



národní  
úložiště  
šedé  
literatury

## **Matematický model zatěžování kolenního systému časově proměnnými silami**

Nedoma, Jiří  
2006

Dostupný z <http://www.nusl.cz/ntk/nusl-36012>

Dílo je chráněno podle autorského zákona č. 121/2000 Sb.

Tento dokument byl stažen z Národního úložiště šedé literatury (NUŠL).

Datum stažení: 05.05.2024

Další dokumenty můžete najít prostřednictvím vyhledávacího rozhraní [nusl.cz](http://nusl.cz) .



**Institute of Computer Science**  
**Academy of Sciences of the Czech Republic**

## **Matematický model zatěžování kloubního systému časově proměnnými silami**

Jiří Nedoma

Technical report No. 981

November 2006



**Institute of Computer Science**  
**Academy of Sciences of the Czech Republic**

## **Matematický model zatěžování kloubního systému časově proměnnými silami**

Jiří Nedoma

Technical report No. 981

November 2006

### Abstract:

This paper represents the Technical Report of the Project of the Ministry of Industry and Trade of the Czech Republic No. FT-TA/087 and deals with constructions of quasi-static and dynamic models of human joints and their total replacements. Moreover, this paper deals with the numerical analyses of the quasi-static and the dynamic non-linear contact problems with Coulombian friction in linear elasticity in the quasi-static case and/or in visco-elasticity with short memory. The human skeletal systems are modelled by elastic or visco-elastic bodies of arbitrary shapes being in mutual contacts. The Coulombian law of friction on contact boundaries is assumed. In the quasi-static model the finite element technique and the semi-discrete scheme are assumed and in the dynamic case the semi-implicit scheme in time and the FE approximation in space are used. The error estimates, the convergences of the numerical approximations and the optimal error estimates are developed and discussed. Numerical simulation of Coulombian frictions are based on the Tresca models of friction. The problems of contact problems of Tresca type are formulated as mixed variational problems with Lagrange multipliers in 2D and 3D and the algorithms of finding the saddle point are based on the primal-dual active set strategies and/or on the Uzawa algorithm and conjugate gradient method with constrains in every step of Uzawa algorithm.

### Keywords:

Biomechanics, human joints, total joint replacements, linear elasticity, visco-elasticity with short memory, Coulomb and Tresca models of friction, FEM, semi-discrete scheme, semi-implicit scheme

Part I

**Kvazi-statické zatěžování lidských  
kloubů**

# 1 Úvod

Pro navigovanou operační techniku je vývoj numerických modelů zaměřen na optimální metody a optimální algoritmy, neboť navigovaná operační technika vyžaduje velmi rychlé algoritmy. Velmi rychlé algoritmy jsou zatím vyvíjeny v teoretické oblasti. To však vyžaduje vyvíjet i nové přístupy a nové metody řešení kontaktních kvazi-statických a dynamických úloh, založené na metodě hledání sedlového bodu a metodě "primal-dual active set strategy-PDAS". Podstatným problémem je otázka vstupních parametrů kostní tkáně a měkkých tkání, jakož i určení geometrie vyšetřovaného kloubního systému v daný časový okamžik. Možné určení výše zmíněných vstupních parametrů kostní tkáně a měkkých tkání může být založeno na řešení obrácených úloh teorie vazkopružnosti s užitím dat z MRI. To však bude vyžadovat samostatný výzkumný projekt. Určení geometrie operovaného kloubního systému je závislé od dat navigované operační techniky a přístupu k těmto datům. Vyvíjená metodika a vyvíjený algoritmus jsou vhodné i pro modelování všech lidských kloubů a jejich umělých náhrad a simulaci jejich funkce.

## 2 Formulace kvazi-statické úlohy v lineární pružnosti

### 2.1 Model

Uvažujme systém "s" pružných těles tvořící kloubní systém. Předpokládejme, že kloubní systém se deformuje relativně pomalu, takže setrvačné síly je možno zanedbat.

Nechť  $\Omega = \cup_{l=1}^s \Omega^l \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , je oblast tvořená kloubním systémem a předpokládejme, že její hranice je dostatečně hladká. Nechť  $\partial\Omega = \cup_{l=1}^s \partial\Omega^l$ ,  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_\tau \cup \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_c$ , kde  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_u = {}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u$ , je část hranice kde je kloubní systém podepřen (modelováno Dirichletovými okrajovými podmínkami),  $\Gamma_\tau$ ,  $\Gamma_\tau = {}^1\Gamma_\tau \cup {}^2\Gamma_\tau$ , je část hranice, kde je předepsáno zatížení,  $\Gamma_0$  je část hranice, kde je předepsána podmínka symetrie, resp. oboustranný kontakt,  $\Gamma_c$  je hranice kontaktu mezi dvěma sousedními plochami kloubního systému ve kterém se obě části dotýkají a po sobě pohybují,  $\Gamma_c = \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$ ,  $\Gamma_c^{kl} = \Gamma_c^k \cap \Gamma_c^l$ ,  $k, l = \{1, \dots, s\}$ ,  $k \neq l$ .

