



národní  
úložiště  
šedé  
literatury

## **Zatížení trubkovité kosti vyplněné kostní dřevem: numerické řešení 2D modelové úlohy**

Nedoma, Jiří  
2006

Dostupný z <http://www.nusl.cz/ntk/nusl-37637>

Dílo je chráněno podle autorského zákona č. 121/2000 Sb.

Tento dokument byl stažen z Národního úložiště šedé literatury (NUŠL).

Datum stažení: 26.06.2024

Další dokumenty můžete najít prostřednictvím vyhledávacího rozhraní [nusl.cz](http://nusl.cz) .



**Institute of Computer Science**  
**Academy of Sciences of the Czech Republic**

**Zatížení trubkovité kosti vyplněné  
kostní dřeví: numerické řešení  
2D modelové úlohy**

Jiří Nedoma, Luboš Tomášek

Technical report No. 984

December 2006



**Institute of Computer Science**  
**Academy of Sciences of the Czech Republic**

## **Zatížení trubkovité kosti vyplněné kostní dřeví: numerické řešení 2D modelové úlohy**

Jiří Nedoma, Luboš Tomášek

Technical report No. 984

December 2006

### Abstrakt:

Je formulován matematický model zatěžované dlouhé kosti, tvořené kortikální kostí, spogiózní kostí a kostní dřeví. Matematický model je založen na nestlačitelné vazko-plastické reologii Binghamova typu. Je dokázána existence slabého řešení modelové úlohy a diskutováno numerické řešení úlohy.

### Keywords:

Biomechanika, kostní dřeví, vazko-plasticita, Binghamova reologie, kontaktní úloha se třením, variační nerovnice, metoda konečných prvků

# 1 Úvod

Léčba těžce poškozených kloubů má za sebou více jak 125 let vývoje chirurgických technik, biomechanických studií, materiálových výzkumů a následných léčebných koncepcí. Rozvoj kloubních náhrad během sedmdesátých a osmdesátých let vedl k úspěšným řešením náhrad kyčelního kloubu a následně i kolenního kloubu a dalších lidských kloubů. V průběhu posledních 35 let byl proveden velký počet matematických studií umožňujících matematicky modelovat příslušný lidský kloub a matematicky simulovat jeho funkci a funkci jeho umělé náhrady. Dosud však nebyl studován vliv zatěžovaného dřívku totální náhrady v oblasti styku s kostní dřeví a přenos zatížení do kortikální kosti v této oblasti.

V tomto příspěvku se budeme věnovat numerické analýze úlohy modelující zatěžování dlouhé kosti, tvořené kortikální a spongiózní kostí a kostní dřeví. Modelová úloha je formulována ve dvou a třech dimenzích. Numerické řešení bude studováno ve dvou dimenzích.

## 2 Formulace úlohy

Označme  $\mathbf{u} = (u_i)$  vektor rychlosti,  $D = (D_{ij})$ ,  $D_{ij} = D_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ , tenzor rychlosti deformace,  $D^D = (D_{ij}^D)$ ,  $D_{ij}^D = D_{ij} - \frac{1}{3}D_{kk}\delta_{ij}$ , deviator rychlosti deformace, kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerův symbol. Označme  $\tau = (\tau_{ij})$  Cauchyho tenzor napětí a jeho deviator  $\tau^D = (\tau_{ij}^D)$ ,  $\tau_{ij}^D = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}$ , tj.  $\tau^D = \tau + pI_3$ , kde  $-p$  je sférická část tenzoru napětí, jež fyzikálně má význam tlaku;  $I_3$  označuje identický tenzor. Kromě deviatorů  $D_{ij}^D$  a  $\tau_{ij}^D$  zavedeme ještě deviator  $S^D = (S_{ij}^D)$ , popisující plastické vlastnosti biomateriálů (Ionescu, Sofonea (1993)). Biomechanický proces v Binghamově reologii definujeme vztahem mezi deviatory napětí a rychlostí deformace, tj. vztahy

$$\tau^D = S^D + 2\hat{\mu}D^D, \quad D^D = 2\lambda S^D, \quad (2.1)$$

a

$$f(S^D) = S_{II} - \hat{g}^2 \leq 0, \quad (2.2)$$

kde (2.2) je tzv. Misesův vztah (podmínka), kde  $S_{II} = \frac{1}{2} | S^D |^2 = \frac{1}{2} S_{ij}^D S_{ij}^D$ ,  $\hat{\mu} > 0$  je mez viskozity,  $\hat{g}$  je mez plasticity.

