Mortarové konečné prvky a jejich aplikace na kontaktní úlohy

Hlaváček, Ivan
2007

Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Mortarové konečné prvky a jejich aplikace na kontaktní úlohy

I.Hlaváček

Technical report No. 993

May 2007

Pod Vodárenskou věží 2, 182 07 Prague 8, phone: +420 266 051 111, fax: +420 286 585 789,
e-mail:ics@cs.cas.cz

Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Mortarové konečné prvky a jejich aplikace na kontaktní úlohy

I.Hlaváček

Technical report No. 993

May 2007

Abstrakt:

Uvažujeme jednostranný kontakt dvou pružných rovinných těles s nulovým třením. Tělesa zaujímají omezené oblasti s polygonální hranicí, na nichž definujeme triangulace se standardními prostory lineárních konečných prvků. Na společné kontaktní hranici se však uzly obou triangulací neztotožňují.

Podmínka nepronikání na této hranici se vyjádří ve slabém (integrálním) smyslu pomocí aproximovaných Lagrangeových multiplikátorů. K tomu účelu se využívá tzv. duální báze z nespojitých po částech lineárních funkcí a transformace báze standardních konečných prvků na obou triangulacích.

Po nasazení algoritmu primárně duální metody aktivních množin (PDAS) lze pak snadno eliminovat Lagrangeovy multiplikátory.

Kromě řešení koercivních problůmů je navržen i postup pro semikoercivní úlohy, kdy pouze jedno z těles je upevněno, zatímco druhé těleso se může posunovat v daném směru jako tuhý celek.

Keywords:
Jednostranný kontakt v rovinné pružnosti, metoda konečných prvků, mortarové prvky, metoda aktivních množin, semikoercivní problémy

Úvod

Aplikace mortarových konečných prvků pro úlohy jednostranného kontaktu se opírá o vývoj a užití těchto prvků v metodě rozkladu oblasti (non-overlapping domain decomposition). Jednotlivá tělesa v kontaktu hrají roli podoblastí v metodě rozkladů oblasti [3], [10]-[12]. Jde o novou třídu metod rozkladu oblasti, která se často nazývá „nekonformní“ či „mortarové“ metody [14]. Na rozdíl od konformních metod rozkladu oblasti, podoblasti jsou nyní „triangulovány“ nezávisle, t.zn. že *sítě obecně nesouhlasí na společných hranicích* (interfaces) mezi podoblastmi. Generování triangulací je pak více flexibilní a může být jednodušší na některých podoblastech. Dovoluje lokální zjemňování pouze na některých podoblastech.

Mortarová metoda poskytuje možnost „slepit“ aproximace řešení na jednotlivých podoblastech tím, že klade podmínky spojitosti na společných hranicích ve slabém smyslu.

V úlohách jednostranného kontaktu je tato podmínka spojitosti mezi tělesy nahrazena na kontaktní hranici podmínkou nepronikání, která se však vyjadřuje opět pouze slabší integrální podmínkou [10]-[12].

V této práci se omezíme na kontaktní úlohy v rovinné pružnosti s nulovým třením. V 1. kapitole uvažujeme tzv. koercivní případ kontaktu dvou těles, kdy obě tělesa jsou na části své hranice upevněna. Nejprve definujeme na spojité úrovni smíšenou variační formulaci na základě problému sedlového bodu a uvedeme souvislost mezi sedlovým bodem a tzv. slabým řešením primární variační formulace. Poté zavedeme triangulace oblastí, jejichž uzly se neztotožňují na společné kontaktní hranici. Pro aproximace Lagrangeových multiplikátorů užijeme tzv. *duální bázi*, která je biortogonální vzhledem k standardní bázi spojitých a po částech lineárních funkcí, tj. stop standardního prostoru konečných prvků na oblasti Ω^1. Tato duální báze se skládá z nespojitých po částech lineárních funkcí [10], [19].

Integrální („změkčená“) podmínka nepronikání (1.19) však svazuje obě nekonformní triangulace, s nesouhlasícími uzly na kontaktní hranici. Abychom tuto podmínku vyjádřili pouze pomocí stop konečných prvků z oblasti Ω^1, provedeme *transformaci celkové báze* (viz [20], [10, Section 5]. Tím také umožníme snadnou eliminaci Lagrangeových multiplikátorů. V nové bázi pak se problém sedlového bodu zjednoduší v maticovém tvaru na soustavu jedné rovnice (1.33) s trojicí jednoduchých komplementárních podmínek (1.34).

Na řešení této soustavy se hodí algoritmus primárně duální metody aktivních množin PDAS (viz [8] a literaturu tam uvedenou). V odstavci 1.3 popíšeme podrobně iterace tohoto algoritmu, které dále zjednodušíme eliminací Lagrangeových multiplikátorů.

V krátké kapitole 2 se věnujeme jedné třídě semikoercivních úloh, kdy pouze jedno z obou těles je upevněno, zatímco druhé těleso se může posouvat v daném směru jako tuhý celek. Řešení takových úloh je navrženo na základě koncepce tzv. „magnetického šroubu“ (viz např. [8, kap. 1.3] a článek [9]). Tím se převede úloha na problém koercivního typu, jehož řešení je popsáno v předchozí kapitole.

