



národní
úložiště
šedé
literatury

Zatížení trubkovité kosti vyplněné kostní dřevem: numerické řešení 2D modelové úlohy

Nedoma, Jiří
2006

Dostupný z <http://www.nusl.cz/ntk/nusl-37637>

Dílo je chráněno podle autorského zákona č. 121/2000 Sb.

Tento dokument byl stažen z Národního úložiště šedé literatury (NUŠL).

Datum stažení: 26.05.2024

Další dokumenty můžete najít prostřednictvím vyhledávacího rozhraní nusl.cz .



Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

**Zatížení trubkovité kosti vyplněné
kostní dřeví: numerické řešení
2D modelové úlohy**

Jiří Nedoma, Luboš Tomášek

Technical report No. 984

December 2006



Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Zatížení trubkovité kosti vyplněné kostní dřeví: numerické řešení 2D modelové úlohy

Jiří Nedoma, Luboš Tomášek

Technical report No. 984

December 2006

Abstrakt:

Je formulován matematický model zatěžované dlouhé kosti, tvořené kortikální kostí, spogiózní kostí a kostní dřeví. Matematický model je založen na nestlačitelné vazko-plastické reologii Binghamova typu. Je dokázána existence slabého řešení modelové úlohy a diskutováno numerické řešení úlohy.

Keywords:

Biomechanika, kostní dřeví, vazko-plasticita, Binghamova reologie, kontaktní úloha se třením, variační nerovnice, metoda konečných prvků

1 Úvod

Léčba těžce poškozených kloubů má za sebou více jak 125 let vývoje chirurgických technik, biomechanických studií, materiálových výzkumů a následných léčebných koncepcí. Rozvoj kloubních náhrad během sedmdesátých a osmdesátých let vedl k úspěšným řešením náhrad kyčelního kloubu a následně i kolenního kloubu a dalších lidských kloubů. V průběhu posledních 35 let byl proveden velký počet matematických studií umožňujících matematicky modelovat příslušný lidský kloub a matematicky simulovat jeho funkci a funkci jeho umělé náhrady. Dosud však nebyl studován vliv zatěžovaného dřívku totální náhrady v oblasti styku s kostní dřeví a přenos zatížení do kortikální kosti v této oblasti.

V tomto příspěvku se budeme věnovat numerické analýze úlohy modelující zatěžování dlouhé kosti, tvořené kortikální a spongiózní kostí a kostní dřeví. Modelová úloha je formulována ve dvou a třech dimenzích. Numerické řešení bude studováno ve dvou dimenzích.

2 Formulace úlohy

Označme $\mathbf{u} = (u_i)$ vektor rychlosti, $D = (D_{ij})$, $D_{ij} = D_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$, tenzor rychlosti deformace, $D^D = (D_{ij}^D)$, $D_{ij}^D = D_{ij} - \frac{1}{3}D_{kk}\delta_{ij}$, deviator rychlosti deformace, kde δ_{ij} je Kroneckerův symbol. Označme $\tau = (\tau_{ij})$ Cauchyho tenzor napětí a jeho deviator $\tau^D = (\tau_{ij}^D)$, $\tau_{ij}^D = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}$, tj. $\tau^D = \tau + pI_3$, kde $-p$ je sférická část tenzoru napětí, jež fyzikálně má význam tlaku; I_3 označuje identický tenzor. Kromě deviatorů D_{ij}^D a τ_{ij}^D zavedeme ještě deviator $S^D = (S_{ij}^D)$, popisující plastické vlastnosti biomateriálů (Ionescu, Sofonea (1993)). Biomechanický proces v Binghamově reologii definujeme vztahem mezi deviatory napětí a rychlostí deformace, tj. vztahy

$$\tau^D = S^D + 2\hat{\mu}D^D, \quad D^D = 2\lambda S^D, \quad (2.1)$$

a

$$f(S^D) = S_{II} - \hat{g}^2 \leq 0, \quad (2.2)$$

kde (2.2) je tzv. Misesův vztah (podmínka), kde $S_{II} = \frac{1}{2} |S^D|^2 = \frac{1}{2} S_{ij}^D S_{ij}^D$, $\hat{\mu} > 0$ je mez viskozity, \hat{g} je mez plasticity.