Konstitutivní zákon v Binghamově reologii lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} D_{ij} &= (2\hat{\mu})^{-1} (1 - \hat{g}\tau_{II}^{-\frac{1}{2}}) \tau_{ij}^D & \text{if } \tau_{II}^{\frac{1}{2}} > \hat{g}, \\ D_{ij} &= 0 & \text{if } \tau_{II}^{\frac{1}{2}} \leq \hat{g}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde  $\tau_{II} = \frac{1}{2} \tau_{ij}^D \tau_{ij}^D = \frac{1}{2} | \tau^D |^2$  je invariant tenzoru napětí.

Zákon (2.3) lze přepsat v jeho inverzním tvaru. Nechť  $| D | = 0$ , potom z (2.3) plyne  $2^{-1/2} | \tau^D | \leq \hat{g}$ ; je-li  $| D | \neq 0$ , potom z (2.3) dostáváme  $2^{-1/2} | \tau^D | > \hat{g}$  a  $2^{-1/2} | \tau^D | = 2\hat{\mu} | D | + \hat{g}$ . Odtud, z podmínky nestlačitelnosti a  $\tau^D = \tau + pI_3$  plyne

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -p\delta_{ij} + \hat{g}D_{ij}D_{II}^{-1/2} + 2\hat{\mu}D_{ij} = -p\delta_{ij} + 2^{\frac{1}{2}}\hat{g}D_{ij} | D |^{-1} + 2\hat{\mu}D_{ij}, \\ \text{kde } D_{II} &= \frac{1}{2}D_{ij}D_{ij}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

což je vztah mezi napětím a rychlostí deformace v Binghamově reologii. Pro  $\hat{g} = 0$  dostáváme klasickou vazkou nestlačitelnou (Newtonovu) kapalinu; pro malá  $\hat{g} > 0$  dostáváme silně vazko-plastické biomateriály blízké klasické vazké kapalině (haematocely) a pro  $\hat{g} \gg 0 (\rightarrow \infty)$ , dostáváme tuhé biomateriály. Vidíme, že Binghamova reologie nám umožňuje simulovat širokou škálu biomateriálů od kapaliny počínaje a tuhými biomateriály konče.

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ ,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  je oblast zahrnující vazko-plastická tělesa, tvořená kortikální a spongiózní kostí a kostní dřeví, s hladkou hranicí  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\tau \cup \Gamma_c$ , kde  $\Gamma_u$  je část hranice, kde je předepsána rychlost;  $\Gamma_\tau$  je část hranice, kde je předepsáno zatížení a  $\Gamma_c \equiv \Gamma_c^{12}$ , je kontaktní hranice mezi kostní tkání a kostní dřeví. Budeme uvažovat Eulerův souřadný systém. Nechť  $t \in I \equiv (0, t_p)$ ,  $t_p > 0$ ,  $t_p$  je časové trvání zatížení,  $\mathbf{n}$  je vnější jednotková normála k  $\partial\Omega$ ,  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - u_n \mathbf{n}$ ,  $\tau = (\tau_{ij}n_j)$ ,  $\tau_n = \tau_{ij}n_jn_i$ ,  $\tau_t = \tau - \tau_n \mathbf{n}$  jsou normálové a tečné složky vektorů rychlosti a napětí. V dalším uijijeme Einsteinovu sumaci.

Úloha zatěžování dlouhé kosti s kostní dřeninou vede na úlohu:

**Úloha (P):** hledáme funkci  $\mathbf{u} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^N \times I$ ,  $N = 2, 3$ , a tenzor napětí  $\tau_{ij} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N} \times I$  splňující

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + f_i \quad \text{v } \Omega \times I; \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega \times I; \quad (2.6)$$