Nechť  $\mathbf{x} = (x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $N = 2, 3$ , jsou souřadnice v kartézském systému souřadnic,  $t \in I$ , kde  $I = (0, t_p)$ ,  $t_p > 0$ , je daný časový interval. V každém časovém okamžiku hledáme rozložení vektoru posunutí  $\mathbf{u} = (u_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $N = 2, 3$ , ve vyšetřované oblasti  $\cup_{l=1}^s \Omega^l$ , tj.  $\mathbf{u}^t(t) = (u_i^t(t))$ ,  $i = 1, \dots, N$ , v  $\Omega^l$ ,  $l = 1, \dots, s$ . Tenzor malé deformace je definován

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = (e_{ij}(\mathbf{u})), \quad e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

Tenzor napětí je definován vztahem mezi napětím a deformací

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u})), \quad \tau_{ij}(\mathbf{u}) = c_{ijkl}^{(0)} e_{kl}(\mathbf{u}), \quad i, j, k, l = 1, \dots, N \quad \text{v } \Omega, \quad (2.2)$$

kde operátor pružnosti  $\mathbb{C}^{(0)}$  splňuje podmínky

- (i)  $\mathbb{C}^{(0)} : \Omega \times \mathbb{S}^N \rightarrow \Omega \times \mathbb{S}^N$ ,
- (ii) existuje konstanta  $c_0 > 0$  taková, že  $\|(\mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - \mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2))\| \leq c_0 \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\| \quad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{S}^N$ , a.e.  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,
- (iii) existuje konstanta  $c_1 > 0$  taková, že  $(\mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - \mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2)) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \geq c_1 \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\| \quad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{S}^N$ , a.e.  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,
- (iv) pro  $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^N$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  je měřitelné v  $\Omega$ ,
- (v) předpokládejme, že operátor  $\mathbb{C}^{(0)}$  je potenciální, tj. existuje funkcionál  $\Phi : \Omega \times \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{R}$  takový, že jeho Gâteauxův diferenciál  $D\Phi(\mathbf{x}; \sigma, \tau) = (\mathbb{C}^{(0)}\sigma, \tau)_Q \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^N$ , s.v.  $\mathbf{x} \in \Omega$ , kde  $(\mathbb{C}^{(0)}\sigma, \tau)_Q = \sum_{i=1}^s \int_{\Omega^i} (\mathbb{C}^{(0)}\sigma)_{ij} \tau_{ij} d\mathbf{x}$ .  
Functionál  $\Phi$  reprezentuje hustotu deformační energie.
- (vi) Zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in Q$ ,

kde  $\mathbb{S}^N$  je prostor tenzorů druhého řádu v  $\mathbb{R}^N$ , a  $Q = \{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in L^{2,N \times N}(\Omega) \mid \tau_{ij} = \tau_{ji}, i, j = 1, \dots, N \}$ .

Budeme předpokládat, že v počátečním stavu jsou obě části kloubního systému v kontaktu a jejich hranice kontaktu je rovna  $\Gamma_c = \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$ . Dále budeme předpokládat, že neznámá kontaktní zóna  $\Gamma_c(t) = \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}(t)$  v každém čase  $t \in I$  po deformaci bude zahrnuta v  $\Gamma_c$  (omezené zóně kontaktu). Necht  $\mathbf{n} = (n_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , je vnější jednotková normála k  $\partial\Omega$ . Potom pro každé  $\iota = 1, \dots, s$ , položíme  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^k$  resp.  $-\mathbf{n}^l$  na  $\partial\Omega^k \cap \partial\Omega^\iota$ ,  $k, l = 1, \dots, s$ ,  $k \neq l$ ,  $\mathbf{n}^k = -\mathbf{n}^l$ , a  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^\iota$  na  $\partial\Omega^\iota \cap (\partial\Omega^\iota \setminus \Gamma_c)$ ,  $\iota = 1, \dots, s$ . Položíme  $\mathbf{u}^\iota = \mathbf{u}|_{\Omega^\iota}$ ,  $\tau^\iota = \tau|_{\Omega^\iota}$ ,  $\iota = 1, \dots, s$ . Potom pro každé  $\iota = 1, \dots, s$ , definujeme normálové a tečné složky vektoru posunutí a vektoru napětí vztahy  $u_n = \mathbf{u}^\iota \cdot \mathbf{n}^\iota = (u_i^\iota n_i^\iota)$ ,  $\mathbf{u}_t^\iota = \mathbf{u}^\iota - u_n^\iota \mathbf{n}^\iota$ ,  $\tau_n^\iota = \tau_{ij}^\iota n_i^\iota n_j^\iota$ ,  $\tau^\iota = (\tau_{ti}^\iota)$ ,  $\tau_{ii}^\iota = \tau_{ij}^\iota n_j^\iota - \tau_n^\iota n_i^\iota$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ .

Uvažujme rovinné či prostorové úlohy kloubního systému tvaru:

**Úloha** ( $\mathcal{P}$ ): Necht  $N = 2, 3, s \geq 2$ ,  $I = (0, t_p)$ ,  $t_p > 0$ , je časový interval. Hledáme vektor posunutí  $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times I \rightarrow \mathbb{R}^N$  splňující

$$\frac{\partial \tau_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} + F_i^\iota = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad \iota = 1, \dots, s, \quad (t, \mathbf{x}) \in \Omega^\iota(t) = I \times \Omega, \quad (2.4)$$

$$\tau_{ij} n_j = P_i, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in {}^1\Gamma_\tau(t) = I \times \cup_{\iota=1}^s ({}^1\Gamma_\tau \cap \partial\Omega^\iota), \quad (2.5)$$

$$\tau_{ij} n_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in {}^2\Gamma_\tau(t) = I \times \cup_{\iota=1}^s ({}^2\Gamma_\tau \cap \partial\Omega^\iota), \quad (2.6)$$

$$u_j = u_{2i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in {}^1\Gamma_u(t) = I \times \cup_{\iota=1}^s ({}^1\Gamma_u \cap \partial\Omega^\iota), \quad (2.7)$$

$$u_j = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in {}^2\Gamma_u(t) = I \times \cup_{\iota=1}^s ({}^2\Gamma_u \cap \partial\Omega^\iota), \quad (2.8)$$

$$u_n^k - u_n^l \leq d^{kl}, \quad \tau_n^k = \tau_n^l = \tau_n^{kl} \leq 0, \quad (u_n^k - u_n^l - d^{kl}) \tau_n^{kl} = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in \Gamma_c(t) = I \times \cup_{k,l} (\Gamma_c^{kl}), \quad (2.9)$$

$$\|\tau_t^{kl}(\mathbf{u})\| \leq \mathcal{F}_c^{kl} |\tau_n^{kl}(\mathbf{u})|,$$

$$\|\tau_t^{kl}(\mathbf{u})\| < \mathcal{F}_c^{kl} |\tau_n^{kl}(\mathbf{u})| \Rightarrow \mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l = 0, \quad (2.10)$$

$$\|\tau_t^{kl}(\mathbf{u})\| = \mathcal{F}_c^{kl} |\tau_n^{kl}(\mathbf{u})| \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \theta \geq 0 \text{ tak, že } \mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l = -\theta \tau_t^{kl}(\mathbf{u}),$$

$$u_n = 0, \quad \tau_t = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in \Gamma_0(t) = I \times \cup_{\iota=1}^s (\Gamma_0 \cap \partial\Omega^\iota), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.12)$$

kde  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{u}_2$  a  $d^{kl}$  jsou dané funkce,  $d^{kl} \geq 0$ ,  $\mathbf{u}_0$  splňuje např. statickou kontaktní úlohu s nebo bez tření apod. podle charakteru úlohy a kde  $\mathcal{F}_c^{kl} = \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u})$  je koeficient Coulombova tření, je-li roven nule, potom máme kontaktní úlohu bez tření. Díky synoviální tekutině v kloubu, potom tento typ úloh s dostatečnou přesností popisuje funkci zdravého kloubu. V dalším budeme předpokládat, že  $d^{kl} = 0$ .

## 2.2 Variační formulace úlohy

Necht  $L^2(\Omega)$ ,  $L^\infty(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^N$ , jsou standardní prostory funkcí a  $L^\infty(I; X)$ ,  $W^{k,p}(I; X)$ ,  $H^k(I; X) \equiv W^{k,2}(I; X)$ , kde  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , a  $X$  je Banachův prostor, jsou Bochnerovy prostory (viz Nečas (1967), Adams (1975)). Necht  $L^{2,N}(\Omega) = [L^2(\Omega)]^N$ ,  $H^{1,N}(\Omega) = [H^1(\Omega)]^N$ . Definujme prostor virtuálních posunutí

$$V_0^s = \{\mathbf{v}^\iota \in H^{1,N}(\Omega) \mid \mathbf{v}^\iota = 0 \text{ na } \Gamma_u \cap \partial\Omega^\iota, \mathbf{v}^\iota \cdot \mathbf{n}^\iota = 0 \text{ na } \Gamma_0 \cap \partial\Omega^\iota\}, \quad (2.13)$$

$$V_0 = \prod_{\iota=1}^s V_0^s, \quad V = \mathbf{u}_2 + V_0,$$

a množinu přípustných posunutí

$$K = \{\mathbf{v} \in V \mid v_n^k - v_n^l \leq d^{kl} \text{ na } \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}\}. \quad (2.14)$$

Definujeme skalární součin na  $V_0$  vztahem

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{e}(\mathbf{v}))_Q = \sum_{\iota=1}^s \int_{\Omega^\iota} e_{ij}(\mathbf{u}^\iota) e_{ij}(\mathbf{v}^\iota) d\mathbf{x}.$$

Předpokládejme, že objemové a povrchové síly  $\mathbf{F}, \mathbf{P}$  a koeficient Coulombova tření  $\mathcal{F}_c^{kl}$  splňují

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\in W^{1,1}(I; L^{2,N}(\Omega)), \mathbf{P} \in W^{1,1}(I; L^{2,N}({}^1\Gamma_\tau)), \mathcal{F}_c^{kl} \in L^\infty(\Gamma_c^{kl}), \\ \mathbf{u}_0 &\in V, \mathbf{u}_2 \in L^{2,N}({}^1\Gamma_u). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Označme

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}) &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_\Omega \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{{}^1\Gamma_\tau} \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in \bar{I}, \\ j(\mathbf{v}) &= \sum_{k,l} \int_{\Gamma_c^{kl}} \mathcal{F}_c^{kl} |\tau_n(\mathbf{u})| \|\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l\| ds. \end{aligned} \quad (2.16)$$

a položme

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left( \mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u})), \mathbf{e}(\mathbf{v}) \right)_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0.$$

Potom řešíme následující variační úlohu:

**Úloha  $(\mathcal{P})_v$ :** hledáme pole posunutí  $\mathbf{u} : \bar{I} \rightarrow K$  takové, že

$$a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in K, \text{ s.v. } t \in I, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (2.18)$$