1 Kontaktní úloha s nulovým třením v rovinné pružnosti. Koercivní případ

Nechť Ω^1 a Ω^2 jsou rovinné omezené oblasti s Lipschitzovskou polygonální hranicí $\partial\Omega^1$, resp. $\partial\Omega^2$. Nechť

$$\partial\Omega^i = \Gamma_u^i \cup \Gamma_P^i \cup \Gamma_c, \quad i = 1, 2\,,$$

kde

$$\Gamma_c = \partial\Omega^1 \cap \partial\Omega^2\,,$$

je rozklad hranic na vzájemně disjunktní části takové, že

$$\begin{aligned} &\text{meas} \quad \Gamma_u^i > 0, \quad i = 1, 2\,, \\ &\text{meas} \quad \Gamma_c > 0\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Na části Γ_u^i je těleso Ω^i upevněno, tzn. vektor posunutí

$$u^i = (u_1^i, u_2^i)^T = 0 \quad \text{na } \Gamma_u^i\,. \tag{1.2}$$

Na Γ_P^i jsou zadány povrchové síly P^i, tzn.

$$\tau_{jk}^i n_k^i = P_j^i, \quad i,j = 1,2\,. \tag{1.3}$$

Část Γ_c je kontaktní hranice, na které platí:
podmínka *nepronikání*

$$[u_n] = u^1 \cdot n^1 + u^2 \cdot n^2 \leq 0\,, \tag{1.4}$$

komplementární podmínky

$$T_n(u^i) \equiv \tau_{kj}^i n_k^i n_j^i \leq 0\,, \quad [u_n]T_n(u^i) = 0\,, \tag{1.5}$$

kde n^i značí jednotkovou vnější normálu vzhledem k tělesu Ω^i, a podmínka nulového tření

$$T_t(u^i) \equiv \tau_{kj}^i n_j^i t_k^i = 0 \tag{1.6}$$

kde t^i značí jednotkový tečný vektor ($t^i = (-n_2^i, n_1^i)^T$).

Zde i v dalším užíváme sčítací konvenci, tzn. sčítá se přes opakované dolní indexy v rozmezí $\{1,2\}$.

Pro koeficienty zobecněného Hookeova zákona

$$\tau_{kj}^i(u^i) = c_{kjmn}^i \varepsilon_{mn}(u^i) \quad i = 1,2 \tag{1.7}$$

kde

$$\varepsilon_{mn}(u^i) = (\partial u_m^i/\partial x_n + \partial u_n^i/\partial x_m)/2\,,$$

předpokládáme standardní podmínky omezenosti, symetrie a positivní definitnosti:

$$\begin{aligned} c_{kjmn}^i &\in L^\infty(\Omega^i)\,. \\ c_{kjmn}^i = c_{jkmn}^i &= c_{mnkj}^i\,, \\ c_{kjmn}^i(x)\xi_{kj}\xi_{mn} &\geq c_o\xi_{pq}\xi_{pq} \end{aligned}$$

pro všechny symetrické (2×2) matice (ξ_{pq}) a skoro všechna $x \in \Omega^i$.

Tensor napětí τ_{jk}^i splňuje v každém z těles Ω^i podmínky rovnováhy

$$\partial\tau_{jk}^i/\partial x_k + F_j^i = 0 \quad i = 1,2\,, \tag{1.8}$$

kde $F_j^i \in L^2(\Omega^i)$ jsou složky dané objemové síly.

Zavedeme bilineární formy

$$a^i(u^i, v^i) = \int_{\Omega^i} c_{jkmn}^i \varepsilon_{jk}(u^i)\varepsilon_{mn}(v^i)dx, \quad i = 1,2\,,$$

a lineární funcionály

$$\begin{aligned} S^i(v^i) &= \int_{\Omega^i} F^i \cdot v^i dx + \int_{\Gamma_P^i} P^i \cdot v^i ds, \quad i = 1,2\,. \\ a(u,v) &= a^1(u^1,v^1) + a^2(u^2,v^2), \quad \text{kde } u = (u^1,u^2)^T,\ v = (v^1,v^2)^T\,, \\ S(v) &= S^1(v^1) + S^2(v^2)\,. \end{aligned}$$

Definujme prostory

$$\begin{aligned} V^i &= \{v^i \in [H^1(\Omega^i)]^2 : v^i = 0 \text{ na } \Gamma_u^i\}, \quad i = 1,2\,. \\ \mathbb{V} &= V^1 \times V^2\,. \end{aligned}$$

Označme W prostor stop funkcí z V^1 restringovaných na Γ_c, a definujme konvexní kužel Lagrangeových multiplikátorů

$$M^+ = \{\mu \in W^* \text{ (duál k } W) : \mu \geq 0\}\,,$$

(to jest pro duální párování platí

$$\langle \mu, w \rangle_{\Gamma_c} \geq 0 \text{ pro všechna } w \in W^+ \,,$$

kde

$$W^+ = \{w \in W : w \cdot n^1 \geq 0\}$$

a bilineární formu

$$b(\mu, v) = \langle \mu \cdot n^1, [v_n] \rangle_{\Gamma_c} \tag{1.9}$$

pro $\mu \in W^*$, $v \in \mathbb{V}$.

Konečně definujeme funkcionál - *Lagrangián*

$$\mathcal{L}(v, \mu) = a(v, v)/2 - S(v) + b(\mu, v)$$

a *problém sedlového bodu* : najít dvojici $(w, \lambda) \in \mathbb{V} \times M^+$ takovou že

$$\mathcal{L}(w, \mu) \leq \mathcal{L}(w, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda) \tag{1.10}$$

platí pro všechna $\mu \in M^+$ a $v \in \mathbb{V}$.