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \hat{g} D_{ij} D_{II}^{-1/2} + 2\hat{\mu} D_{ij}; \quad (2.7)$$

kde  $D_{II} \neq 0$ ,  $|\tau^D| \leq 2^{\frac{1}{2}} \hat{g}$  jestliže  $D_{II} = 0$ ,

s okrajovými podmínkami

$$\tau_{ij} n_j = P_i \quad \text{na } \Gamma_\tau \times I, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) \quad \text{na } \Gamma_u \times I, \quad (2.9)$$

a s bilaterálními kontaktními podmínkami s lokálním zákonem tření na  $\Gamma_c^{12}$

$$\begin{aligned} u_n^1 - u_n^2 = 0 \text{ a } |\tau_t^{12}| &\leq \mathcal{F}_c^{12} |S^{D12}|, \\ \text{jestliže } |\tau_t^{12}| &< \mathcal{F}_c^{12} |S^{D12}| \text{ potom } \mathbf{u}_t^1 - \mathbf{u}_t^2 = 0, \\ \text{jestliže } |\tau_t^{12}| &= \mathcal{F}_c^{12} |S^{D12}| \text{ potom existuje } \lambda \geq 0 \text{ takové, že } \mathbf{u}_t^1 - \mathbf{u}_t^2 = -\lambda \tau_t^{12}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

kde  $\mathcal{F}_c^{12}$  je koeficient tření,  $u_n^1 = u_i^1 n_i^1$ ,  $u_n^2 = u_i^2 n_i^2 = -u_i^2 n_i^1$ ,  $\tau_n^{12} = \tau_n^1 = -\tau_n^2$ ,  $\tau_t^{12} = \tau_t^1 = \tau_t^2$ , a počáteční podmínku

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = 0. \quad (2.11)$$

Položíme-li  $S^D = |\tau^D|$  a jestliže  $|\tau^D|$  definujeme pomocí (2.4), potom dostáváme  $|\tau^D| = 2^{\frac{1}{2}} \hat{g} + 2\hat{\mu} |D(\mathbf{u})|$ . Tedy kontaktní podmínka (2.10) závisí na řešení vyšetřované úlohy.

**Poznámka 2.1** Jestliže  $S^{D12} = |\tau_n^{12}|$ , potom (2.10) představuje klasický Coulombův zákon tření. Je-li  $\mathcal{F}_c^{12} = 0$  potom máme úlohu bez tření.

### 3 Variační řešení úlohy

Zavedeme Sobolevovy prostory jako prostory všech vektorových funkcí jež mají zobecněné derivace řádu "s" tvaru  $[H^s(\Omega)]^k \equiv H^{s,k}(\Omega)$ , kde  $H^s(\Omega) \equiv W_2^s(\Omega)$ . Jejich normu označíme  $\|\cdot\|_{s,k}$  a skalární součin jako  $(\cdot, \cdot)_s$  (pro každé celé k). Položíme  $H^{0,k}(\Omega) \equiv L^{2,k}(\Omega)$ . Zavedeme prostor  $C_0^\infty(\Omega)$  jako prostor všech funkcí v  $C^\infty(\Omega)$  s kompaktním nosičem v  $\Omega^\iota$ ,  $\iota = 1, 2$ . Označíme  $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) = [C_0^\infty(\Omega)]^N$ ,  $N = 2, 3$ . Zavedeme prostor  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , jako prostor všech měřitelných funkcí takových, že  $\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x})^{1/p} < +\infty$ .  $L^\infty(\Omega)$  je prostor všech měřitelných funkcí s.v. na  $\Omega$  a takových, že  $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(\mathbf{x})|$  je konečné.  $L^p(I; X)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , je prostor funkcí  $f : I \rightarrow X$  takových, že  $\|f(\cdot)\|_X \in L^p(I)$ . Dále definujeme pro  $s \geq 1$  následující prostory a množiny:

$${}^1H^{s,N}(\Omega) = \cap_{\iota=1}^2 {}^1H^{s,N}(\Omega^\iota) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in H^{s,N}(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ v } \cup_{\iota=1}^2 \Omega^\iota\},$$

$$v_n^1 - v_n^2 = 0 \text{ na } \Gamma_c^{12}\}, V_s = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in {}^1H^{s,N}(\Omega), \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_u\}, V_1 = V, V_0 = H.$$

Potom prostor  $V_s$  je Hilbertovým prostorem s normou  $\|\cdot\|_{s,N}$ ,  $H^{1,N}(\Omega)$  s normou  $\|\cdot\|_{1,N} \equiv \|\cdot\|_1$  a  $H^{0,N}(\Omega)$  s  $\|\cdot\|_{0,N} \equiv \|\cdot\|_0$ . Položíme  ${}^1\mathcal{H}(\Omega) = {}^1H^{1,N}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ . Duální prostor prostoru  $V_s$  označíme  $(V_s)'$ . Položíme  $\mathbf{v}' = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ . Zavedeme prostor

$${}^1H = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in L^2(I; V_s), \mathbf{v}' \in L^2(I; H), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = 0\}.$$

Nechť  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \in L^2(I; L^{2,N}(\Gamma_\tau))$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in L^2(I; V')$ ,  $\rho, \hat{g}, \hat{\mu}$  jsou počástech konstantní a kladné a nechť  $\mathcal{F}_c^{12} \in L^\infty(\Gamma_c^{12})$ ,  $\mathcal{F}_c^{12} \geq 0$  s.v. na  $\Gamma_c^{12}$  a  $\mathbf{u}_1 \equiv 0$ .

