Zatížení trubkovité kosti vyplněné kostní dření: numerické řešení 2D modelové úlohy

Nedoma, Jiří
2006

Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Zatížení trubkovité kosti vyplněné kostní dření: numerické řešení 2D modelové úlohy

Jiří Nedoma, Luboš Tomášek

Technical report No. 984

December 2006

Pod Vodárenskou věží 2, 182 07 Prague 8, phone: +420 266 051 111, fax: +420 286 585 789,
e-mail:nedoma@cs.cas.cz

Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Zatížení trubkovité kosti vyplněné kostní dření: numerické řešení 2D modelové úlohy

Jiří Nedoma, Luboš Tomášek

Technical report No. 984

December 2006

Abstrakt:

Je formulován matematický model zatěžované dlouhé kosti, tvořenou kortikální kostí, spogiózní kostí a kostní dření. Matematický model je založen na nestlačitelné vazko-plastické reologii Binghamova typu. Je dokázána existence slabého řešení modelové úlohy a diskutováno numerické řešení úlohy.

Keywords:
Biomechanika, kostní dřeň, vazko-plasticita, Binghamova reologie, kontaktní úloha se třením, variační nerovnice, metoda konečných prvků

1 Úvod

Léčba těžce poškozených kloubů má za sebou více jak 125 let vývoje chirurgických technik, biomechanických studií, materiálových výzkumů a následných léčebných koncepcí. Rozvoj kloubních náhrad během sedmdesátých a osmdesátých let vedl k úspěšným řešením náhrad kyčelního kloubu a následně i kolenního kloubu a dalších lidských kloubů. V průběhu posledních 35 let byl proveden velký počet matematických studií umožňujících matematicky modelovat příslušný lidský kloub a matematicky simulovat jeho funkci a funkci jeho umělé náhrady. Dosud však nebyl studován vliv zatěžovaného dříku totální náhrady v oblasti styku s kostní dření a přenos zatížení do kortikální kosti v této oblasti.

V tomto příspěvku se budeme věnovat numerické analýze úlohy modelující zatěžování dlouhé kosti, tvořené kortikální a spongiózní kostí a kostní dření. Modelová úloha je formulována ve dvou a třech dimenzích. Numerické řešení bude studováno ve dvou dimenzích.

2 Formulace úlohy

Označme $\mathbf{u} = (u_i)$ vektor rychlosti, $D = (D_{ij})$, $D_{ij} = D_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$, tenzor rychlosti deformace, $D^D = (D^D_{ij})$, $D^D_{ij} = D_{ij} - \frac{1}{3}D_{kk}\delta_{ij}$, deviátor rychlosti deformace, kde δ_{ij} je Kroneckerův symbol. Označme $\tau = (\tau_{ij})$ Cauchyho tenzor napětí a jeho deviátor $\tau^D = (\tau^D_{ij})$, $\tau^D_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}$, tj. $\tau^D = \tau + pI_3$, kde $-p$ je sférická část tenzoru napětí, jež fyzikálně má význam tlaku; I_3 označuje identický tenzor. Kromě deviátorů D^D_{ij} a τ^D_{ij} zavedeme ještě deviátor $S^D = (S^D_{ij})$, popisující plastické vlastnosti biomateriálů (Ionescu, Sofonea (1993)). Biomechanický proces v Binghamově reologii definujeme vztahem mezi deviátory napětí a rychlostí deformace, tj. vztahy

$$\tau^D = S^D + 2\hat{\mu}D^D,\ D^D = 2\lambda S^D, \tag{2.1}$$

a

$$f(S^D) = S_{II} - \hat{g}^2 \leq 0, \tag{2.2}$$

kde (2.2) je tzv. Misesův vztah (podmínka), kde $S_{II} = \frac{1}{2} \mid S^D \mid^2 = \frac{1}{2}S^D_{ij}S^D_{ij}$, $\hat{\mu} > 0$ je mez viskozity, $\hat{g}$ je mez plasticity.