Úloha vede na dva typy úloh - koercivní a semi-koercivní. Úloha je koercivní jestliže všechna  $\Gamma_u^\iota \neq \emptyset$  a jsou semi-koercivní pro  $\Gamma_u = \emptyset$  nebo jestliže alespoň jedna část  $\Gamma_u = \cup_{\iota=1}^s \Gamma_u^\iota$ , řekněme  $\Gamma_u^m$ , je nulová. V těchto případech definujeme prostor posunutí tuhých těles

$$\mathcal{R} = \{ \mathbf{v} \in \prod_{\iota=1}^s H^{1,N}(\Omega) \mid |\mathbf{v}| = 0 \}, \quad (2.19)$$

kde semi-norma  $|\mathbf{v}|$  je definována vztahem

$$|\mathbf{v}| = \left( \sum_{\iota=1}^s \int_{\Omega^\iota} e_{ij}(\mathbf{v}^\iota) e_{ij}(\mathbf{v}^\iota) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

Jestliže  $\mathcal{R} \cap V = \{0\}$ , potom jde o koercivní typ kontaktní úlohy, je-li  $\mathcal{R} \cap V \neq \{0\}$  potom jde o semi-koercivní typ kontaktní úlohy.

**Věta 1:** Nechť platí předpoklady (2.3), (2.15) a  $d^{kl} \equiv 0$ . Potom existuje řešení  $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(I; K)$  úlohy  $(\mathcal{P})_v$ .

Důkaz je modifikací důkazů z Andersson (2000), Eck et al. (2005).

## 3 Numerické řešení

### 3.1 Konečně prvková aproximace

Oblast kloubního systému  $\Omega$  aproximujeme pomocí trojúhelníků v případě  $N = 2$  a pomocí čtyřstěnů pro  $N = 3$ . Buď  $\{\mathcal{T}_h\}$  regulární konečněprvkové dělení oblasti  $\bar{\Omega} = \cup_{\iota=1}^s \bar{\Omega}^\iota$ , s hranicemi  $\partial\Omega^\iota, \iota = 1, \dots, s$ . Uzly ležící na  $\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$  patří k oběma dělením  $\mathcal{T}_h^k$  a  $\mathcal{T}_h^l$ .  $\mathcal{T}_h$  je regulární jestliže všechny  $\mathcal{T}_h^\iota, \iota = 1, \dots, s$  jsou regulární. Nechť  $V_{0h} \subset V_0$  je konečněprvkový prostor lineárních prvků odpovídající dělení  $\mathcal{T}_h$ ,  $V_h = \mathbf{u}_{2h} + V_{0h}$ . Nechť  $K_h = K \cap V_h$  je konečněprvková podmnožina prostoru  $V_h$ . Prvek prostoru  $V_{0h}$  je spojitá počástech lineární funkce s nulovými hodnotami v uzlech ležícími na  $\bar{\Gamma}_u$ . Prvek z  $K_h$  je spojitá počástech lineární vektorová funkce s nulovými hodnotami na  $\bar{\Gamma}_u$  a takovými, že normálové složky v uzlech na  $\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$  a  $\bar{\Gamma}_0$  jsou nekladné. Potom budeme řešit následující úlohu:

**Úloha**  $(\mathcal{P})_h$  : Hledáme pole posunutí  $\mathbf{u}_h : I \rightarrow V_h$  takové, že  $\mathbf{u}_h(t) \in K_h$  pro s.v.  $t \in I$  a

$$a(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h(t)) + j(\mathbf{v}_h) - j(\mathbf{u}_h(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h(t))_V \quad (3.1)$$

$$\forall \mathbf{v}_h \in K_h, \text{ s.v. } t \in I,$$

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_{0h}(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

**Věta 2:** Necht' předpoklady věty 1 jsou splněny. Potom úloha  $(\mathcal{P})_h$  má řešení  $\mathbf{u}_h \in W^{1,\infty}(I; K_h)$ .

Důkaz je podobný důkazu věty 1.

V dalším budeme předpokládat, že Coulombovo tření v čase  $t$  závisí na vektoru posunutí z předchozích časových hladin. Úloha potom vede na řešení úlohy s Trescovým modelem tření (s daným třením) v každé časové hladině, kde  $g_c^{kl} = \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_h(t - \delta t, \dots, t - r\delta t)) |\tau_n^{kl}(\mathbf{u}_h(t - \delta t, \dots, t - r\delta t))|$ ,  $r \geq 1$ , má význam tzv. "slip limit".

### 3.2 Analýza Trescova modelu

Necht' časový interval  $\bar{I} = [0, t_p]$  je rozdělen na  $M$  subintervalů délky  $\delta t \equiv \Delta t = t_p/M$ ,  $M > 0$ . Předpokládejme, že  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(t_i)$  je řešení úlohy (2.17), (2.18) s  $g_c^{kl}$  pro každé  $t = t_i$ ,  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, M$ , a  $\mathbf{u}_h \equiv \mathbf{u}_h(t_i)$  řešení úlohy (3.1), (3.2) pro každé  $t = t_i$ , s  $g_{ch}^{kl} = \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_h(t_i - \Delta t, \dots, t_i - r\Delta t)) |\tau_n^{kl}(\mathbf{u}_h(t_i - \Delta t, \dots, t_i - r\Delta t))|$ ,  $r \geq 1$ . Pro jednoduchost píšme  $\mathbf{u}_h(t_i - \Delta t)$  místo  $\mathbf{u}_h(t_i - \Delta t, \dots, t_i - r\Delta t)$ .

