dalších specializovaných knihoven. Byl sestaven pro řešení statických kontaktních úloh v lineární pružnosti, základní stavební prvky implementace jsou popsány v [1] a následných zprávách [2, 3, 4, 6]. Implementace dynamické úlohy do kódu FEC je popsána ve zprávě [10]. Verze popisovaná zde se od této liší zahrnutím vazkopružného modelu a zahrnutím Trescova modelu tření. V následující kapitole jen stručně vyjmenujeme, kterých částí kódu FEC se úpravy dotkly.

#### Vazkopružnost

Zahrnutí vazkopružného modelu jednoduše řečeno spočívá v přidání členu  $\sigma_1(\partial_t \mathbf{u})$  v (1.2) v rovnici (1.1). Po časové diskretizaci a převedení na variační formulaci se objeví dva nové členy, které bylo nutno zabudovat do podprogramů sestavujících algebraickou úlohu (2.21).

- V definici bilineární formy  $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , viz (2.9), je nově přičítán tenzor  $\frac{1}{\tau} \mathbf{C}_1$  k původnímu  $\mathbf{C}_0$ . Tato modifikace zasahuje do podprogramu

```
subroutine ELSTIFF(...),
```

kde jsou sestavovány lokální matice  $\mathbf{C}_n$ , viz (2.19). Viz také [10] a [6],

- Ve formulaci  $F^k(\mathbf{v})$ , viz (2.10), je nově obsažen výraz  $\int_{\Omega} \frac{\mathbf{C}_1}{\tau} \mathbf{e}(\mathbf{u}^{k-1}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}$ . Oproti původní verzi byla proto upravena struktura matic MPrevX a MPrevVH, které slouží k sestavování těch příspěvků  $F^k(\mathbf{v})$ , jejichž hodnota závisí na řešení v předcházející časové hladině  $\mathbf{u}^{k-1}$ . Příslušná modifikace FEC se projevila v podprogramu

```
subroutine RStiff(...),
```

který prvky matic MPrevX a MPrevVH připravuje, viz [10].

#### Tření

Sestavení algebraické úlohy hledání sedlového bodu s maticí  $\mathbf{G}$  je obsaženo již ve verzi FEC pro stacionární úlohy a je popsáno například v [6]. Matice  $\mathbf{G}$  je uložena ve formátu CSR (*Compressed Sparse by Rows*) a je sestavována podprogramem

```
subroutine FricBS(...).
```

Jak plyne z (2.20), struktura matice  $\mathbf{G}$  nedoznala oproti původní stacionární formulaci žádné změny. Dynamická verze se od stacionárního kódu popisovaného v [6] liší jen zacházením s hodnotami okrajových podmínek, což je již obecně popsáno v [10].

Ve formulaci (2.21) se nově objevuje člen  $\mathbf{h}^k$ . Přitom ale platí, že  $\mathbf{h}^k = \mathbf{G}\mathbf{y}^{k-1}$ , kde  $\mathbf{y}^{k-1}$  je vektor řešení spočtený v předchozím časovém kroku. Vektor  $\mathbf{h}^k$  tedy není nutné sestavovat po elementech, ale lze jej v každém časovém kroku  $k$  získat pouhým vynásobením matice  $\mathbf{G}$  (ta se s časem nemění) a vektoru předchozího řešení.

#### Vstupní a výstupní data

Program FEC po překladu tvoří jediný spustitelný soubor fec06.x, který se volá bez dalších parametrů. Výsledkem běhu programu je řada výstupních souborů \*.gmv.kkkk v adresáři ./gmv/, kde kkkk je číslo časového kroku. Tyto výstupní soubory jsou určeny pro vizualizaci programem GMV, (*General Mesh Viewer*), viz [11]. Soubor obsahuje popis sítě konečných prvků a vektor posunutí v každém vrcholu sítě. Geometrie oblasti je deformována podle spočtených hodnot řešení, tj. souřadnice vrcholů sítě jsou posunuty o spočtený vektor posunutí přenásobený konstantou DisplacementMagnification, která je předepsána v podprogramu OUT2GMV3(...).