Konstitutivní zákon v Binghamově reologii lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} D_{ij} &= (2\hat{\mu})^{-1} (1 - \hat{g}\tau_{II}^{-\frac{1}{2}}) \tau_{ij}^D & \text{if } \tau_{II}^{\frac{1}{2}} > \hat{g}, \\ D_{ij} &= 0 & \text{if } \tau_{II}^{\frac{1}{2}} \leq \hat{g}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde $\tau_{II} = \frac{1}{2} \tau_{ij}^D \tau_{ij}^D = \frac{1}{2} |\tau^D|^2$ je invariant tenzoru napětí.

Zákon (2.3) lze přepsat v jeho inverzním tvaru. Nechť $|D| = 0$, potom z (2.3) plyne $2^{-1/2} |\tau^D| \leq \hat{g}$; je-li $|D| \neq 0$, potom z (2.3) dostáváme $2^{-1/2} |\tau^D| > \hat{g}$ a $2^{-1/2} |\tau^D| = 2\hat{\mu} |D| + \hat{g}$. Odtud, z podmínky nestlačitelnosti a $\tau^D = \tau + pI_3$ plyne

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -p\delta_{ij} + \hat{g}D_{ij}D_{II}^{-1/2} + 2\hat{\mu}D_{ij} = -p\delta_{ij} + 2^{\frac{1}{2}}\hat{g}D_{ij} |D|^{-1} + 2\hat{\mu}D_{ij}, \\ \text{kde } D_{II} &= \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

což je vztah mezi napětím a rychlostí deformace v Binghamově reologii. Pro $\hat{g} = 0$ dostáváme klasickou vazkou nestlačitelnou (Newtonovu) kapalinu; pro malá $\hat{g} > 0$ dostáváme silně vazko-plastické biomateriály blízké klasické vazké kapalině (haematocely) a pro $\hat{g} \gg 0 (\rightarrow \infty)$, dostáváme tuhé biomateriály. Vidíme, že Binghamova reologie nám umožňuje simulovat širokou škálu biomateriálů od kapaliny počínaje a tuhými biomateriály konče.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ je oblast zahrnující vazko-plastická tělesa, tvořená kortikální a spongiózní kostí a kostní dřeví, s hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\tau \cup \Gamma_c$, kde Γ_u je část hranice, kde je předepsána rychlost; Γ_τ je část hranice, kde je předepsáno zatížení a $\Gamma_c \equiv \Gamma_c^{12}$, je kontaktní hranice mezi kostní tkání a kostní dřeví. Budeme uvažovat Eulerův souřadný systém. Nechť $t \in I \equiv (0, t_p)$, $t_p > 0$, t_p je časové trvání zatížení, \mathbf{n} je vnější jednotková normála k $\partial\Omega$, $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - u_n \mathbf{n}$, $\tau = (\tau_{ij} n_j)$, $\tau_n = \tau_{ij} n_j n_i$, $\tau_t = \tau - \tau_n \mathbf{n}$ jsou normálové a tečné složky vektorů rychlosti a napětí. V dalším uijijeme Einsteinovu sumaci.

Úloha zatěžování dlouhé kosti s kostní dřeninou vede na úlohu:

Úloha (P): hledáme funkci $\mathbf{u} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^N \times I$, $N = 2, 3$, a tenzor napětí $\tau_{ij} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N} \times I$ splňující

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + f_i \quad \text{v } \Omega \times I; \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega \times I; \quad (2.6)$$

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \hat{g} D_{ij} D_{II}^{-1/2} + 2\hat{\mu} D_{ij}; \quad (2.7)$$

kde $D_{II} \neq 0$, $|\tau^D| \leq 2^{\frac{1}{2}} \hat{g}$ jestliže $D_{II} = 0$,

s okrajovými podmínkami

$$\tau_{ij} n_j = P_i \quad \text{na } \Gamma_\tau \times I, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) \quad \text{na } \Gamma_u \times I, \quad (2.9)$$