**Věta 3:** Úloha  $(\mathcal{P})_v$  s  $g_{ch}^{kl} = \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_h(t_i - \Delta t)) |\tau_n^{kl}(\mathbf{u}_h(t - \Delta t))|$  pro s.v.  $t \in I$  má jediné slabé řešení. Řešení je minimizer potenciální energie

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{e}(\mathbf{v})) + j(\mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V$$

nad množinou  $K$  a pro s.v.  $t \in I$ , kde

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{e}(\mathbf{v})) &= \int_0^1 D\Phi(\mathbf{e}(t\mathbf{v}), \mathbf{e}(\mathbf{v})) dt = \int_0^1 (\mathbb{C}^{(0)}(t\mathbf{e}(\mathbf{v})), \mathbf{e}(\mathbf{v}))_Q dt \geq \\ &\geq \frac{1}{2}c_1 \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{L^2, N(\Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Důkaz je podobný důkazu věty 7.1 (Haslinger et al. (1996)).

Podobně se dokáže i existence přibližného řešení  $\mathbf{u}_h$  pro s.v.  $t \in I$ , (viz např. Nedoma (1987), (1998))

#### Odhad chyb řešení

Položme  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_h(t)$  v (2.17) a  $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h(t) \in K_h$  v (3.1) a sečtěme. Po úpravách a užitím (2.3), potom pro každé  $\mathbf{v}_h \in K_h$ , s.v.  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} c_1 \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_V^2 &\leq (\mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}(t))) - \mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_h(t))), \mathbf{e}(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{e}(\mathbf{u}_h(t)))_Q = \\ &= (\mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}(t))) - \mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_h(t))), \mathbf{e}(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{e}(\mathbf{v}_h(t)))_Q + \\ &+ (\mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}(t))), \mathbf{e}(\mathbf{v}_h(t)) - \mathbf{e}(\mathbf{u}(t)))_Q - (\mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}(t))), \mathbf{e}(\mathbf{u}_h(t)) - \mathbf{e}(\mathbf{u}(t)))_Q - \\ &- (\mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_h(t))), \mathbf{e}(\mathbf{v}_h(t)) - \mathbf{e}(\mathbf{u}_h(t)))_Q + j(\mathbf{v}_h(t)) - j(\mathbf{u}(t)). \end{aligned}$$

Jelikož

$$\begin{aligned} &- (\mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}(t))), \mathbf{e}(\mathbf{u}_h(t)) - \mathbf{e}(\mathbf{u}(t)))_Q \leq \\ &\leq - (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t))_V + j(\mathbf{u}_h(t)) - j(\mathbf{u}(t)), \\ &- (\mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_h(t))), \mathbf{e}(\mathbf{v}_h(t)) - \mathbf{e}(\mathbf{u}_h(t)))_Q \leq \\ &\leq - (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}_h(t))_V + j(\mathbf{v}_h(t)) - j(\mathbf{u}_h(t)), \end{aligned}$$

potom



$$\begin{aligned}
& c_1 \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_V^2 \leq \\
& \leq (\mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}(t))) - \mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_h(t))), \mathbf{e}(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{e}(\mathbf{v}_h(t)))_Q + \\
& \quad + R(t; \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

kde reziduum  $R(t; \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t))$  je definováno vztahem

$$\begin{aligned}
R(t; \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) &= (\mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{u}(t))), \mathbf{e}(\mathbf{v}_h(t)) - \mathbf{e}(\mathbf{u}(t)))_Q + \\
& \quad + j(\mathbf{v}_h(t)) - j(\mathbf{u}(t)) - (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t))_V.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Nechť  $t \in I$ , integrací (3.3) přes  $t$  od 0 do  $t$ , užitím počátečních podmínek (2.18), (3.2) a (2.3), dostáváme

$$\begin{aligned}
& c_1 \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_V^2 - c_1 \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_V^2 \leq \\
& \leq \int_0^t c_0 \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau)\|_V \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{v}_h(\tau)\|_V d\tau + \int_0^t |R(\tau; \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau))| d\tau.
\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_V^2 \leq \\
& \leq c \left[ \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_V^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{v}_h(\tau)\|_V^2 d\tau + \int_0^t |R(\tau; \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau))| d\tau \right]
\end{aligned}$$

Užitím Gronwellova lematu, dostáváme

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I; V)} \leq \\
& \leq c \left[ \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_V + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{L^\infty(I; V)} + \|R(\cdot; \mathbf{v}_h - \mathbf{u})\|_{L^1(I; V)}^{1/2} + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_V \right].
\end{aligned}$$

Jelikož  $\mathbf{v}_h \in H^1(I; K_h)$  je libovolné, potom

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I; V)} \leq \\
& \leq c \inf_{\mathbf{v}_h \in C^1(I; K_h)} \left[ \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_V + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{L^\infty(I; V)} + \|R(\cdot; \mathbf{v}_h - \mathbf{u})\|_{L^1(I; V)}^{1/2} \right] + \\
& \quad + c \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_V.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Optimální odhad chyby a analýza konvergence metody