Pro  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^{1,N}(\Omega)$  definujeme

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{t=1}^2 a^t(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}^t) = 2 \int_{\Omega} \hat{\mu} D_{ij}(\mathbf{u}) D_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ (\mathbf{u}', \mathbf{v}) &= \sum_{t=1}^2 (\mathbf{u}'^t, \mathbf{v}^t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}'^t \mathbf{v}^t d\mathbf{x}, \\ S(\mathbf{v}) &= \sum_{t=1}^2 S^t(\mathbf{v}^t) = \int_{\Omega} f_i v_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds \equiv (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \sum_{t=1}^2 b^t(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}^t, \mathbf{w}^t) = \int_{\Omega} \rho u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j d\mathbf{x}, \\ j(\mathbf{v}) &= \sum_{t=1}^2 j^t(\mathbf{v}^t) = 2 \int_{\Omega} \hat{g}(D_{II}(\mathbf{v}))^{\frac{1}{2}} d\mathbf{x}, \\ j_g(\mathbf{v}) &= \sum_{t=1}^2 j_g^t(\mathbf{v}^t) = \int_{\Gamma_c^{12}} \mathcal{F}_c^{12} |S^{D12} | \mathbf{v}_t^1 - \mathbf{v}_t^2 | ds. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li (2.5) s (2.7) výrazem  $\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)$ , integrujeme-li přes  $\Omega$ , užijeme-li Greenovu větu a okrajové podmínky, potom dostáváme variační formulaci úlohy:

**Úloha  $(\mathcal{P})_v$ :** Hledáme funkci  $\mathbf{u}$  takovou, že  $\mathbf{u} \in {}^1H$  a splňující

$$\int_I [(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j(\mathbf{v}(t)) - j(\mathbf{u}(t)) + j_g(\mathbf{v}(t)) - j_g(\mathbf{u}(t))] dt \geq \int_I S(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dt \quad \forall \mathbf{v} \in {}^1H, t \in I. \quad (3.1)$$

Bilineární forma  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  je symetrická, tj.  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ . Pro  $\mathbf{u} \in V$  existuje konstanta  $c_B > 0$  taková, že  $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_B \|\mathbf{u}\|_{1,N}^2$  pro všechna  $\mathbf{u} \in V$ . Platí odhady (Temam (1979))

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| &\leq c_4 \|\mathbf{u}\|_{1,N}^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{0,N}^{1/2} \|\mathbf{w}\|_{1,N}^{1/2} \|\mathbf{w}\|_{0,N}^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{s,N}, \quad s = \frac{1}{2}N, \\ \mathbf{u}, \mathbf{w} &\in {}^1H^{1,N}(\Omega), \mathbf{v} \in H^{s,N}(\Omega), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) &= 0 \text{ a jelikož } \mathcal{F}_c^{12} \in L^{\infty}(\Gamma_c^{12}), \mathcal{F}_c^{12} \geq 0, \text{ potom } j_g(\mathbf{u}(t)) \geq 0 \\ \text{pro } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} &\in {}^1\mathcal{H}(\Omega) \quad b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0, \\ \text{a tedy } b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= -b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \text{ pro } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in {}^1\mathcal{H}(\Omega). \end{aligned}$$

Hlavní výsledek dává následující věta

**Věta 1:** Necht'  $N \geq 2, s = \frac{N}{2}, \mathbf{f} \in L^2(I; V'), \mathbf{P} \in L^2(I; L^{2,N}(\Gamma_{\tau}))$ ,  $\hat{g}, \hat{\mu}$  jsou po částech konstantní,  $\mathcal{F}_c^{12} \in L^{\infty}(\Gamma_c^{12}), \mathcal{F}_c^{12} \geq 0$  s.v. na  $\Gamma_c^{12}$ . Potom existuje funkce  $\mathbf{u}$  taková, že

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2(I; V) \cap L^{\infty}(I; H), \mathbf{u}' \in L^2(I; (V_s)'), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) &= 0 \end{aligned}$$

a splňující (3.1).