Jako *slabé řešení* okrajové úlohy (1.8)- (1.7) s okrajovými podmínkami (1.2)-(1.6) definujeme funkci

$$u = \arg\min_{v \in \mathbb{K}} \{a(v, v)/2 - S(v)\} \,, \tag{1.11}$$

kde

$$\mathbb{K} = \{v \in \mathbb{V} : [v_n] \leq 0 \text{ na } \Gamma_c\} \,.$$

O souvislosti sedlového bodu (1.10) a slabého řešení platí následující věta.

Věta 1.1 *Za předpokladu (1.1) existuje právě jeden sedlový bod $(w, \lambda) \in \mathbb{V} \times M^+$. Přitom $w = u$, tj. první složka sedlového bodu je řešení úlohy (1.11) a*

$$\lambda_j = -\tau^1_{jk}(u^1) n^1_k, \quad j = 1, 2 \,.$$

Důkaz je analogický důkazu v [6, Section 9], kde je uvažován podobný problém pro jednostranný kontakt pružného tělesa Ω^1 s dokonale tuhým tělesem Ω^2, tj. problém Signoriniho. □

Poznámka 1.1 Zřejmě platí

$$\begin{aligned} T_n(u^1) &= T_n(u^2), \quad \textit{tedy} \\ \lambda \cdot n^1 = \lambda \cdot n^2 &= -T_n(u^1) = -T_n(u^2) \,. \end{aligned}$$

□

Problém sedlového bodu (1.10) je ekvivalentní soustavě

$$a(u, v) + b(\lambda, v) = S(v) \qquad \forall v \in \mathbb{V} \,, \tag{1.12}$$

$$b(\mu - \lambda, u) \leq 0 \qquad \forall \mu \in M^+ \,, \tag{1.13}$$

píšeme-li (u, λ) místo (w, λ) pro $u \in \mathbb{V}$ a $\lambda \in M^+$.

1.1 Diskretizace problému sedlového bodu mortatovou metodou konečných prvků

Na každé polygonální oblasti Ω^i, $i = 1, 2$ uvažujeme triangulaci $\mathcal{T}^i_{h_i}$, kde h_i je délka největší strany v triangulaci $\mathcal{T}^i_{h_i}$. Nechť „koncové body“ Γ^i_u, Γ_c jsou uzly triangulací,

$$\overline{\Gamma}^i_u \cap \Gamma_c = \emptyset, \quad i = 1, 2$$

avšak uzly $\mathcal{T}^1_{h_1}$ a $\mathcal{T}^2_{h_2}$ se **neztotožňují** na společné hranici Γ_c.

Vzniká pak otázka, jakou diskretizaci zvolit pro formu $b(\mu, v)$ – viz (1.9), to znamená, jak aproximovat konvexní kužel M^+. Ukazuje se, že je vhodné použít tzv. *duální bázi* z nespojitých po částech lineárních funkcí [10], [19]. Definujme nejprve

$$M_h = \operatorname{span}\{\psi_i e_k, i = 1, \ldots, N_M(h); k = 1, 2\},$$

kde $N_M(h)$ je počet uzlů na $\mathcal{T}^1_{h_1} \cap \Gamma_c$, e_k jsou složky jednotkové kartézské báze a $\psi_i(s)$ jsou nespojité bázové funkce po částech lineární takové, že $\psi_i(s_i) = 2$ (v uzlu $s_i \in \Gamma_c$) a

$$\psi_i(s_{i-1}) = \psi_i(s_{i+1}) = -1, \quad \psi_i(s) = 0 \quad \text{pro } s \in \Gamma_c \backslash [s_{i-1}, s_{i+1}], \quad 2 \leq i \leq N_M - 1\,.$$

Funkce ψ_1 a ψ_{N_M} jsou modifikovány a to pouze v krajních intervalech $[s_0, s_1]$, resp. $[s_{N_M}, s_{N_M+1}]$, kde nabývají konstantní hodnoty 1. (Zde s_0 a s_{N_M+1} jsou koncové body Γ_c.) Výhodou této duální báze je, že je *biortogonální* vzhledem k standardní spojité po částech lineární bázi $\{\varphi_j\}$ $j = 1, \ldots, N_M(h)$, na $\mathcal{T}_{h_1} \cap \Gamma_c$, tj. platí

$$\int_{\Gamma_c} \varphi_j \psi_i ds = \delta_{ij} \int_{\Gamma_c} \varphi_j ds\,. \tag{1.14}$$

Pak definujeme množinu

$$M_h^+ = \{\mu_h \in M_h : \langle \mu_h, v_h \rangle_{\Gamma_c} \geq 0 \quad \forall v_h \in W_h^+\}\,.$$

kde

$$W_h^+ = \{v_h \in W_h : v_h \cdot n^1 \geq 0\}$$

a W_h je prostor stop funkcí z V_h^1 na Γ_c.

Zde V_h^i značí standardní prostory lineárních spojitých konečných prvků, $V_h^i \subset V^i$, $i = 1, 2$.

Dá se dokázat (viz [11, Lemma 3.1]), že je-li Γ_c úsečka (n^1 konstantní), pak

$$M_h^+ = \left\{ \mu_h = \sum_{i=1}^{N_M(h)} \alpha_i \psi_i : \alpha_i = \alpha_i^n n^1,\, \alpha_i^n \in \mathbb{R}\,, \alpha_i^n \geq 0,\, i \leq N_M(h) \right\}.$$

Po diskretizaci systému (1.12)-(1.13) budeme uvažovat systém

$$a(u_h, v_h) + b(\lambda_h, v_h) = S(v_h) \qquad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \equiv V^1_{h_1} \times V^2_{h_2}\,, \tag{1.15}$$

$$b(\mu_h - \lambda_h, u_h) \leq 0 \qquad \forall \mu_h \in M_h^+\,, \tag{1.16}$$

pro aproximovaný sedlový bod $(u_h, \lambda_h) \in \mathbb{V}_h \times M_h^+$.