Konstitutivní zákon v Binghamově reologii lze zapsat ve tvaru

$$\begin{array}{ll} D_{ij} = (2\hat{\mu})^{-1}(1 - \hat{g}\tau_{II}{}^{-\frac{1}{2}})\tau^D_{ij} & \text{if } \tau_{II}^{\frac{1}{2}} > \hat{g}, \\ D_{ij} = 0 & \text{if } \tau_{II}^{\frac{1}{2}} \leq \hat{g}, \end{array} \tag{2.3}$$

kde $\tau_{II} = \frac{1}{2}\tau^D_{ij}\tau^D_{ij} = \frac{1}{2} \mid \tau^D \mid^2$ je invariant tenzoru napětí.

Zákon (2.3) lze přepsat v jeho inverzním tvaru. Nechť $\mid D \mid = 0$, potom z (2.3) plyne $2^{-1/2} \mid \tau^D \mid \leq \hat{g}$; je-li $\mid D \mid \neq 0$, potom z (2.3) dostáváme $2^{-1/2} \mid \tau^D \mid > \hat{g}$ a $2^{-1/2} \mid \tau^D \mid = 2\hat{\mu} \mid D \mid + \hat{g}$. Odtud, z podmínky nestlačitelnosti a $\tau^D = \tau + pI_3$ plyne

$$\begin{array}{l} \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \hat{g}D_{ij}D_{II}^{-1/2} + 2\hat{\mu}D_{ij} = -p\delta_{ij} + 2^{\frac{1}{2}}\hat{g}D_{ij} \mid D \mid^{-1} + 2\hat{\mu}D_{ij}, \\ \text{kde } D_{II} = \frac{1}{2}D_{ij}D_{ij}, \end{array} \tag{2.4}$$

což je vztah mezi napětím a rychlostí deformace v Binghamově reologii. Pro $\hat{g} = 0$ dostáváme klasickou vazkou nestlačitelnou (Newtonovu) kapalinu; pro malá $\hat{g} > 0$ dostáváme silně vazko-plastické biomateriály blízké klasické vazké kapalině (haematoceles) a pro $\hat{g} >> 0 (\to \infty)$, dostáváme tuhé biomateriály. Vidíme, že Binghamova reologie nám umožňuje simulovat širokou škálu biomateriálů od kapaliny počínaje a tuhými biomateriály konče.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N = 2, 3$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ je oblast zahrnující vazko-plastická tělesa, tvořená kortikální a spongiózní kostí a kostní dření, s hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\tau \cup \Gamma_c$, kde Γ_u je část hranice, kde je předepsána rychlost; Γ_τ je část hranice, kde je předepsáno zatížení a $\Gamma_c \equiv \Gamma_c^{12}$, je kontaktní hranice mezi kostní tkání a kostní dření. Budeme uvažovat Eulerův souřadný systém. Nechť $t \in I \equiv (0, t_p), t_p > 0$, t_p je časové trvání zatížení, $\mathbf{n}$ je vnější jednotková normála k $\partial\Omega$, $u_n = \mathbf{u}.\mathbf{n}$, $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - u_n\mathbf{n}$, $\tau = (\tau_{ij}n_j)$, $\tau_n = \tau_{ij}n_jn_i$, $\tau_t = \tau - \tau_n\mathbf{n}$ jsou normálové a tečné složky vektorů rychlosti a napětí. V dalším užijeme Einsteinovu sumaci.