Důkaz: je založen na myšlence užití regularizace (Duvaut, Lions (1976)):

(i) regularizace  $j(\mathbf{v}(t))$

$$j_{\varepsilon}(\mathbf{v}(t)) = \frac{2}{1+\varepsilon} \int_{\Omega} \hat{g}(D_{II}(\mathbf{v}(t)))^{(1+\varepsilon)/2} d\mathbf{x}, \quad \varepsilon > 0 \text{ a } (j'_{\varepsilon}(\mathbf{v}), \mathbf{v}) \geq 0. \quad (3.2)$$

(ii) Jelikož funkcionál  $j_g(\mathbf{v})$  není diferencovatelný v Gâteauxově smyslu, zavedeme jeho regularizaci  $j_{g\varepsilon}(\mathbf{v})$ . Definujme funkci  $\psi_{\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \psi_{\varepsilon}(y) = \sqrt{(y^2 + \varepsilon^2)} - \varepsilon$ , pro kterou platí  $y \rightarrow |y|$ . Funkce  $\psi_{\varepsilon}$  je diferencovatelná a platí

$$||y| - \psi_{\varepsilon}(|y|)| < \varepsilon \quad \forall y \in \mathbb{R}, \varepsilon \geq 0.$$

Funkcionál  $j_g(\mathbf{v})$  regularizujeme jeho regularizací  $j_{g\varepsilon}(\mathbf{v})$ , definovanou

$$j_{g\varepsilon}(\mathbf{v}(t)) = \int_{\Gamma_c^{12}} \mathcal{F}_c^{12} S^{D12} \psi_{\varepsilon}(|\mathbf{v}_t^1 - \mathbf{v}_t^2|) ds \text{ a platí } (j'_{g\varepsilon}(\mathbf{v}), \mathbf{v}) \geq 0. \quad (3.3)$$

Třetí regularizaci získáme zavedením vazkého členu  $\eta(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v})_s$ , kde  $s = \frac{N}{2}$  a  $\eta$  je kladné číslo. Pro  $N = 2$  je  $s = 1$  a  ${}^1H^{s,N}(\Omega) = {}^1H^{1,N}(\Omega), V_s = V$  a vazký člen je možno zanedbat.

Potom řešíme regularizovanou úlohu:

**Úloha**  $(\mathcal{P}_r)_v$ : najít  $\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} \in {}^1H$  takovou, že

$$\begin{aligned} & \int_I [(\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + a(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + \\ & + b(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + \eta((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)))_s + j_\varepsilon(\mathbf{v}(t)) - \\ & - j_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + j_{g\varepsilon}(\mathbf{v}(t)) - j_{g\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t))] dt \geq \int_I S(\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) dt \quad \forall \mathbf{v} \in {}^1H. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Metoda důkazu je analogická důkazu Věty 3 v Nedoma (1995), (2006):

- (1) důkaz existence řešení (3.4) je založen na Galerkinově metodě;
- (2) nalezneme apriorní odhady I and II nezávislé na  $\varepsilon$  a  $\eta$ ;
- (3) dokážeme limitní procesy Galerkinovy aproximace (tj. přes  $m$ ) a pro  $\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ ;
- (4) jednoznačnost řešení (3.1) lze dokázat pouze pro  $N = 2$ .

## 4 Numerické řešení

Pro numerickou analýzu se omezíme pouze na 2D případ. Necht'  $\Omega_h$  je aproximace  $\Omega$  v  $\mathbb{R}^2$  a necht' její hranice je  $\partial\Omega_h = \Gamma_{uh} \cup \Gamma_{\tau h} \cup \Gamma_{ch}$ . Necht'  $\mathfrak{T}_h$  je dělení  $\overline{\Omega}_h$  pomocí trojúhelníků  $\mathcal{T}_h$ . Necht'  $h = h(\mathcal{T}_h)$  je maximální průměr kružnice opsané trojúhelníku  $\mathcal{T}_h$ . Necht'  $\mathcal{T}_h \in \mathfrak{T}_h$  je trojúhelník s vrcholy  $P_i, i = 1, \dots, 3$  a  $R_i$  jsou středy stran vzhledem k  $P_i, i = 1, \dots, 3$ . Necht'  $\{\mathfrak{T}_h\}$  je regulární a taková, že  $\overline{\Omega}_h = \cup_{\mathcal{T}_h \in \mathfrak{T}_h} \mathcal{T}_h$ .