a s bilaterálními kontaktními podmínkami s lokálním zákonem tření na Γ_c^{12}

$$\begin{aligned} u_n^1 - u_n^2 = 0 \text{ a } |\tau_t^{12}| &\leq \mathcal{F}_c^{12} |S^{D12}|, \\ \text{jestliže } |\tau_t^{12}| &< \mathcal{F}_c^{12} |S^{D12}| \text{ potom } \mathbf{u}_t^1 - \mathbf{u}_t^2 = 0, \\ \text{jestliže } |\tau_t^{12}| &= \mathcal{F}_c^{12} |S^{D12}| \text{ potom existuje } \lambda \geq 0 \text{ takové, že } \mathbf{u}_t^1 - \mathbf{u}_t^2 = -\lambda \tau_t^{12}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

kde \mathcal{F}_c^{12} je koeficient tření, $u_n^1 = u_i^1 n_i^1$, $u_n^2 = u_i^2 n_i^2 = -u_i^2 n_i^1$, $\tau_n^{12} = \tau_n^1 = -\tau_n^2$, $\tau_t^{12} = \tau_t^1 = \tau_t^2$, a počáteční podmínku

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = 0. \quad (2.11)$$

Položíme-li $S^D = |\tau^D|$ a jestliže $|\tau^D|$ definujeme pomocí (2.4), potom dostáváme $|\tau^D| = 2^{\frac{1}{2}} \hat{g} + 2\hat{\mu} |D(\mathbf{u})|$. Tedy kontaktní podmínka (2.10) závisí na řešení vyšetřované úlohy.

Poznámka 2.1 Jestliže $S^{D12} = |\tau_n^{12}|$, potom (2.10) představuje klasický Coulombův zákon tření. Je-li $\mathcal{F}_c^{12} = 0$ potom máme úlohu bez tření.

3 Variační řešení úlohy

Zavedeme Sobolevovy prostory jako prostory všech vektorových funkcí jež mají zobecněné derivace řádu "s" tvaru $[H^s(\Omega)]^k \equiv H^{s,k}(\Omega)$, kde $H^s(\Omega) \equiv W_2^s(\Omega)$. Jejich normu označíme $\|\cdot\|_{s,k}$ a skalární součin jako $(\cdot, \cdot)_s$ (pro každé celé k). Položíme $H^{0,k}(\Omega) \equiv L^{2,k}(\Omega)$. Zavedeme prostor $C_0^\infty(\Omega)$ jako prostor všech funkcí v $C^\infty(\Omega)$ s kompaktním nosičem v Ω^ι , $\iota = 1, 2$. Označíme $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) = [C_0^\infty(\Omega)]^N$, $N = 2, 3$. Zavedeme prostor $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, jako prostor všech měřitelných funkcí takových, že $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} < +\infty$. $L^\infty(\Omega)$ je prostor všech měřitelných funkcí s.v. na Ω a takových, že $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(\mathbf{x})|$ je konečné. $L^p(I; X)$, $1 \leq p < +\infty$, je prostor funkcí $f : I \rightarrow X$ takových, že $\|f(\cdot)\|_X \in L^p(I)$. Dále definujeme pro $s \geq 1$ následující prostory a množiny:

$${}^1H^{s,N}(\Omega) = \cap_{\iota=1}^2 {}^1H^{s,N}(\Omega^\iota) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in H^{s,N}(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ v } \cup_{\iota=1}^2 \Omega^\iota\},$$

$$v_n^1 - v_n^2 = 0 \text{ na } \Gamma_c^{12}, V_s = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in {}^1H^{s,N}(\Omega), \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_u\}, V_1 = V, V_0 = H.$$

Potom prostor V_s je Hilbertovým prostorem s normou $\|\cdot\|_{s,N}$, $H^{1,N}(\Omega)$ s normou $\|\cdot\|_{1,N} \equiv \|\cdot\|_1$ a $H^{0,N}(\Omega)$ s $\|\cdot\|_{0,N} \equiv \|\cdot\|_0$. Položíme ${}^1\mathcal{H}(\Omega) = {}^1H^{1,N}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Duální prostor prostoru V_s označíme $(V_s)'$. Položíme $\mathbf{v}' = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$. Zavedeme prostor

$${}^1H = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in L^2(I; V_s), \mathbf{v}' \in L^2(I; H), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = 0\}.$$

Nechť $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \in L^2(I; L^{2,N}(\Gamma_\tau))$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in L^2(I; V')$, $\rho, \hat{g}, \hat{\mu}$ jsou počástech konstantní a kladné a nechť $\mathcal{F}_c^{12} \in L^\infty(\Gamma_c^{12})$, $\mathcal{F}_c^{12} \geq 0$ s.v. na Γ_c^{12} a $\mathbf{u}_1 \equiv 0$.

Pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^{1,N}(\Omega)$ definujeme

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{t=1}^2 a^t(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}^t) = 2 \int_{\Omega} \hat{\mu} D_{ij}(\mathbf{u}) D_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ (\mathbf{u}', \mathbf{v}) &= \sum_{t=1}^2 (\mathbf{u}'^t, \mathbf{v}^t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}'^t \mathbf{v}^t d\mathbf{x}, \\ S(\mathbf{v}) &= \sum_{t=1}^2 S^t(\mathbf{v}^t) = \int_{\Omega} f_i v_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds \equiv (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \sum_{t=1}^2 b^t(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}^t, \mathbf{w}^t) = \int_{\Omega} \rho u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j d\mathbf{x}, \\ j(\mathbf{v}) &= \sum_{t=1}^2 j^t(\mathbf{v}^t) = 2 \int_{\Omega} \hat{g}(D_{II}(\mathbf{v}))^{\frac{1}{2}} d\mathbf{x}, \\ j_g(\mathbf{v}) &= \sum_{t=1}^2 j_g^t(\mathbf{v}^t) = \int_{\Gamma_c^{12}} \mathcal{F}_c^{12} |S^{D12} | \mathbf{v}_t^1 - \mathbf{v}_t^2 | ds. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li (2.5) s (2.7) výrazem $\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)$, integrujeme-li přes Ω , užijeme-li Greenovu větu a okrajové podmínky, potom dostáváme variační formulaci úlohy:

Úloha $(\mathcal{P})_v$: Hledáme funkci \mathbf{u} takovou, že $\mathbf{u} \in {}^1H$ a splňující

$$\int_I [(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j(\mathbf{v}(t)) - j(\mathbf{u}(t)) + j_g(\mathbf{v}(t)) - j_g(\mathbf{u}(t))] dt \geq \int_I S(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dt \quad \forall \mathbf{v} \in {}^1H, t \in I. \quad (3.1)$$

Bilineární forma $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je symetrická, tj. $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Pro $\mathbf{u} \in V$ existuje konstanta $c_B > 0$ taková, že $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_B \| \mathbf{u} \|_{1,N}^2$ pro všechna $\mathbf{u} \in V$. Platí odhady (Temam (1979))

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| &\leq c_4 \| \mathbf{u} \|_{1,N}^{1/2} \| \mathbf{u} \|_{0,N}^{1/2} \| \mathbf{w} \|_{1,N}^{1/2} \| \mathbf{w} \|_{0,N}^{1/2} \| \mathbf{v} \|_{s,N}, s = \frac{1}{2}N, \\ \mathbf{u}, \mathbf{w} &\in {}^1H^{1,N}(\Omega), \mathbf{v} \in H^{s,N}(\Omega), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) &= 0 \text{ a jelikož } \mathcal{F}_c^{12} \in L^{\infty}(\Gamma_c^{12}), \mathcal{F}_c^{12} \geq 0, \text{ potom } j_g(\mathbf{u}(t)) \geq 0 \\ \text{pro } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} &\in {}^1\mathcal{H}(\Omega) \quad b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0, \\ \text{a tedy } b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \text{ pro } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in {}^1\mathcal{H}(\Omega). \end{aligned}$$

Hlavní výsledek dává následující věta

Věta 1: Necht' $N \geq 2, s = \frac{N}{2}, \mathbf{f} \in L^2(I; V'), \mathbf{P} \in L^2(I; L^{2,N}(\Gamma_{\tau}))$, $\hat{g}, \hat{\mu}$ jsou po částech konstantní, $\mathcal{F}_c^{12} \in L^{\infty}(\Gamma_c^{12}), \mathcal{F}_c^{12} \geq 0$ s.v. na Γ_c^{12} . Potom existuje funkce \mathbf{u} taková, že

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2(I; V) \cap L^{\infty}(I; H), \mathbf{u}' \in L^2(I; (V_s)'), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) &= 0 \end{aligned}$$

a splňující (3.1).