K odvození odhadu chyby a analýzy konvergence metody vyjdeme z nerovnosti (3.5), navíc zavedeme dodatečné podmínky regularity. Odhadneme reziduum  $R(t; \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t))$ , definované v (3.4). Integroujeme první člen po částech, uijíme (2.4) – (2.6), (2.16), potom dostáváme

$$\begin{aligned}
R(t; \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) &= \int_{\partial\Omega} \tau(t) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) ds - \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau(t) \cdot (\mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) dx + \\
& + j(\mathbf{v}_h(t)) - j(\mathbf{u}(t)) - (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t))_V - \int_{\Gamma} \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) ds = \\
& = \int_{\cup_{k,i} \Gamma_c^{kl}} \tau_n(t) [v_{hn}^k(t) - v_{hn}^l(t) - (u_n^k(t) - u_n^l(t))] ds + \\
& + \int_{\cup_{k,i} \Gamma_c^{kl}} \{\tau_t(t) [\mathbf{v}_{th}^k(t) - \mathbf{v}_{th}^l(t) - (\mathbf{u}_t^k(t) - \mathbf{u}_t^l(t))] + \\
& + g_c^{kl} [\mathbf{v}_{th}^k(t) - \mathbf{v}_{th}^l(t) - (\mathbf{u}_t^k(t) - \mathbf{u}_t^l(t))]\} ds.
\end{aligned}$$

Jelikož

$$\begin{aligned}
& |j(\mathbf{v}_h(t)) - j(\mathbf{u}(t))| \leq \\
& \leq \|g_c^{kl}\|_{L^\infty(\cup_{k,i} \Gamma_c^{kl})} \|\mathbf{v}_{th}^k(t) - \mathbf{v}_{th}^l(t) - (\mathbf{u}_t^k(t) - \mathbf{u}_t^l(t))\|_{L^1, N(\cup_{k,i} \Gamma_c^{kl})} \leq \\
& \leq \|g_c^{kl}\|_{L^\infty(\cup_{k,i} \Gamma_c^{kl})} \|\mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)\|_V,
\end{aligned}$$

potom

$$|R(t; \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t))| \leq c \|\mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)\|_{L^2, N(\cup_{k,i} \Gamma_c^{kl})}.$$

Odtud a (3.5) dostáváme

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^\infty(I; V)} \leq \\
& \leq c \inf_{\mathbf{v}_h \in C^1(I; K_h)} \left[ \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_h(t)\|_{L^\infty(I; V)} + \|\mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)\|_{L^2, N(\cup_{k,i} \Gamma_c^{kl})}^{1/2} \right].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Za předpokladu dodatečných podmínek regularity

$$\mathbf{u} \in L^2(I; H^{2,N}(\Omega)), \quad \mathbf{u}|_{(\cup_{k,l}(\Gamma_c^{kl}))_i} \in L^2(I; H^{2,N}(\cup_{k,l}(\Gamma_c^{kl}))_i), \\ 1 \leq i \leq i_0, \quad \mathbf{u}_0 \in H^{2,N}(\Omega),$$

kde předpokládáme, že každá  $\Gamma_c^{kl}$  je aproximována  $i_0$  lineárními segmenty v  $2D$  případě a  $i_0$  trojúhelníky v  $3D$  případě. Potom dostáváme optimální odhad chyby

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^\infty(I;V)} = O(h). \quad (3.7)$$

Konvergence přibližného řešení odvodíme za předpokladu jisté regularity řešení  $\mathbf{u} \in K$ . Z (3.4) plyne

$$\begin{aligned} |R(t; \mathbf{v}_h - \mathbf{u})| &\leq c_1 [\|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}(I;V)} \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_V + \\ &+ \|g_c^{kl}\|_{L^\infty(\cup_{k,l}(\Gamma_c^{kl}))} \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_{L^{1,N}(\cup_{k,l}(\Gamma_c^{kl}))} + \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(I;V)} \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_V] \leq \\ &\leq c_1 \left[ \|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}(I;V)} + \|g_c^{kl}\|_{L^\infty(\cup_{k,l}(\Gamma_c^{kl}))} + \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(I;V)} \right] \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_V \leq \\ &\leq c_1 \left[ \|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}(I;V)} + \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(I;V)} \right] \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_V \leq c \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_V \\ &\quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad \text{s.v. } t \in I, \end{aligned} \quad (3.8)$$

jelikož

$$\begin{aligned} |j(\mathbf{v}_h) - j(\mathbf{u})| &\leq \|g_{ch}^{kl}\|_{L^\infty(\cup_{k,l}(\Gamma_c^{kl}))} \|\mathbf{v}_{ht}^k - \mathbf{v}_{ht}^l - (\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l)\|_{L^{1,N}(\cup_{k,l}(\Gamma_c^{kl}))} \leq \\ &\leq \|g_{ch}^{kl}\|_{L^\infty(\cup_{k,l}(\Gamma_c^{kl}))} \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_V, \end{aligned}$$

a kde konstanta  $c_1$  závisí na  $\|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}(I;V)}$ ,  $\|\mathbf{F}\|_{L^\infty(I;L^{2,N}(\Omega))}$ ,  $\|\mathbf{P}\|_{L^\infty(I;L^{2,N}(\Gamma_\tau))}$ ,  $\|g_{ch}^{kl}\|_{L^\infty(\cup_{k,l}(\Gamma_c^{kl}))}$ . Potom z (3.5) dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I;V)} &\leq \\ &\leq c \inf_{\mathbf{v}_h \in C^1(I;K_h)} \left[ \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_V + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{L^\infty(I;V)} + \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_{L^1(I;V)}^{1/2} \right] + \\ &\quad + c \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_V. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Jelikož  $[C^\infty(\bar{\Omega})]^N \cap K$  je husté v  $K$  vzhledem k normě prostoru  $V$ , potom  $H^1(I; [C^\infty(\bar{\Omega})]^N \cap K)$  je husté v  $H^1(I; K)$  vzhledem k normě prostoru  $H^1(I; V)$  (Han, Sofonea (2002)).