Necht'  $n$  je celé číslo a položíme  $k = t_p/n$  - časový krok. Necht'

$$\mathbf{f}_k^{i+\Theta} = \frac{1}{k} \int_{ik}^{(i+\Theta)k} \mathbf{f}(t) dt, i = 0, \dots, n-1, 0 \leq \Theta \leq 1, \mathbf{f}_k^{i+\Theta} \in V'.$$

Položíme  $\mathbf{u}^0 = 0$ . Jestliže  $\mathbf{u}^0, \dots, \mathbf{u}^i$  jsou známá, definujeme  $\mathbf{u}^{i+1}$  jako prvek prostoru  $V$ . Existenci funkce  $\mathbf{u}^{i+1}$  pro každé pevné  $k$  a každé  $i \geq 0$  lze dokázat. Prostor  $V_s$  je aproximován prostorem lineárních nekonformních funkcí  $V_h$ . Necht'  $\mathcal{V}_h = \{\mathbf{v}_h \mid v_{hi} \in P_1^*, i = 1, 2, \forall \mathcal{T}_h \in \mathfrak{T}_h, \text{spojité ve středech stran trojúhelníku } B_j, j = 1, \dots, m, \text{ a rovné nule v } B_j \text{ ležící na } \Gamma_{uh}, \sum_{i=1,2} \partial v_{hi} / \partial x_i = 0, \mathbf{v}_h = 0, \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_h\}$ , kde  $P_1^*$  je prostor všech nekonformních lineárních polynomů,  $V_h = \{\mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h, \mathbf{v}_h = \mathbf{u}_1 \text{ na } \Gamma_{uh}\}$ .

Buď dáno dělení  $\mathcal{T}_h$  oblasti  $\Omega_h$ . Předpokládejme, že  $\mathbf{u}_h^0$  je dáno v  $V_h$ , a takové, že  $\mathbf{u}_h^0$  jde k 0 v prostoru  $V_h$  jestliže  $h \rightarrow 0_+$ . Dále předpokládejme, že  $\|\mathbf{u}_h^0\|$  je omezená. Pro každé  $k$  a  $h$  definujeme prvky  $\mathbf{u}_h^0, \dots, \mathbf{u}_h^i$  z prostoru  $V_h$ , které jsou odvozeny ze semi-implicitního schématu. Časové derivace jsou aproximovány diferencemi. Jelikož  $\frac{\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i}{k} = \frac{\mathbf{u}_h^{i+\Theta} - \mathbf{u}_h^i}{\Theta k}, 0 \leq \Theta \leq 1$ , potom

$$\mathbf{u}_h^{i+\Theta} = \Theta \mathbf{u}_h^{i+1} + (1 - \Theta) \mathbf{u}_h^i, \mathbf{u}_h^{i+1} = \Theta^{-1} \mathbf{u}_h^{i+\Theta} - \frac{(1 - \Theta)}{\Theta} \mathbf{u}_h^i, 0 \leq \Theta \leq 1.$$

Jelikož kontaktní podmínky vyšetřované úlohy závisí na řešení úlohy, potom  $j_h(\mathbf{v}_h) = j_h(\mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h)$ .

**Schéma**  $(\mathcal{P}_{si})$ : Necht'  $\mathbf{u}_h^0, \dots, \mathbf{u}_h^i$  jsou známa, potom  $\mathbf{u}_h^{i+1}$  je řešení v prostoru  $V_h$  a

$$\begin{aligned} & k^{-1}(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + a_h(\mathbf{u}_h^{i+\Theta}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + b_h(\mathbf{u}_h^i, \mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + \\ & j_h(\mathbf{v}_h) - j_h(\mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + j_{gh}(\mathbf{v}_h) - j_{gh}(\mathbf{u}_h^{i+\Theta}) \geq (\mathbf{F}_h^{i+\Theta}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pro  $\Theta = 1$  máme semi-implicitní schéma, pro  $\Theta = \frac{1}{2}$  Crank-Nicholsonovo schéma.