Důkaz: je založen na myšlence užití regularizace (Duvaut, Lions (1976)):

(i) regularizace $j(\mathbf{v}(t))$

$$j_{\varepsilon}(\mathbf{v}(t)) = \frac{2}{1+\varepsilon} \int_{\Omega} \hat{g}(D_{II}(\mathbf{v}(t)))^{(1+\varepsilon)/2} d\mathbf{x}, \quad \varepsilon > 0 \text{ a } (j'_{\varepsilon}(\mathbf{v}), \mathbf{v}) \geq 0. \quad (3.2)$$

(ii) Jelikož funkcionál $j_g(\mathbf{v})$ není diferencovatelný v Gâteauxově smyslu, zavedeme jeho regularizaci $j_{g\varepsilon}(\mathbf{v})$. Definujme funkci $\psi_{\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \psi_{\varepsilon}(y) = \sqrt{(y^2 + \varepsilon^2)} - \varepsilon$, pro kterou platí $y \rightarrow |y|$. Funkce ψ_{ε} je diferencovatelná a platí

$$||y| - \psi_{\varepsilon}(|y|)| < \varepsilon \quad \forall y \in \mathbb{R}, \varepsilon \geq 0.$$

Funkcionál $j_g(\mathbf{v})$ regularizujeme jeho regularizací $j_{g\varepsilon}(\mathbf{v})$, definovanou

$$j_{g\varepsilon}(\mathbf{v}(t)) = \int_{\Gamma_c^{12}} \mathcal{F}_c^{12} S^{D12} \psi_{\varepsilon}(|\mathbf{v}_t^1 - \mathbf{v}_t^2|) ds \text{ a platí } (j'_{g\varepsilon}(\mathbf{v}), \mathbf{v}) \geq 0. \quad (3.3)$$

Třetí regularizaci získáme zavedením vazkého členu $\eta(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v})_s$, kde $s = \frac{N}{2}$ a η je kladné číslo. Pro $N = 2$ je $s = 1$ a ${}^1H^{s,N}(\Omega) = {}^1H^{1,N}(\Omega), V_s = V$ a vazký člen je možno zanedbat.

Potom řešíme regularizovanou úlohu:

Úloha $(\mathcal{P}_r)_v$: najít $\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} \in {}^1H$ takovou, že

$$\begin{aligned} & \int_I [(\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + a(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + \\ & + b(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + \eta((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)))_s + j_\varepsilon(\mathbf{v}(t)) - \\ & - j_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + j_{g\varepsilon}(\mathbf{v}(t)) - j_{g\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t))] dt \geq \int_I S(\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) dt \quad \forall \mathbf{v} \in {}^1H. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Metoda důkazu je analogická důkazu Věty 3 v Nedoma (1995), (2006):

- (1) důkaz existence řešení (3.4) je založen na Galerkinově metodě;
- (2) nalezneme apriorní odhady I and II nezávislé na ε a η ;
- (3) dokážeme limitní procesy Galerkinovy aproximace (tj. přes m) a pro $\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$;
- (4) jednoznačnost řešení (3.1) lze dokázat pouze pro $N = 2$.

4 Numerické řešení

Pro numerickou analýzu se omezíme pouze na 2D případ. Necht' Ω_h je aproximace Ω v \mathbb{R}^2 a necht' její hranice je $\partial\Omega_h = \Gamma_{uh} \cup \Gamma_{\tau h} \cup \Gamma_{ch}$. Necht' \mathfrak{T}_h je dělení $\overline{\Omega}_h$ pomocí trojúhelníků \mathcal{T}_h . Necht' $h = h(\mathcal{T}_h)$ je maximální průměr kružnice opsané trojúhelníku \mathcal{T}_h . Necht' $\mathcal{T}_h \in \mathfrak{T}_h$ je trojúhelník s vrcholy $P_i, i = 1, \dots, 3$ a R_i jsou středy stran vzhledem k $P_i, i = 1, \dots, 3$. Necht' $\{\mathfrak{T}_h\}$ je regulární a taková, že $\overline{\Omega}_h = \cup_{\mathcal{T}_h \in \mathfrak{T}_h} \mathcal{T}_h$.