Úloha zatěžování dlouhé kosti s kostní dření vede na úlohu:

Úloha ($\mathcal{P}$): hledáme funkci $\mathbf{u} : \Omega \times I \to \mathbb{R}^N \times I, N = 2, 3$, a tenzor napětí $\tau_{ij} : \Omega \times I \to \mathbb{R}^{N \times N} \times I$ splňující

$$\rho(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} + f_i \qquad \text{v } \Omega \times I; \tag{2.5}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \qquad \text{v } \Omega \times I; \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \hat{g} D_{ij} D_{II}^{-1/2} + 2\hat{\mu} D_{ij}; \\ &\text{kde } D_{II} \neq 0, \mid \tau^D \mid \leq 2^{\frac{1}{2}} \hat{g} \text{ jestliže } D_{II} = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

s okrajovými podmínkami

$$\tau_{ij} n_j = P_i \quad \text{na } \Gamma_\tau \times I, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) \quad \text{na } \Gamma_u \times I, \tag{2.9}$$

a s bilaterálními kontaktními podmínkami s lokálním zákonem třením na Γ_c^{12}

$$\begin{aligned} &u_n^1 - u_n^2 = 0 \text{ a } \mid \tau_t^{12} \mid \leq \mathcal{F}_c^{12} \mid S^{D12} \mid, \\ &\text{jestliže } \mid \tau_t^{12} \mid < \mathcal{F}_c^{12} \mid S^{D12} \mid \text{ potom } \mathbf{u}_t^1 - \mathbf{u}_t^2 = 0, \\ &\text{jestliže } \mid \tau_t^{12} \mid = \mathcal{F}_c^{12} \mid S^{D12} \mid \text{ potom existuje } \lambda \geq 0 \text{ takové, že } \mathbf{u}_t^1 - \mathbf{u}_t^2 = -\lambda \tau_t^{12}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

kde $\mathcal{F}_c^{12}$ je koeficient tření, $u_n^1 = u_i^1 n_i^1$, $u_n^2 = u_i^2 n_i^2 = -u_i^2 n_i^1$, $\tau_n^{12} = \tau_n^1 = -\tau_n^2$, $\tau_t^{12} = \tau_t^1 = \tau_t^2$, a počáteční podmínku

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = 0. \tag{2.11}$$

Položíme-li $S^D =\mid \tau^D \mid$ a jestliže $\mid \tau^D \mid$ definujeme pomocí (2.4), potom dostáváme $\mid \tau^D \mid= 2^{\frac{1}{2}} \hat{g} + 2\hat{\mu} \mid D(\mathbf{u}) \mid$. Tedy kontaktní podmínka (2.10) závisí na řešení vyšetřované úlohy.

Poznámka 2.1 *Jestliže $S^{D12} =\mid \tau_n^{12} \mid$, potom (2.10) představuje klasický Coulombův zákon tření. Je-li $\mathcal{F}_c^{12} = 0$ potom máme úlohu bez tření.*

3 Variační řešení úlohy

Zavedeme Sobolevovy prostory jako prostory všech vektorových funkcí jež mají zobecněné derivace řádu "s" tvaru $[H^s(\Omega)]^k \equiv H^{s,k}(\Omega)$, kde $H^s(\Omega) \equiv W_2^s(\Omega)$. Jejich normu označíme $\| \,.\, \|_{s,k}$ a skalární součin jako $(.,.)_s$ (pro každé celé k). Položíme $H^{0,k}(\Omega) \equiv L^{2,k}(\Omega)$. Zavedeme prostor $C_0^\infty(\Omega)$ jako prostor všech funkcí v $C^\infty(\Omega)$ s kompaktním nosičem v $\Omega^\iota, \iota = 1, 2$. Označíme $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) = [C_0^\infty(\Omega)]^N$, $N = 2, 3$. Zavedeme prostor $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, jako prostor všech měřitelných funkcí takových, že $\| f \|_{L^p(\Omega)}= (\int_\Omega \mid f(\mathbf{x}) \mid^p d\mathbf{x})^{1/p} < +\infty$. $L^\infty(\Omega)$ je prostor všech měřitelných funkcí s.v. na Ω a takových, že $\| f \|_\infty= \text{ess}_\Omega\text{sup} \mid f(\mathbf{x}) \mid$ je konečné. $L^p(I; X), 1 \leq p < +\infty$, je prostor funkcí $f : I \to X$ takových, že $\| f(.) \|_X \in L^p(I)$. Dále definujeme pro $s \geq 1$ následující prostory a množiny:

$$^1H^{s,N}(\Omega) = \sqcap_{\iota=1}^2 {}^1H^{s,N}(\Omega^\iota) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in H^{s,N}(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ v } \cup_{\iota=1}^2 \Omega^\iota,$$

$$v_n^1 - v_n^2 = 0 \text{ na } \Gamma_c^{12}\}, \; V_s = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in {}^1H^{s,N}(\Omega), \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_u\}, \; V_1 = V, \; V_0 = H.$$