Nechť  $\varepsilon > 0$  a nechť  $\mathbf{u}_{0h} = r_h \mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_0 \in [C(\bar{\Omega})]^N$ ,  $r_h$  je konečně-dimensionální interpolační operátor, potom  $\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_V \rightarrow 0$  as  $h \rightarrow 0$ . Podobně jako v (Han, Sofonea (2002)) se dá ukázat, že pro dostatečně malá  $h$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - r_h \hat{\mathbf{u}}\|_{H^1(\bar{I};V)} &\leq \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|_{H^1(\bar{I};V)} + \|\hat{\mathbf{u}} - r_h \hat{\mathbf{u}}\|_{H^1(\bar{I};V)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + ch \|\hat{\mathbf{u}}\|_{H^1(\bar{I};H^2(\Omega))} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Položme  $r_h \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_h \in H^1(\bar{I}; K_h)$ , potom  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H^1(I;V)} \rightarrow 0$  jestliže  $h \rightarrow 0$ . Z (3.9) pak plyne konvergence

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I;V)} \rightarrow 0 \quad \text{jestliže } h \rightarrow 0.$$

Tím jsme dokázali

**Tvrzení 1:** Za výše uvedených předpokladů a za předpokladu, že  $\mathbf{u}_{0h} \in K_h$  takové, že

$$\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_V \rightarrow 0 \quad \text{jestliže } h \rightarrow 0, \quad (3.10)$$

potom

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I;V)} \rightarrow 0 \quad \text{jestliže } h \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

tj. semi-diskrétní metoda konverguje.

### 3.3 Algoritmus

Užitý algoritmus je založen na smíšené formulaci kontaktní úlohy a primárně duální metodě aktivních množin pro jednostranný kontakt - PDAS a Uzawova algoritmu.

Smíšená variační formulace pro Trescův model

Smíšená variační formulace pro Trescův model vede na úlohu, kdy v každém časovém okamžiku budeme řešit smíšenou variační úlohu s daným třením, tedy v každém časovém okamžiku budeme hledat sedlový bod.

Zavedeme prostor Lagrangeových multiplikátorů  $M$ . Podle předpokladu  $\Omega$  je oblast s dostatečně hladkou hranicí  $\partial\Omega$ , potom  $W = \left[ H^{\frac{1}{2}}(\cup_{k,l}\Gamma_c^{kl}) \right]^N \equiv H^{\frac{1}{2},N}(\cup_{k,l}\Gamma_c^{kl})$ . Označme  $H^{-\frac{1}{2}}(\cup_{k,l}\Gamma_c^{kl})$  a  $W'$ , duální prostory k  $H^{\frac{1}{2}}(\cup_{k,l}\Gamma_c^{kl})$  a  $W$ . Definujme prostor Lagrangeových multiplikátorů  $M = M_n \times M_t \subseteq W'$ , kde

$$\begin{aligned} M_n &= \{ \mu_n \in W' : \mu_n \geq 0 \}, \\ M_t &= \{ \mu_t^{kl} \in L^2(\cup_{k,l}\Gamma_c^{kl}) : |\mu_t^{kl}| \leq 1 \text{ s.v. na } \cup_{k,l}\Gamma_c^{kl}, \mu_t^{kl} = 0 \text{ vně } \sup_{k,l}\Gamma_c^{kl} \}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Definujme bilineární formy  $b : V \times M$ ,  $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  a funkcionál  $(\mathbf{f}, \mathbf{v})$  vztahy

$$\begin{aligned} b(\mu, \mathbf{v}) &= \langle \mu_n, v_n^k - v_n^l \rangle_{\cup_{k,l}\Gamma_c^{kl}} + \int_{\cup_{k,l}\Gamma_c^{kl}} g_c^{kl} \mu_t^{kl} (\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l) ds, \\ a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \left( \mathbb{C}^{(0)}(\mathbf{e}(\mathbf{v})), \mathbf{e}(\mathbf{v}) \right)_Q, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V, \end{aligned} \quad (3.13)$$

kde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\cup_{k,l}\Gamma_c^{kl}}$  je duální párování v  $H^{-\frac{1}{2}}(\cup_{k,l}\Gamma_c^{kl})$ . Potom v každém časovém okamžiku řešíme úlohu:

**Úloha**  $(\mathcal{P}_{sp})_0$ : hledáme dvojici  $(\mathbf{u}, \lambda) \in V \times M$ , s.v.  $t \in I$ , takovou, že

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mu, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \mathbf{v} \in V, \\ b(\mu - \lambda, \mathbf{v}) &\leq 0 & \mu \in M. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Úloha  $(\mathcal{P}_{sp})_0$  je ekvivalentní úloze (viz Ekeland, Temam (1976))

**Úloha**  $(\mathcal{P}_{sp})$ : hledáme dvojici  $(\mathbf{w}, \lambda) \in V \times M$ , s.v.  $t \in I$ , takovou, že

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mu) \leq \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, \lambda) \quad \forall (\mathbf{v}, \mu) \in V \times M, \text{ s.v. } t \in I, \quad (3.15)$$

kde  $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mu)$  je Lagrangian,  $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mu) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mu, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v})$ .