Necht' n je celé číslo a položme $k = t_p/n$ - časový krok. Necht'

$$\mathbf{f}_k^{i+\Theta} = \frac{1}{k} \int_{ik}^{(i+\Theta)k} \mathbf{f}(t) dt, i = 0, \dots, n-1, 0 \leq \Theta \leq 1, \mathbf{f}_k^{i+\Theta} \in V'.$$

Položme $\mathbf{u}^0 = 0$. Jestliže $\mathbf{u}^0, \dots, \mathbf{u}^i$ jsou známá, definujeme \mathbf{u}^{i+1} jako prvek prostoru V . Existenci funkce \mathbf{u}^{i+1} pro každé pevné k a každé $i \geq 0$ lze dokázat. Prostor V_s je aproximován prostorem lineárních nekonformních funkcí V_h . Necht' $\mathcal{V}_h = \{\mathbf{v}_h \mid v_{hi} \in P_1^*, i = 1, 2, \forall \mathcal{T}_h \in \mathfrak{T}_h, \text{spojité ve středech stran trojúhelníku } B_j, j = 1, \dots, m, \text{ a rovné nule v } B_j \text{ ležící na } \Gamma_{uh}, \sum_{i=1,2} \partial v_{hi} / \partial x_i = 0, \mathbf{v}_h = 0, \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_h\}$, kde P_1^* je prostor všech nekonformních lineárních polynomů, $V_h = \{\mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h, \mathbf{v}_h = \mathbf{u}_1 \text{ na } \Gamma_{uh}\}$.

Buď dáno dělení \mathcal{T}_h oblasti Ω_h . Předpokládejme, že \mathbf{u}_h^0 je dáno v V_h , a takové, že \mathbf{u}_h^0 jde k 0 v prostoru V_h jestliže $h \rightarrow 0_+$. Dále předpokládejme, že $\|\mathbf{u}_h^0\|$ je omezená. Pro každé k a h definujeme prvky $\mathbf{u}_h^0, \dots, \mathbf{u}_h^i$ z prostoru V_h , které jsou odvozeny ze semi-implicitního schématu. Časové derivace jsou aproximovány diferencemi. Jelikož $\frac{\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i}{k} = \frac{\mathbf{u}_h^{i+\Theta} - \mathbf{u}_h^i}{\Theta k}, 0 \leq \Theta \leq 1$, potom

$$\mathbf{u}_h^{i+\Theta} = \Theta \mathbf{u}_h^{i+1} + (1 - \Theta) \mathbf{u}_h^i, \mathbf{u}_h^{i+1} = \Theta^{-1} \mathbf{u}_h^{i+\Theta} - \frac{(1 - \Theta)}{\Theta} \mathbf{u}_h^i, 0 \leq \Theta \leq 1.$$

Jelikož kontaktní podmínky vyšetřované úlohy závisí na řešení úlohy, potom $j_h(\mathbf{v}_h) = j_h(\mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h)$.

Schéma (\mathcal{P}_{si}) : Necht' $\mathbf{u}_h^0, \dots, \mathbf{u}_h^i$ jsou známa, potom \mathbf{u}_h^{i+1} je řešení v prostoru V_h a

$$\begin{aligned} & k^{-1}(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + a_h(\mathbf{u}_h^{i+\Theta}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + b_h(\mathbf{u}_h^i, \mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + \\ & j_h(\mathbf{v}_h) - j_h(\mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + j_{gh}(\mathbf{v}_h) - j_{gh}(\mathbf{u}_h^{i+\Theta}) \geq (\mathbf{F}_h^{i+\Theta}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pro $\Theta = 1$ máme semi-implicitní schéma, pro $\Theta = \frac{1}{2}$ Crank-Nicholsonovo schéma.