Potom prostor V_s je Hilbertovým prostorem s normou $\| \,.\, \|_{s,N}$, $H^{1,N}(\Omega)$ s normou $\| \,.\, \|_{1,N} \equiv \| \,.\, \|_1$ a $H^{0,N}(\Omega)$ s $\| \,.\, \|_{0,N} \equiv \| \,.\, \|_0$. Položme $^1\mathcal{H}(\Omega) = {}^1H^{1,N}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Duální prostor prostoru V_s označíme $(V_s)'$. Položme $\mathbf{v}' = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$. Zavedeme prostor

$$^1H = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in L^2(I; V_s), \mathbf{v}' \in L^2(I; H), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = 0\}.$$

Nechť $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \in L^2(I; L^{2,N}(\Gamma_\tau))$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in L^2(I; V')$, $\rho, \hat{g}, \hat{\mu}$ jsou počástech konstantní a kladné a nechť $\mathcal{F}_c^{12} \in L^\infty(\Gamma_c^{12})$, $\mathcal{F}_c^{12} \geq 0$ s.v. na Γ_c^{12} a $\mathbf{u}_1 \equiv 0$.

Pro $\mathbf{u},\mathbf{v}\in H^{1,N}(\Omega)$ definujeme

$$\begin{aligned}
&a(\mathbf{u},\mathbf{v})=\textstyle\sum_{\iota=1}^{2}a^{\iota}(\mathbf{u}^{\iota},\mathbf{v}^{\iota})=2\int_{\Omega}\hat{\mu}D_{ij}(\mathbf{u})D_{ij}(\mathbf{v})d\mathbf{x},\\
&(\mathbf{u}',\mathbf{v})=\textstyle\sum_{\iota=1}^{2}(\mathbf{u}^{\iota\prime},\mathbf{v}^{\iota})=\int_{\Omega}\rho\mathbf{u}'\mathbf{v}d\mathbf{x},\\
&S(\mathbf{v})=\textstyle\sum_{\iota=1}^{2}S^{\iota}(\mathbf{v}^{\iota})=\int_{\Omega}f_iv_id\mathbf{x}+\int_{\Gamma_\tau}P_iv_ids\equiv(\mathbf{F},\mathbf{v}),\\
&b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=\textstyle\sum_{\iota=1}^{2}b^{\iota}(\mathbf{u}^{\iota},\mathbf{v}^{\iota},\mathbf{w}^{\iota})=\int_{\Omega}\rho u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_jd\mathbf{x},\\
&j(\mathbf{v})=\textstyle\sum_{\iota=1}^{2}j^{\iota}(\mathbf{v}^{\iota})=2\int_{\Omega}\hat{g}(D_{II}(\mathbf{v}))^{\frac{1}{2}}d\mathbf{x},\\
&j_g(\mathbf{v})=\textstyle\sum_{\iota=1}^{2}j_g^{\iota}(\mathbf{v}^{\iota})=\int_{\Gamma_c^{12}}\mathcal{F}_c^{12}\mid S^{D12}\mid\mid\mathbf{v}_t^1-\mathbf{v}_t^2\mid ds\,.
\end{aligned}$$

Vynásobíme-li (2.5) s (2.7) výrazem $\mathbf{v}-\mathbf{u}(t)$, integrujeme-li přes Ω, užijeme-li Greenovu větu a okrajové podmínky, potom dostáváme variační formulaci úlohy:

Úloha $(\mathcal{P})_v$: Hledáme funkci $\mathbf{u}$ takovou, že $\mathbf{u}\in{}^1H$ a splňující