Podmínka (1.16) je ekvivalentní dvěma podmínkám:

$$b(\lambda_h, u_h) = 0\,, \tag{1.17}$$

$$b(\mu_h, u_h) \leq 0 \qquad \forall \mu_h \in M_h^+\,. \tag{1.18}$$

Vskutku, (1.17) dostaneme z (1.15) volbou $\mu_h = 0$ a $\mu_h = 2\lambda_h$; podmínka (1.18) pak plyne po dosazení (1.17) okamžitě.

Není těžké odvodit, že (1.18) platí právě když

$$\int_{\Gamma_c} [u_{h_n}] \psi_j ds = \langle \psi_j, [u_{h_n}] \rangle_{\Gamma_c} \leq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, N_M(h)\,. \tag{1.19}$$

To je „změkčená“ integrální podmínka nepronikání (1.4).

Existence a jednoznačnost řešení úlohy (1.15)-(1.16) vyplývá např. z diskrétní „inf-sup“ podmínky (Babušky a Brezziho): existuje $\beta > 0$ nezávislá na h_1 tak, že

$$\inf_{\mu_h \in \mathbb{W}_h^1} \sup_{v_h \in \mathbb{V}_h} \frac{b(\mu_h, v_h)}{\|\mu_h\|_{-1/2, \Gamma_c} \|v_h\|_1} \geq \beta\,. \tag{1.20}$$

kde $W_h^1 \equiv$ prostor stop normálové složky $(v_h^1 \cdot n^1)$ na Γ_c a

$$\|v_h\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{2} \|v_h^i\|^2_{1, \Omega^i} \right)^{1/2}.$$

O důkazu podmínky (1.20) za předpokladu, že Γ_c je úsečka a $\Gamma_c \cap \Gamma_u^1 = \emptyset$, je pojednáno v [7, Proposition 3.5].

1.2 Transformace báze konečných prvků

Rozložme množinu všech uzlů – tj. vrcholů triangulace $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}^1_{h_1} \cup \mathcal{T}^2_{h_2}$ na 3 disjunktní části S, M a N. Nechť

S	je množina vrcholů na $\mathcal{T}^1_{h_1} \cap \Gamma_c$,
M	je množina vrcholů na $\mathcal{T}^2_{h_2} \cap \Gamma_c$,
N	je množina vrcholů ostatních.

Podmínka (1.19) svazuje uzly z množin S a M. Abychom tuto podmínku vyjádřili pouze pomocí bázových funkcí spojených s vrcholy z množiny S, provedeme transformaci báze $\varphi = (\varphi_N, \varphi_M, \varphi_S)$ (viz [20], [10, Section 5]). Zároveň umožníme snadnou eliminaci Lagrangeových multiplikátorů λ_h.

Podmínka (1.15) v maticovém tvaru zní

$$A_h u_h + B_h \lambda_h = f_h \,. \tag{1.21}$$

Rozložíme-li matice i vektory na bloky podle množin N, M, S. Tak dostaneme rovnici

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{NN} & \mathcal{A}_{NM} & \mathcal{A}_{NS} & 0 \\ \mathcal{A}_{MN} & \mathcal{A}_{MM} & \mathcal{A}_{MS} & -\mathcal{M}^T \\ \mathcal{A}_{SN} & \mathcal{A}_{SM} & \mathcal{A}_{SS} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_N \\ u_M \\ u_S \\ \lambda_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_N \\ f_M \\ f_S \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

kde $\mathcal{M}$ je bloková matice s bloky

$$\mathcal{M}_{pq} = \left(\int_{\Gamma_c} \psi_p \varphi_q ds \right) Id_2 \quad p \in S,\; q \in M \,, \tag{1.23}$$

$Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a D je diagonální (bloková) matice, s diagonálními bloky

$$D_{pp} = \left(\int_{\Gamma_c} \varphi_q \psi_p ds \right) Id_2 \,, \quad p \in S,\; (\text{tj. } p = 1, \ldots, N_M) \,, \tag{1.24}$$

v důsledku biortogonality duální báze $\{\psi_i\}$ vzhledem ke standardní spojité po částech lineární bázi $\{\varphi_j\}$.

Zavedeme novou matici

$$\hat{\mathcal{M}} := D^{-1} \mathcal{M} \tag{1.25}$$

a modifikovanou bázi

$$\phi := \begin{pmatrix} \phi_N \\ \phi_M \\ \phi_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & Id & \hat{\mathcal{M}}^T \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_N \\ \varphi_M \\ \varphi_S \end{pmatrix} \equiv Q \varphi \,. \tag{1.26}$$

Potom pro vektor koeficientů $\hat{u}_h$ vzhledem k transformované bázi ϕ a vektor koeficientů u_h v původní bázi φ platí

$$u_h = Q^T \hat{u}_h \,. \tag{1.27}$$

Poznamenejme, že transformaci (1.26) lze provést lokálně a matice $\hat{\mathcal{M}}$ je řídká.