Necht' $\|\cdot\|_h$ je norma prostorů $L^2(\Omega)$ ($[L^2(\Omega)]^2$), $\|\cdot\|_h$ prostorů \mathcal{V}_h a V_h . Podle Temam (1979) $\|\mathbf{u}_h\|_h \leq d_1 \|\mathbf{u}_h\|_h, \|\mathbf{u}_h\|_h \leq S(h) \|\mathbf{u}_h\|_h \quad \forall \mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h, d_1$ je nezávislá na h . Dále platí odhady $\|b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)\| \leq d_1 \|\mathbf{u}_h\|_h \|\mathbf{v}_h\|_h \|\mathbf{w}_h\|_h \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h$, kde d_1 nezávisí na h , $\|b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)\| \leq S_1(h) \|\mathbf{u}_h\|_h \|\mathbf{u}_h\|_h \|\mathbf{v}_h\|_h \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$, kde $S_1(h) \leq d_1 S^2(h), b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h$.

Dá se ukázat, že \mathbf{u}_h^i a \mathbf{u}_h^{i+1} , definovaná schématem (\mathcal{P}_{si}) , pro $\Theta \geq \frac{1}{2}$ splňují následující podmínky:

Věta 2: Necht' užitá triangulace je regulární. Necht' k, h splňují podmínky $kS_0(h) \leq d_0$, $kS(h) \leq d_1$, kde d_0, d_1 jsou kladné konstanty nezávislé na k, h . Necht' $\Theta \geq \frac{1}{2}$. Potom \mathbf{u}_h^i jsou definovány schematem (\mathcal{P}_{si}) a platí odhady

$$|\mathbf{u}_h^i|^2 \leq c, i = 0, \dots, n, k \sum_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{u}_h^{i+\Theta}\|^2 \leq c, k \sum_{i=0}^{n-1} |\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i|^2 \leq c, \quad (4.2)$$

kde c jsou konstanty nezávislé na k, h .

Důkaz je analogický důkazu z Nedoma (1998).

Schéma (\mathcal{P}_{si}) je stabilní a konverguje. Důkazy jsou analogické důkazům v Glowinski et al. (1976), Nedoma (1998), (2003). Jisté potíže souvisí s aproximací podmínky nestlačitelnosti $\operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0$ (Glowinski et al. (1976), Temam (1979), Nedoma (1998)). Jelikož člen z $D_{ij}(\mathbf{u})D_{II}^{-1/2}(\mathbf{u})$ vytváří nediferencovatelný funkcionál je možno zavést multiplifikátory $m = (m_{ij})$, podobně jako v Duvaut, Lions (1976), Glowinski (2003), Nedoma (1998). Na této myšlence je založen užitý algoritmus. Aproximovaná úloha pak v každém časovém kroku vede na hledání sedlového bodu Lagrangiánu $\mathcal{L}_h(\mathbf{v}_k, m_n)$, založeného na Uzawově algoritmu. V každém kroku Uzawova algoritmu se řeší systém nelineárních rovnic s řídkou pozitivnědefinitní maticí. Pro řešení této soustavy je použita metoda sdružených gradientů.

Poděkování

Tato práce byla řešena v rámci grantu MPO FT-TA/087.

Literatura

- [1] Duvaut, G., Lions, J.L. (1976). *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin.
- [2] Glowinski, R. (2003). *Finite Element Methods for Incompressible Viscous Flow*. In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L. (Eds), *Handbook of Numerical Analysis for Fluids (Parts 3)*, Elsevier Science B.V.
- [3] Glowinski, R., Lions, J.L., Trémolières, R. (1976). *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. North-Holland, Amsterdam.
- [4] Ionescu, I.R., Sofonea, M. (1993). *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*. Oxford Univ. Press, Oxford.
- [5] Nedoma (1995). Equations of magnetodynamics in incompressible thermo-Bingham's fluid under the gravity effect. *J.Comput. Appl. Math.* 59,109-128.
- [6] Nedoma (1998). *Numerical Modelling in Applied Geodynamics*, J.Wiley&Sons, Chichester.
- [7] Nedoma, J. (2006). On a solvability of contact problems with visco-plastic friction in the thermo-visco-plastic Bingham rheology. *Future Generation Computer Systems* 22, 484-499.
- [8] Temam, R. (1979). *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Methods*. North-Holland, Amsterdam.