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_I[(\mathbf{u}'(t),\mathbf{v}-\mathbf{u}(t))+a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}-\mathbf{u}(t))+b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}-\mathbf{u}(t))+\\
&j(\mathbf{v}(t))-j(\mathbf{u}(t))+j_g(\mathbf{v}(t))-j_g(\mathbf{u}(t))]dt\geq\textstyle\int_I S(\mathbf{v}-\mathbf{u}(t))dt\quad\forall\mathbf{v}\in{}^1H,\,t\in I.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

Bilineární forma $a(\mathbf{u},\mathbf{v})$ je symetrická, tj. $a(\mathbf{u},\mathbf{v})=a(\mathbf{v},\mathbf{u})$. Pro $\mathbf{u}\in V$ existuje konstanta $c_B>0$ taková, že $a(\mathbf{u},\mathbf{u})\geq c_B\parallel\mathbf{u}\parallel_{1,N}^2$ pro všechna $\mathbf{u}\in V$. Platí odhady (Temam (1979))

$$\begin{aligned}
&\mid b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\mid\leq c_4\parallel\mathbf{u}\parallel_{1,N}^{1/2}\parallel\mathbf{u}\parallel_{0,N}^{1/2}\parallel\mathbf{w}\parallel_{1,N}^{1/2}\parallel\mathbf{w}\parallel_{0,N}^{1/2}\parallel\mathbf{v}\parallel_{s,N},\,s=\tfrac{1}{2}N,\\
&\qquad\mathbf{u},\mathbf{w}\in{}^1H^{1,N}(\Omega),\mathbf{v}\in H^{s,N}(\Omega),\\
&b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u})=0\text{ a jelikož }\mathcal{F}_c^{12}\in L^\infty(\Gamma_c^{12}),\,\mathcal{F}_c^{12}\geq0,\text{ potom }j_g(\mathbf{u}(t))\geq0\\
&\text{pro }\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in{}^1\mathcal{H}(\Omega)\ b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})+b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})=0,\\
&\text{a tedy }b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})=-b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u})\text{ pro }\mathbf{u},\mathbf{v}\in{}^1\mathcal{H}(\Omega).
\end{aligned}$$

Hlavní výsledek dává následující věta

Věta 1: Nechť $N\geq2,s=\frac{N}{2}$, $\mathbf{f}\in L^2(I;V')$, $\mathbf{P}\in L^2(I;L^{2,N}(\Gamma_\tau))$, $\hat{g},\hat{\mu}$ jsou po částech konstantní, $\mathcal{F}_c^{12}\in L^\infty(\Gamma_c^{12}),\mathcal{F}_c^{12}\geq0$ s.v. na Γ_c^{12}. Potom existuje funkce $\mathbf{u}$ taková, že

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}\in L^2(I;V)\cap L^\infty(I;H),\mathbf{u}'\in L^2(I;(V_s)'),\\
&\mathbf{u}(\mathbf{x},t_0)=0
\end{aligned}$$

a splňující (3.1).

Důkaz: je založen na myšlence užití regularizace (Duvaut, Lions (1976)):
(i) regularizace $j(\mathbf{v}(t))$

$$j_\varepsilon(\mathbf{v}(t))=\frac{2}{1+\varepsilon}\int_\Omega\hat{g}(D_{II}(\mathbf{v}(t)))^{(1+\varepsilon)/2}d\mathbf{x},\quad\varepsilon>0\text{ a }(j_\varepsilon'(\mathbf{v}),\mathbf{v})\geq0.\tag{3.2}$$

(ii) Jelikož funkcionál $j_g(\mathbf{v})$ není diferencovatelný v Gâteauxově smyslu, zavedeme jeho regularizaci $j_{g\varepsilon}(\mathbf{v})$. Definujme funkci $\psi_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\psi_\varepsilon(y)=\sqrt{(y^2+\varepsilon^2)}-\varepsilon$, pro kterou platí $y\to\mid y\mid$. Funkce ψ_ε je diferencovatelná a platí

$$\mid\mid y\mid-\psi_\varepsilon(\mid y\mid)\mid<\varepsilon\quad\forall y\in\mathbb{R},\varepsilon\geq0.$$