Modifikovaná matice tuhosti $\hat{A}_h$ spojená s novou bází ϕ je pak

$$\begin{aligned} \hat{A}_h &= Q A_h Q^T = \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{NN} & \mathcal{A}_{NM} + \mathcal{A}_{NS} \hat{\mathcal{M}} & \mathcal{A}_{NS} \\ \mathcal{A}_{MN} + \hat{\mathcal{M}}^T \mathcal{A}_{SN} & \mathcal{A}_{MM} + \mathcal{A}_{MS} \hat{\mathcal{M}} + \hat{\mathcal{M}}^T \mathcal{A}_{SM} + \hat{\mathcal{M}}^T \mathcal{A}_{SS} \hat{\mathcal{M}} & \mathcal{A}_{MS} + \hat{\mathcal{M}}^T \mathcal{A}_{SS} \\ \mathcal{A}_{SN} & \mathcal{A}_{SM} + \mathcal{A}_{SS} \hat{\mathcal{M}} & \mathcal{A}_{SS} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.28}$$

Vektor f_h pravých stran je třeba modifikovat na

$$\hat{f}_h = Qf_h = \begin{pmatrix} f_N \\ f_M + \hat{\mathcal{M}}^T f_s \\ f_S \end{pmatrix} . \tag{1.29}$$

Pro veličinu $[u_{hn}]$ dostaneme v transformované bázi

$$\begin{aligned} [u_{hn}] &= \sum_{p\in S} \hat{u}_p[\phi_{pn}] + \sum_{q\in M} \hat{u}_q[\phi_{qn}] = \\ &= \left(\sum_{q\in M} \hat{u}_q \left(-\varphi_q + \sum_{r\in S} \hat{\mathcal{M}}_{rq}\varphi_r \right) + \sum_{p\in S} \hat{u}_p\varphi_p \right) \cdot n_p^1 . \end{aligned} \tag{1.30}$$

Znásobíme-li (1.30) funkcí ψ_p, $p \in S$ a zintegrujeme přes Γ_c, vyruší se díky biortogonalitě (1.14) a definici (1.26) koeficienty při $\hat{u}_q$ pro $q \in M$. Pak „změkčená“ podmínka nepronikání (1.19) bude mít jednoduchý tvar

$$\hat{u}_{n,p} \equiv (n_p^1)^T D_{pp}\hat{u}_p \le 0 \quad \forall p \in S . \tag{1.31}$$

Snadno odvodíme, že také matice $\hat{B}_h$ v nové bázi bude zjednodušena neboť

$$\hat{B}_h = QB_h = \begin{pmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & Id & \mathcal{M}^T \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathcal{M}^T \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D \end{pmatrix} . \tag{1.32}$$

Řešíme pak modifikovanou úlohu

$$\hat{A}_h\hat{u}_h + \hat{B}_h\lambda_h = \hat{f}_h \tag{1.33}$$

s trojicí komplementárních podmínek

$$\hat{u}_{n,p} \le 0, \quad \lambda_{n,p} \ge 0, \quad \lambda_{n,p}\hat{u}_{n,p} = 0 \quad \forall p \in S \tag{1.34}$$

a podmínkou nulového tření

$$\lambda_{t,p} = 0, \quad \forall p \in S , \tag{1.35}$$

kde

$$\lambda_{n,p} = (n_p^1)^T D_{pp}\lambda_p, \quad (\lambda_p \in \mathbb{R}^2) \tag{1.36}$$

$$\lambda_{t,p} = \lambda_p - (\lambda_p \cdot n_p^1)n_p^1 = (\lambda_p \cdot t_p)t_p \tag{1.37}$$

Poznámka 1.2 Protože platí podle (1.14)

$$a_p := \int_{\Gamma_c} \varphi_p ds > 0 \quad \forall p \in S ,$$

máme

$$\lambda_{n,p} = a_p(\lambda_p \cdot n_p^1) \ge 0 \Leftrightarrow \lambda_p \cdot n_p^1 \ge 0 ,$$

což odpovídá v definici množiny M_h^+ vztahu $\alpha_p^n \ge 0$.

1.3 Algoritmus primárně duální metody aktivních množin

Na úlohu (1.33)-(1.35) můžeme aplikovat metodu PDAS (srv. [10], [8, kap. 1.1]). Pro jednoduchost označme uzlové parametry $\hat{u}_h$ jako vektor u, vektor uzlových parametrů λ_h jako λ,

$$y := (u, \lambda)^T .$$

Komplemetární podmínky (1.34) lze vyjádřit ekvivalentně jako

$$\lambda_{n,p} - (\lambda_{n,p} + \rho\hat{u}_{n,p})^+ = 0, \quad \forall p \in S , \tag{1.38}$$

kde ρ je libovolná kladná konstanta a $(\cdot)^+$ značí kladnou část. Na základě zobecněné Newtonovy iterační metody pro rovnici (1.38) se dá odvodit následující Algoritmus PDAS.

Algoritmus PDAS

Krok (0) Zvolme $y^0 = (u^0, \lambda^0)^T$ a $\rho \in (10^3, 10^4)$,

Krok (1) Známe-li y^k vypočteme aktivní a inaktivní množiny

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(y^k) &= \{p \in S : \lambda_{n,p}^k + \rho \hat{u}_{n,p}^k > 0\} \quad \text{(aktivní množina)}\,, && (1.39)\\ \mathcal{I}(y^k) &= \{p \in S : \lambda_{n,p}^k + \rho \hat{u}_{n,p}^k \le 0\} \quad \text{(inaktivní množina)}\,, && (1.40) \end{aligned}$$

Krok (2) Je-li $k \ge 1$ & $\mathcal{A}(y^k) = \mathcal{A}(y^{k-1})$, STOP.
Jinak jdeme na krok (3).