Zadání časového intervalu a délky kroku  $\tau$  a další parametry běhu programu jsou zadány v souborech `TIME.IN` a `SOLPAR.IN`. V `SOLPAR.IN` je zejména zadáván parametr  $\rho$  Uzawova algoritmu. Zahrnutí vazkopružného modelu stejně jako zahrnutí třecích sil jsou volitelné a lze je v `TIME.IN` zapnout či vypnout.

`bTmDiscretisation` – určuje chování programu:

- 0 výpočet stacionárního řešení, tj. žádná časová diskretizace, hodnoty okrajových podmínek se uvažují v čase `dTime=dTmStart`
- 1 výpočet kvazistacionární úlohy, tj. v modelu se neuvažuje setrvačný ani tlumící člen
- 2 výpočet dynamické úlohy
- 1 žádný výpočet (načte datové struktury a exportuje síť ve výstupním formátu, bez hodnot řešení)

`bFrictionTreatment` – 2 pro zahrnutí (Trescova) tření, 0 pro model bez tření, (1 pro původní stacionární formulaci tření, experimentální možnost)

`bViscoelasticity` – 1 pro vazkopružný model, 0 pro elastický model

`dTmStart` – začátek časového intervalu

`dTmEnd` – konec časového intervalu

`dTimeStep` – velikost časového kroku

Geometrická a materiálová data jsou programem načtena ze třech zdrojových souborů: `USR_FIRST.TXT`, `USR_MESH.TXT` a `USR_MATERIAL.TXT`. Soubor `USR_FIRST.TXT` se načítá jako první a obsahuje informace o rozměrech zadávaných datových polí. Nejdůležitější položky jsou (zápis v souboru odpovídá názvům proměnných ve zdrojovém kódu):

`NoTetras` – počet elementů sítě (čtyřstěnů)

`NoVertices` – počet vrcholů

`NoBoundaries` – počet stěn elementů na hranici oblasti

`NoSubdomains` – počet těles, resp. oblastí s různými materiálovými vlastnostmi

`NoContactBoundaries` – počet (dvojic) stěn elementů na kontaktní hranici

`NoContactPairs` – počet dvojic vrcholů na kontaktní hranici (tj. dvojic, na kterých je realizována kontaktní podmínka nepronikání)

V souboru `USR_MATERIAL.TXT` jsou předepsány následující položky. Jejich zápis odpovídá datové struktuře ve zdrojovém kódu `FEC`, index `I` odpovídá číslu podoblasti.

`(Weight(J,I), J=1,3)`

vektor síly působící na jednotku hmotnosti

`EStiff(I), SigStiff(I)`

Youngův modul pružnosti  $E_0$  a Poissonova konstanta  $\sigma_0$

`EVisco(I), SigVisco(I)`

konstanty  $E_1$  a  $\sigma_1$  udávající vazkou odezvu tenzoru napětí

`RhoDensity(I), AlphaDamping(I)`

materiálová hustota  $\rho$  a tlumící koeficient  $\alpha$

Hodnoty polí popisujících geometrii sítě jsou zadány v souboru `USR_MESH.TXT`. Zápis položek opět odpovídá zápisu uvnitř zdrojového kódu:

$VX(I), VY(I), VZ(I)$   
 souřadnice vrcholu s indexem  $I, I=1..NoVertices$

$(ITNODE(J, I), J=1, 5)$   
 indexy vrcholů ( $J=1..4$ ) čtyřstěnu  $I, I=1..NoTetras$ ;  
 číslo podoblasti ( $J=5$ ) ke které čtyřstěn náleží

$(IBNDRY(J, I), J=1, 5)$   
 indexy vrcholů ( $J=1..3$ ) stěny  $I, I=1..NoBoundaries$ ;  
 typ okrajové podmínky ( $J=4$ ) zadané na této stěně:

- 1 homogenní (nulová) Neumannova o.p.
- 2 nehomogenní Neumannova o.p., tj. předepsané zatížení
- 1 Dirichletova o.p., tj. předepsané posunutí
- 2 jednostranný kontakt
- 3 oboustranný kontakt
- 0 vnitřní stěna, tj. stěna mezi oblastmi, které jsou součástí stejného tělesa (ale liší se např. materiálovými vlastnostmi)