Funkcionál $j_g(\mathbf{v})$ regularizujeme jeho regularizací $j_{g\varepsilon}(\mathbf{v})$, definovanou

$$j_{g\varepsilon}(\mathbf{v}(t))=\int_{\Gamma_c^{12}}\mathcal{F}_c^{12}S^{D12}\psi_\varepsilon(\mid\mathbf{v}_t^1-\mathbf{v}_t^2\mid)ds\text{ a platí }(j_{g\varepsilon}'(\mathbf{v}),\mathbf{v})\geq0\,.\tag{3.3}$$

Třetí regularizaci získáme zavedením vazkého členu $\eta(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t),\mathbf{v}))_s$, kde $s=\frac{N}{2}$ a η je kladné číslo. Pro $N=2$ je $s=1$ a ${}^1H^{s,N}(\Omega)={}^1H^{1,N}(\Omega),V_s=V$ a vazký člen je možno zanedbat.

Potom řešíme regularizovanou úlohu:

Úloha $(\mathcal{P}_r)_v$: najít $\mathbf{u}_{\varepsilon\eta} \in {}^1H$ takovou, že

$$\begin{array}{l}\int_I [(\mathbf{u}'_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + a(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + \\ +b(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + \eta((\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)))_s + j_\varepsilon(\mathbf{v}(t)) - \\ -j_\varepsilon(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t)) + j_{g\varepsilon}(\mathbf{v}(t)) - j_{g\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t))]dt \geq \int_I S(\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\varepsilon\eta}(t))dt \quad \forall \mathbf{v} \in {}^1H.\end{array} \tag{3.4}$$

Metoda důkazu je analogická důkazu Věty 3 v Nedoma (1995), (2006):
(1) důkaz existence řešení (3.4) je založen na Galerkinově metodě;
(2) nalezneme apriorní odhady I and II nezávislé na ε a η;
(3) dokážeme limitní procesy Galerkinovy approximace (tj. přes m) a pro $\varepsilon \to 0, \eta \to 0$;
(4) jednoznačnost řešení (3.1) lze dokázat pouze pro $N = 2$.

4 Numerické řešení

Pro numerickou analýzu se omezíme pouze na 2D případ. Nechť Ω_h je approximace Ω v $\mathbb{R}^2$ a nechť její hranice je $\partial\Omega_h = \Gamma_{uh} \cup \Gamma_{\tau h} \cup \Gamma_{ch}$. Nechť $\mathfrak{T}_h$ je dělení $\overline{\Omega}_h$ pomocí trojúhelníků $\mathcal{T}_h$. Nechť $h = h(\mathcal{T}_h)$ je maximální průměr kružnice opsané trojúhelníku $\mathcal{T}_h$. Nechť $\mathcal{T}_h \in \mathfrak{T}_h$ je trojúhelník s vrcholy $P_i, i = 1, ..., 3$ a R_i jsou středy stran vzhledem k $P_i, i = 1, ..., 3$. Nechť $\{\mathfrak{T}_h\}$ je regulární a taková, že $\overline{\Omega}_h = \cup_{\mathcal{T}_h \in \mathfrak{T}_h} \mathcal{T}_h$.