Krok (3) Řešíme pro $y^{k+1} \equiv (u^{k+1}, \lambda^{k+1})^T$ systém

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_h u^{k+1} + \hat{B}_h \lambda^{k+1} &= \hat{f}_h\,, \\ u_{n,p}^{k+1} = 0 & \qquad \forall p \in \mathcal{A}(y^k)\,, \\ \lambda_{n,p}^{k+1} = 0 & \qquad \forall p \in I(y^k)\,, \\ \lambda_{t,p}^{k+1} = 0 & \qquad \forall p \in S\,. \end{aligned} \tag{1.41}$$

(Připomeňme, že $u_{n,p}$, $\lambda_{n,p}$ a $\lambda_{t,p}$ jsou definovány podle vzorců (1.31), (1.36) a (1.37).)

Krok (4) Položíme $k = k + 1$ a jdeme na Krok (1).

Systém (1.41) lze dále *zjednodušit.* Podle (1.32) totiž

$$\hat{B}_h \lambda^{k+1} = (0, 0, D\lambda_S^{k+1})^T$$

a tedy λ_S^{k+1} můžeme eliminovat pomocí (1.28) a (1.29). Potom

$$\lambda_S^{k+1} = D^{-1}(f_S - \mathcal{A}_{SN} u_N^{k+1} - (\mathcal{A}_{SM} + \mathcal{A}_{SS}\hat{\mathcal{M}}) u_M^{k+1} - \mathcal{A}_{SS} u_S^{k+1}\,. \tag{1.42}$$

Dále je zřejmé, že podmínky $(1.41)_3$ a $(1.41)_4$ platí právě když

$$\lambda_p^{k+1} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{I}(y^k) \tag{1.43}$$

a

$$\lambda_{t,p}^{k+1} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{A}(y^k)\,.$$

Vynecháme-li horní index „$k+1$“ jde tedy o neznámý vektor

$$(u_N, u_M, u_x, u_{\mathcal{A}}, \lambda_{\mathcal{I}}, \lambda_{\mathcal{A}})^T\,, \tag{1.44}$$

kde jsme ještě rozložili u_S na $(u_{\mathcal{I}}, u_{\mathcal{A}})^T$, λ na $(\lambda_{\mathcal{I}}, \lambda_{\mathcal{A}})^T$ při zkráceném označení $\mathcal{I} \equiv \mathcal{I}(y^k)$, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(y^k)$.

Zavedeme ještě matici $N_{\mathcal{A}}$ typu $|\mathcal{A}| \times 2|\mathcal{A}|$, kde $|\mathcal{A}|$ značí počet uzlů v množině $\mathcal{A}(y^k)$,

$$N_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_p n_{p_1}^1 & a_p n_{p_2}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{1.45}$$

pro $p \in \mathcal{A}(y^k)$, kde (viz (1.14)

$$a_p = \int_{\Gamma_c} \varphi_p ds\,,$$

a matici $T_{\mathcal{A}}$ stejného typu pro $p \in \mathcal{A}(y^k)$:

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^1_{p_2} & n^1_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{1.46}$$

neboť příslušný tečný vektor $t^1_p = (-n^1_{p_2}, n^1_{p_1})^T$.

Snadno odvodíme, že např. platí

$$N_{\mathcal{A}} u_{\mathcal{A}} = 0 \Leftrightarrow a_p(n^1_p \cdot u_p) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{A}(y^k)\,,$$

což odpovídá podmínkám $(1.41)_2$.

Podobně

$$T_{\mathcal{A}} \lambda_{\mathcal{A}} = 0 \Leftrightarrow t^1_p \cdot \lambda_p = 0 \quad \forall p \in \mathcal{A}(y^k)\,.$$

Rozložíme ještě také matice $\hat{A}_h$ a D tak, aby odpovídaly rozkladu vektoru neznámých podle (1.44). Potom v důsledku (1.43) dostaneme systém (1.41) v ekvivalentním tvaru

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{NN} & \hat{A}_{NM} & \hat{A}_{N\mathcal{I}} & \hat{A}_{N\mathcal{A}} & 0 & 0 \\ \hat{A}_{MN} & \hat{A}_{MM} & \hat{A}_{M\mathcal{I}} & \hat{A}_{M\mathcal{A}} & 0 & 0 \\ \hat{A}_{\mathcal{I}N} & \hat{A}_{\mathcal{I}M} & \hat{A}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & \hat{A}_{\mathcal{I}\mathcal{A}} & D_{\mathcal{I}} & 0 \\ \hat{A}_{\mathcal{A}N} & \hat{A}_{\mathcal{A}M} & \hat{A}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & \hat{A}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} & 0 & D_{\mathcal{A}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Id_{\mathcal{I}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{\mathcal{A}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_N \\ u_M \\ u_{\mathcal{I}} \\ u_{\mathcal{A}} \\ \lambda_{\mathcal{I}} \\ \lambda_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_N \\ \hat{f}_M \\ \hat{f}_{\mathcal{I}} \\ \hat{f}_{\mathcal{A}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

Z tohoto systému však lze eliminovat $\lambda_{\mathcal{I}}$ i $\lambda_{\mathcal{A}}$. Vskutku, nejprve vynecháme 5.řádek i sloupec, neboť $\lambda_{\mathcal{I}} = 0$. Aplikujeme-li znásobení maticí $T_{\mathcal{A}}$ na 4.řádek, bude

$$T_{\mathcal{A}} D_{\mathcal{A}} \lambda_{\mathcal{A}} = 0\,, \tag{1.48}$$

neboť $T_{\mathcal{A}} \lambda_{\mathcal{A}} = 0$ a $D_{\mathcal{A}} \lambda_{\mathcal{A}}$ značí pouze násobení vektoru λ_p skalárem a_p v každém uzlu $p \in \mathcal{A}$. Tak dostaneme systém