Necht'  $\|\cdot\|_h$  je norma prostorů  $L^2(\Omega)$  ( $[L^2(\Omega)]^2$ ),  $\|\cdot\|_h$  prostorů  $\mathcal{V}_h$  a  $V_h$ . Podle Temam (1979)  $\|\mathbf{u}_h\|_h \leq d_1 \|\mathbf{u}_h\|_h, \|\mathbf{u}_h\|_h \leq S(h) \|\mathbf{u}_h\|_h \quad \forall \mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h, d_1$  je nezávislá na  $h$ . Dále platí odhady  $\|b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)\| \leq d_1 \|\mathbf{u}_h\|_h \|\mathbf{v}_h\|_h \|\mathbf{w}_h\|_h \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h$ , kde  $d_1$  nezávisí na  $h$ ,  $\|b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)\| \leq S_1(h) \|\mathbf{u}_h\|_h \|\mathbf{u}_h\|_h \|\mathbf{v}_h\|_h \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$ , kde  $S_1(h) \leq d_1 S^2(h), b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h$ .

Dá se ukázat, že  $\mathbf{u}_h^i$  a  $\mathbf{u}_h^{i+1}$ , definovaná schématem  $(\mathcal{P}_{si})$ , pro  $\Theta \geq \frac{1}{2}$  splňují následující podmínky:

**Věta 2:** Necht' užitá triangulace je regulární. Necht'  $k, h$  splňují podmínky  $kS_0(h) \leq d_0$ ,  $kS(h) \leq d_1$ , kde  $d_0, d_1$  jsou kladné konstanty nezávislé na  $k, h$ . Necht'  $\Theta \geq \frac{1}{2}$ . Potom  $\mathbf{u}_h^i$  jsou definovány schematem  $(\mathcal{P}_{si})$  a platí odhady

$$|\mathbf{u}_h^i|^2 \leq c, i = 0, \dots, n, k \sum_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{u}_h^{i+\Theta}\|^2 \leq c, k \sum_{i=0}^{n-1} |\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i|^2 \leq c, \quad (4.2)$$

kde  $c$  jsou konstanty nezávislé na  $k, h$ .

Důkaz je analogický důkazu z Nedoma (1998).

Schéma  $(\mathcal{P}_{si})$  je stabilní a konverguje. Důkazy jsou analogické důkazům v Glowinski et al. (1976), Nedoma (1998), (2003). Jisté potíže souvisí s aproximací podmínky nestlačitelnosti  $\operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0$  (Glowinski et al. (1976), Temam (1979), Nedoma (1998)). Jelikož člen z  $D_{ij}(\mathbf{u})D_{II}^{-1/2}(\mathbf{u})$  vytváří nediferencovatelný funkcionál je možno zavést multiplifikátory  $m = (m_{ij})$ , podobně jako v Duvaut, Lions (1976), Glowinski (2003), Nedoma (1998). Na této myšlence je založen užitý algoritmus. Aproximovaná úloha pak v každém časovém kroku vede na hledání sedlového bodu Lagrangiánu  $\mathcal{L}_h(\mathbf{v}_k, m_n)$ , založeného na Uzawově algoritmu. V každém kroku Uzawova algoritmu se řeší systém nelineárních rovnic s řídkou pozitivnědefinitní maticí. Pro řešení této soustavy je použita metoda sdružených gradientů.

## Poděkování

Tato práce byla řešena v rámci grantu MPO FT-TA/087.



## Literatura

- [1] Duvaut, G., Lions, J.L. (1976). *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin.
- [2] Glowinski, R. (2003). *Finite Element Methods for Incompressible Viscous Flow*. In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L. (Eds), *Handbook of Numerical Analysis for Fluids (Parts 3)*, Elsevier Science B.V.
- [3] Glowinski, R., Lions, J.L., Trémolières, R. (1976). *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. North-Holland, Amsterdam.
- [4] Ionescu, I.R., Sofonea, M. (1993). *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*. Oxford Univ. Press, Oxford.
- [5] Nedoma (1995). Equations of magnetodynamics in incompressible thermo-Bingham's fluid under the gravity effect. *J.Comput. Appl. Math.* 59,109-128.
- [6] Nedoma (1998). *Numerical Modelling in Applied Geodynamics*, J.Wiley&Sons, Chichester.
- [7] Nedoma, J. (2006). On a solvability of contact problems with visco-plastic friction in the thermo-visco-plastic Bingham rheology. *Future Generation Computer Systems* 22, 484-499.
- [8] Temam, R. (1979). *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Methods*. North-Holland, Amsterdam.