Nechť n je celé číslo a položme $k = t_p/n$ -časový krok. Nechť

$$\mathbf{f}_k^{i+\Theta} = \frac{1}{k} \int_{ik}^{(i+\Theta)k} \mathbf{f}(t)dt, i = 0, ..., n-1, \ 0 \leq \Theta \leq 1, \ \mathbf{f}_k^{i+\Theta} \in V'.$$

Položme $\mathbf{u}^0 = 0$. Jestliže $\mathbf{u}^0, .., \mathbf{u}^i$ jsou známá, definujeme $\mathbf{u}^{i+1}$ jako prvek prostoru V. Existenci funkce $\mathbf{u}^{i+1}$ pro každé pevné k a každé $i \geq 0$ lze dokázat. Prostor V_s je aproximován prostorem lineárních nekonformních funkcí V_h. Nechť $\mathcal{V}_h = \{\mathbf{v}_h \mid v_{hi} \in P_1^*, i = 1, 2, \forall \mathcal{T}_h \in \mathfrak{T}_h$, spojité ve středech stran trojúhelníku $B_j, j = 1, .., m$, a rovné nule v B_j ležící na Γ_{uh}, $\sum_{i=1,2} \partial v_{hi}/\partial x_i = 0, \ \mathbf{v}_h = 0, \mathbf{x} \in \Omega \backslash \overline{\Omega}_h\}$, kde P_1^* je prostor všech nekonformních lineárních polynomů, $V_h = \{\mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h, \mathbf{v}_h = \mathbf{u}_1$ na $\Gamma_{uh}\}$.

Buď dáno dělení $\mathcal{T}_h$ oblasti Ω_h. Předpokládejme, že $\mathbf{u}_h^0$ je dáno v V_h, a takové, že $\mathbf{u}_h^0$ jde k 0 v prostoru V_h jestliže $h \to 0_+$. Dále předpokládejme, že $\| \mathbf{u}_h^0 \|$ je omezená. Pro každé k a h definujeme prvky $\mathbf{u}_h^0, ..., \mathbf{u}_h^i$ z prostoru V_h, které jsou odvozeny ze semi-implicitního schematu. Časové derivace jsou aproximovány diferencemi. Jelikož $\frac{\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i}{k} = \frac{\mathbf{u}_h^{i+\Theta} - \mathbf{u}_h^i}{\Theta k}$, $0 \leq \Theta \leq 1$, potom

$$\mathbf{u}_h^{i+\Theta} = \Theta \mathbf{u}_h^{i+1} + (1 - \Theta)\mathbf{u}_h^i, \ \mathbf{u}_h^{i+1} = \Theta^{-1}\mathbf{u}_h^{i+\Theta} - \frac{(1 - \Theta)}{\Theta}\mathbf{u}_h^i, \quad 0 \leq \Theta \leq 1.$$

Jelikož kontaktní podmínky vyšetřované úlohy závisí na řešení úlohy, potom $j_h(\mathbf{v}_h) = j_h(\mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h)$.

Schéma $(\mathcal{P}_{si})$: Nechť $\mathbf{u}_h^0, ..., \mathbf{u}_h^i$ jsou známa, potom $\mathbf{u}_h^{i+1}$ je řešení v prostoru V_h a

$$\begin{array}{l}k^{-1}(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + a_h(\mathbf{u}_h^{i+\Theta}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + b_h(\mathbf{u}_h^i, \mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + \\ j_h(\mathbf{v}_h) - j_h(\mathbf{u}_h^{i+\Theta}) + j_{gh}(\mathbf{v}_h) - j_{gh}(\mathbf{u}_h^{i+\Theta}) \geq (\mathbf{F}_h^{i+\Theta}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+\Theta}) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h.\end{array} \tag{4.1}$$

Pro $\Theta = 1$ máme semi-implicitní schéma, pro $\Theta = \frac{1}{2}$ Crank-Nicholsonovo schéma.

Nechť $| \, . \, |_h$ je norma prostorů $L^2(\Omega)$ $([L^2(\Omega)]^2)$, $\| \, . \, \|_h$ prostorů $\mathcal{V}_h$ a V_h. Podle Temam (1979) $| \mathbf{u}_h |_h \leq d_1 \| \mathbf{u}_h \|_h$, $\| \mathbf{u}_h \|_h \leq S(h) \mid \mathbf{u}_h |_h \ \forall \mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h$, d_1 je nezávislá na h. Dále platí odhady
$| b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) | \leq d_1 \| \mathbf{u}_h \|_h \| \mathbf{v}_h \|_h \| \mathbf{w}_h \|_h \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h$,
kde d_1 nezávisí na h,
$| b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) | \leq S_1(h) \mid \mathbf{u}_h |_h \| \mathbf{u}_h \|_h | \mathbf{v}_h |_h \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$, kde $S_1(h) \leq d_1 S^2(h)$, $b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = 0$ $\forall \mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h$.