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{NN} & \hat{A}_{NM} & \hat{A}_{N\mathcal{I}} & \hat{A}_{N\mathcal{A}} \\ \hat{A}_{MN} & \hat{A}_{MM} & \hat{A}_{M\mathcal{I}} & \hat{A}_{M\mathcal{A}} \\ \hat{A}_{\mathcal{I}N} & \hat{A}_{\mathcal{I}M} & \hat{A}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & \hat{A}_{\mathcal{I}\mathcal{A}} \\ T_{\mathcal{A}}\hat{A}_N & T_{\mathcal{A}}\hat{A}_{\mathcal{A}M} & T_{\mathcal{A}}\hat{A}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & T_{\mathcal{A}}\hat{A}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_N \\ u_M \\ u_{\mathcal{I}} \\ u_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_N \\ \hat{f}_M \\ \hat{f}_{\mathcal{I}} \\ T_{\mathcal{A}}\hat{f}_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

Odtud vypočteme u_N, u_M, $u_{\mathcal{I}}$, $u_{\mathcal{A}}$ a potom na základě (1.42) a (1.28), (1.29)

$$\lambda_p = a_p^{-1}(f_p - \mathcal{A}_{pN} u_N - (\mathcal{A}_{pM} + \mathcal{A}_{pS}\hat{\mathcal{M}}) u_M - \mathcal{A}_{pS} u_S) \quad \forall p \in \mathcal{A}\,. \tag{1.50}$$

2 Semikoercivní kontaktní úlohy v rovině

Nechť nyní pouze těleso Ω^1 je upevněno, zatímco těleso Ω^2 se může posunovat jako tuhý celek v daném směru (srv. [8, kap. 1.2] a také článek [9]). Abychom mohli pracovat s pozitivně definitní maticí tuhosti, budeme používat metodiku tzv. „magnetického šroubu“ (viz [9] a literaturu tam uvedenou).

Platí tedy disjunktní rozklady hranic

$$\begin{aligned} \partial\Omega^1 &= \Gamma^1_u \cup \Gamma^1_P \cup \Gamma_c\,, \\ \partial\Omega^2 &= \Gamma^2_o \cup \Gamma_P \cup \Gamma_c\,, \end{aligned}$$

kde $\Gamma_c = \partial\Omega^1 \cap \partial\Omega^2$, a předpokládáme, že

$$\text{meas}\,\Gamma^1_u > 0, \quad \text{meas}\,\Gamma^2_o > 0, \quad \text{meas}\,\Gamma_c > 0\,, \tag{2.1}$$

Γ_o^2 je rovnoběžná s osou x_2 a

$$n_2^1 > 0 \quad \text{na}\,\Gamma_c\,. \tag{2.2}$$

Na části Γ_o^2 platí okrajové podmínky

$$u_n^2 \equiv u_1^2 = 0\,, \quad T_t(u^2) = 0\,. \tag{2.3}$$

Definujeme podprostory virtuálních posunutí:

$$\begin{aligned} V^1 &= \{v \in [H^1(\Omega^1)]^2 : v = 0 \text{ na } \Gamma_u^1\}\,, \\ V^2 &= \{v \in [H^1(\Omega^2)]^2 : v \cdot n^2 = 0 \text{ na } \Gamma_o^2\}\,, \\ \mathbb{V} &= V^1 \times V^2\,, \end{aligned}$$

prostor posunutí tuhých těles Ω^1 a Ω^2:

$$\mathcal{R} = \{\rho = (\rho^1, \rho^2)^T : \rho^i = (a_1^i - b^i x_2, a_2^i + b^i x_1)^T,\, i = 1, 2\}\,.$$

Vzhledem k podmínkám (2.1)-(2.3) bude

$$\mathbb{V} \cap \mathcal{R} = \{\rho = (0, \rho^2)^T :\ \rho^2 = (0, a)^T\}\,, \tag{2.4}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Věta 2.1 *Nechť složka výslednice vnějších sil*

$$\mathcal{V}_2^2 := \int_{\Omega^2} F_2^2 dx + \int_{\Gamma_P^2} P_2^2 ds < 0\,.$$

Pak existuje právě jedno slabé řešení kontaktní úlohy, tj. řešení úlohy (1.11).

Důkaz – viz [8, Věta 1.6].

2.1 Diskretizace konečnými prvky

Provedeme triangulace $\mathcal{T}_{h_1}^1$ a $\mathcal{T}_{h_2}^2$ oblastí Ω^1 resp. Ω^2 jako v předchozím odstavci 1.1. Nechť „koncové“ body Γ_u^1, Γ_o^2 a Γ_c jsou uzly triangulací,

$$\Gamma_u^1 \cap \Gamma_c = \emptyset, \quad \Gamma_o^2 \cap \Gamma_c = \emptyset\,,$$

avšak uzly $\mathcal{T}_{h_1}^1$ a $\mathcal{T}_{h_2}^2$ se na společné hranici Γ_c *neztotožňují.*

Zvolíme nyní vhodný uzel $\alpha \in \Gamma_c \cap \mathcal{T}_{h_1}^1$, který bude hrát roli jakéhosi „magnetického šroubu“, v němž předpokládáme, že bude platit podmínka

$$[u_{hn}(\alpha)] = 0\,.$$

Definujeme pomocný podprostor

$$\mathbb{V}_h^\alpha = \{v_h \in \mathbb{V}_h : [v_{hn}(\alpha)] = 0\}\,,$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_h &= V_{h_1}^1 \times V_{h_2}^2\,. \\ V_{h_1}^1 &= \{v \in V^1 : v|_T \in [P_1(T)]^2\ \forall T \in \mathcal{T}_{h_1}^1\}\,, \\ V_{h_2}^2 &= \{v \in V^2 : v|_T \in [P_1(T)]^2\ \forall T \in \mathcal{T}_{h_2}^2\}\,, \end{aligned}$$

jsou standardní prostory lineárních konečných prvků.