$(ICCB(J, I), J=1, 3)$   
 indexy stěn ( $J=1, 2$ ) přiléhajících k sobě na kontaktní hranici,  $I=1..NoContactBoundaries$

$(ICP(J, I), J=1, 2)$   
 indexy vrcholů tvořících kontaktní dvojici,  $I=1..NoContactPairs$

$CPX(I), CPY(I), CPZ(I)$   
 souřadnice normálového vektoru příslušejícího ke kontaktní dvojici,  $I=1..NoContactPairs$

$(ICCB2(J, I), J=1, 3)$   
 $(ICP2(J, I), J=1, 2)$   
 $CPX2(I), CPY2(I), CPZ2(I)$   
 obdobné indexy stěn, indexy vrcholů a souřadnice normálového vektoru, pro oboustranný kontakt

Jednoduché vzorové příklady vstupních dat jsou součástí zdrojového kódu FEC.

## 4 Shrnutí

Předložená zpráva popisuje formulaci problému kontaktu několika těles, modelovaných v lineární vazkopružnosti, s Trescovým modelem tření. Úloha byla diskretizována v čase pomocí semi-implicitního schématu a v prostoru metodou konečných prvků. V předložené zprávě popisujeme jednoduchý způsob, jakým byla modifikována implementace programu FEC popsaná v předchozí zprávě [10] tak, aby zahrнула jak vazkopružný model tak nestacionární model tření.

Předložená studie je výzkumnou zprávou projektu MPO ČR č. FT-TA/087 za rok 2007.

## Literatura

- [1] Z. Kestřánek, “Numerical analysis of the contact problem, comparison of methods for finding the approximate solution,” Tech. Rep. No. 648, Institute of Computer Science, AS CR, 1995.
- [2] Z. Kestřánek and J. Nedoma, “The conjugate projected gradient method – numerical tests and results,” Tech. Rep. No. 677, Institute of Computer Science, AS CR, 1996.
- [3] J. Nedoma and Z. Kestřánek, “Preconditioners for contact problems in elasticity,” Tech. Rep. No. 739, Institute of Computer Science, AS CR, 1998.
- [4] Z. Kestřánek and J. Nedoma, “FEC - a code for contact problems in thermoelasticity,” Tech. Rep. No. 740, Institute of Computer Science, AS CR, 1998.
- [5] Z. Kestřánek, *Numerical analysis of the 3D contact problem of Signorini type with friction in thermoelasticity. H-version of the finite element approximation*. PhD thesis, Technical University Prague, 1999.
- [6] Z. Kestřánek, “Description of the finite element program for contact problem,” Tech. Rep. No. 831, Institute of Computer Science, AS CR, 2001.
- [7] J. Nedoma, J. Stehlík, M. Bartoš, F. Denk, V. Džupa, J. Fousek, I. Hlaváček, Z. Klézl, and I. Květ, *Biomechanika lidského skeletu a umělých náhrad jeho částí*. Universita Karlova v Praze – Nakladatelství Karolinum, 2006.
- [8] J. Nedoma and J. Daněk, “Dynamic and quasi-static FE simulations of the function of human joints and their total replacements based on the mortar approach,” Tech. Rep. No. 1005, Institute of Computer Science, AS CR, 2007.
- [9] J. Nedoma and J. Daněk, “Dynamic and quasi-static simulations of the function of knee joint and its artificial replacements in 2D and 3D,” in preparation.
- [10] M. Lanzendörfer, “Modifikace FEC – kód pro dynamickou kontaktní úlohu v lineární pružnosti,” Tech. Rep. No. 980, Institute of Computer Science, AS CR, 2006.
- [11] L. A. National Laboratory, “The general mesh viewer.” <http://www-xdiv.lanl.gov/XCM/gmv/GMVHome.html>.
- [12] M. Lanzendörfer and J. Daněk, “Aplikace FEC v biomechanice kolenního kloubu,” Tech. Rep. No. 1006, Institute of Computer Science, AS CR, 2007.