Dá se ukázat, že $\mathbf{u}_h^i$ a $\mathbf{u}_h^{i+1}$, definovaná schematem $(\mathcal{P}_{si})$, pro $\Theta \geq \frac{1}{2}$ splňují následující podmínky:

Věta 2: Nechť užitá triangulace je regulární. Nechť k, h splňují podmínky $kS_0(h) \leq d_0$, $kS(h) \leq d_1$, kde d_0, d_1 jsou kladné konstanty nezávislé na k, h. Nechť $\Theta \geq \frac{1}{2}$. Potom $\mathbf{u}_h^i$ jsou definovány schematem $(\mathcal{P}_{si})$ a platí odhady

$$| \mathbf{u}_h^i |^2 \leq c, i = 0, .., n, \ k \sum_{i=0}^{n-1} \| \mathbf{u}_h^{i+\Theta} \|^2 \leq c, \ k \sum_{i=0}^{n-1} | \mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i |^2 \leq c, \tag{4.2}$$

kde c jsou konstanty nezávislé na k, h.

Důkaz je analogický důkazu z Nedoma (1998).

Schéma $(\mathcal{P}_{si})$ je stabilní a konverguje. Důkazy jsou analogické důkazům v Glowinski et al. (1976), Nedoma (1998), (2003). Jisté potíže souvisí s aproximací podmínky nestlačitelnosti div $\mathbf{v}_h = 0$ (Glowinski et al. (1976), Temam (1979), Nedoma (1998)). Jelikož člen z $D_{ij}(\mathbf{u})D_{II}^{-1/2}(\mathbf{u})$ vytváří nediferencovatelný funkcionál je možno zavést multiplikátory $m = (m_{ij})$, podobně jako v Duvaut, Lions (1976), Glowinski (2003), Nedoma (1998). Na této myšlence je založen užitý algoritmus. Aproximovaná úloha pak v každém časovém kroku vede na hledání sedlového bodu Lagrangiánu $\mathcal{L}_h(\mathbf{v}_k, m_n)$, založeného na Uzawově algoritmu. V každém kroku Uzawova algoritmu se řeší systém nelineárních rovnic s řídkou pozitivnědefinitní maticí. Pro řešení této soustavy je použita metoda sdružených gradientů.

Poděkování

Tato práce byla řešena v rámci grantu MPO FT-TA/087.

Literatura

[1] Duvaut, G., Lions, J.L. (1976). Inequalities in Mechanics and Physics, Springer, Berlin.

[2] Glowinski, R. (2003). Finite Element Methods for Incompressible Viscous Flow. In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L. (Eds), Handbook of Numerical Analysis for Fluids (Parts 3), Elsevier Science B.V.

[3] Glowinski, R., Lions, J.L., Trémolières, R. (1976). Numerical Analysis of Variational Inequalities. North-Holland, Amsterdam.

[4] Ionescu, I.R., Sofonea, M. (1993). Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity. Oxford Univ. Press, Oxford.

[5] Nedoma (1995). Equations of magnetodynamics in incompressible thermo-Bingham's fluid under the gravity effect. J.Comput. Appl. Math. 59,109-128.

[6] Nedoma (1998). Numerical Modelling in Applied Geodynamics, J.Wiley&Sons, Chichester.

[7] Nedoma, J. (2006). On a solvability of contact problems with visco-plastic friction in the thermo-visco-plastic Bingham rheology. Future Generation Computer Systems 22, 484-499.

[8] Temam, R. (1979). Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Methods. North-Holland, Amsterdam.