Z předpokladu (2.2), inkluze $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$ a (2.4) pak vyplývá, že

$$\mathbb{V}_h^\alpha \cap \mathcal{R} = \{0\}\,,$$

(viz též [8, Lemma 1.10]).

Jsme pak v situaci koercivní úlohy a můžeme aplikovat postup z předchozí kapitoly, bereme-li všude místo $\mathbb{V}_h$ podprostor $\mathbb{V}_h^\alpha$. Příslušná matice tuhosti bude pozitivně definitní.

V každé k=té iteraci metody je vhodné vypočítat λ_α^{k+1} z podmíky celkové rovnováhy tělesa Ω^2 (srv. [8, (1.79)] nebo [9, (5.15)]). Tím je pak umožněno řešit systém $(1.41)_1$ separovaně na oblastech Ω^1 a Ω^2 (srv. [9, Section 6]).

Po ukončení algoritmu PDAS je ovšem nutné ověřit, zda jsme volili „magnetický šroub" v uzlu $\alpha \in \Gamma_c$ správně. Vyjde-li $\lambda_\alpha \cdot n^1(\alpha) < 0$, je nutné zvolit jiný uzel a celý postup opakovat.

Poděkování

Autor tímto děkuje za podporu uvedeného výzkumu grantem FT-TA/087 Ministerstva průmyslu a obchodu České republiky.

Literatura

[1] F. Ben Belgacem, Y. Maday: The mortar element method for three-dimensional finite elements. M^2AN Math. Model. Numer. Anal., 31 (1997), 289–302

[2] F. Ben Belgacem: The mortar finite element method with Lagrange multipliers. Numer. Math., 84 (1999), 173–197

[3] F. Ben Belgacem, P. Hild, P. Laborde: Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact, M^3AS Math. Models Methods Numerical Anal., 9 (1999), 287–303

[4] S. Brunssen, F. Schmid, M. Schäfer, B.I. Wohlmuth: A fast and robust method for contact problems by combining a primal-dual active set strategy and algebraic multigrid methods. Universität Stuttgart Preprint 2005/010. (`http://preprints.ians.uni-stuttgart.de`)

[5] J. Daněk, I. Hlaváček, J. Nedoma: Domain decomposition for generalized unilateral semi-coercive contact problem with given friction in elasticity. Math. Computers in Simulation 68 (2005), 271–299

[6] J. Haslinger, I. Hlaváček, J. Nečas: Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics. In: Handbook of Numerical Analysis, vol. IV (P.G. Ciarlet, J.-L.Lions eds.) North Holland, Amsterdam 1996

[7] P. Hild, P. Laborde: Quadratic finite element methods for unilateral contact problems. Appl. Numer. Math. 41 (2002), 401–421.

[8] I. Hlaváček: Primárně duální metoda aktivních množin pro jednostranný kontakt pružných těles s daným třením. Inst. Comput. Science, Academy of Sciences of the Czech Republic – Tech. Rep. No. 965 (March 2006)

[9] I. Hlaváček: Mixed finite element analysis of semi-coercive unilateral contact problems with given friction. Appl. Math. 52 (2007), 25–58

[10] S. Hüeber, B.I. Wohlmuth: A primal-dual active set strategy for non-linear multibody contact problems. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg, 194 (2005), 3147–3166

[11] S. Hüeber, B.I. Wohlmuth: An optimal a priori error estimate for non-linear multibody contact problems. SIAM J. Numer. Anal., 43 (2005), 156–173

[12] S. Hüeber, B.I. Wohlmuth: Mortar methods for contact problems. Tech. Rep. SFB 404, 2005–09

[13] Z. Kestřánek, J. Nedoma: The conjugate projected gradient method – numerical tests and results. Tech. Rep. V-677, ICS AS CR, Praha 1996

[14] C. Kim, R.D. Lazarov, J.E. Pasciak, P.S. Vassilevski: Multiplier spaces for the mortar finite element method in three dimensions. SIAM J. Numer. Anal., 39 (2001), 519–538

[15] T.A. Laursen: Computational contact and impact mechanics. Springer, 2002

[16] T.W. Mc Devitt, T.A. Laursen: A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. Int. J. Numer. Methods Eng., 48 (2000), 1525–1547

[17] P. Wriggers: Computational contact mechanics. John Wiley & Sons, 2002

[18] B.I. Wohlmuth: A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multipliers. SIAM J. Numer. Anal., 38 (2000), 989-1012

[19] B.I. Wohlmuth: Discretization methods and iterative solvers based on domain decomposition. Lect. Notes in Comp. Sci. Engrg. 17, Springer 2001

[20] B.I. Wohlmuth, R. Krause: Monotone methods on non-matching grids for nonlinear contact problems. SIAM J. Scient. Computing, 25 (2003), 324–347