**Věta 4:** Nechť  $\Gamma_c \cap \Gamma_u = \emptyset$ ,  $\Gamma_c \cap \Gamma_0 = \emptyset$ . Potom existuje jediný sedlový bod  $(\mathbf{u}, \lambda)$  funkcionálu  $\mathcal{L}$  na  $V \times M$ , kde  $\mathbf{w}$  je řešení primární úlohy a platí

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}, \quad \lambda_n^{kl} = -\tau_n^{kl}(\mathbf{u}), \quad g_c^{kl} \lambda_t^{kl} = -\tau_t^{kl}(\mathbf{u}),$$

kde  $\mathbf{u} \in K$  řeší primární úlohu  $(\mathcal{P})_v$  pro s.v.  $t \in I$ .

Důkaz je založen na formulaci (3.14) a Greenově lematu, viz např. Haslinger et al. (1996), Hlaváček (2006a).

Označme  $\Gamma_{ca}^{kl} \subset \Gamma_c^{kl}$  aktuální kontaktní množinu, tj.  $u_n^k - u_n^l = 0$  na  $\Gamma_{ca}^{kl}$  a  $u_n^k - u_n^l < 0$  na  $\Gamma_c^{kl} \setminus \Gamma_{ca}^{kl}$ . Zavedeme odpovídající dělení oblasti  $\bar{\Omega}$  a  $\bar{\Gamma}_c$  jako výše. Předpokládejme, že každá  $\Gamma_c^{kl}$  je tvořena konečným počtem lineárních částí  $\Gamma_{cp}^{kl}$ ,  $p = 1, \dots, \bar{p}$  v případě  $N = 2$  a konečným počtem rovinných částí  $\Gamma_{cp}^{kl}$ ,  $p = 1, \dots, \bar{p}$  v případě  $N = 3$ . V dalším budeme předpokládat, že body na  $\Gamma_c^{kl}$  jsou identické.

V případě  $N = 2$  každá část  $\Gamma_{cp}^{kl}$  je rozdělena  $m = m(h_p)$  body  $s_i, i = 1, \dots, m$ ,  $m = m(h_p)$ , a s intervaly  $q_r = (s_r, s_r + h_p)$ ,  $r = 0, 1, \dots, m-1$ ,  $h_p = \text{const.}$ . Množina  $M_n$  je aproximována množinou

$$\begin{aligned} M_{hn} &= \cup_{k,l} \cup_{p=1}^{\bar{p}} M_{hn}^{kl(p)}, \\ M_{hn}^{kl(p)} &= \{ \mu_{hn}^{kl} \in C(\cup_{kl} \Gamma_{cp}^{kl}) : \mu_{hn}^{kl}|_{q_r} \in P_1(q_r), r=0,1,\dots,m-1, \mu_{hn}^{kl} \geq 0 \}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

a množina  $M_t$  množinou

$$\begin{aligned} M_{Ht} &= \cup_{k,l} \cup_{p=1}^{\bar{p}} M_{Ht}^{kl(p)}, \\ M_{Ht}^{kl(p)} &= \left\{ \mu_{Ht}^{kl} \in L^\infty(\cup_{k,l} \Gamma_{cp}^{kl}) : \mu_{Ht}^{kl}|_{(y_r, y_{r+1})} \in P_0((y_r, y_{r+1})), \right. \\ &\quad \left. |\mu_{Ht}^{kl}| \leq 1, \mu_{Ht}^{kl} = 0 \text{ vně } \text{supp } g_{ch}^{kl} \right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde  $y_r$  jsou středy intervalů  $q_r$ ,  $g_{ch}^{kl} \in M_{hn}^{kl(p)}$  je lineární interpolace funkce  $g_c^{kl}$ . Funkce  $\mu_{hn}^{kl}$  jsou spojitě a počástech lineární, funkce  $\mu_{Ht}^{kl}$  jsou po částech konstantní.

V případě  $N = 3$  každá část  $\Gamma_c^{kl}$  je tvořena konečným počtem rovinných částí  $\Gamma_{cp}^{kl}, p = 1, \dots, \bar{p}$ , a podobně jako výše předpokládáme, že na  $\Gamma_c^{kl}$  uzly dělení  $\mathcal{T}_h^k$  a  $\mathcal{T}_h^l$  jsou identické a

$$\Gamma_{cp}^{kl} = \cup_r \Delta_r, \quad \text{kde } \Delta_r \text{ jsou strany čtyřstěnu odpovídající dělení } \mathcal{T}_h^l, l = 1, \dots, s.$$

Množinu  $M_n$  aproximujeme množinou

$$\begin{aligned} M_{hn} &= \cup_{k,l} \cup_{p=1}^{\bar{p}} M_{hn}^{kl(p)}, \\ M_{hn}^{kl(p)} &= \{ \mu_{hn}^{kl} \in C(\cup_{k,l} \Gamma_{cp}^{kl}) : \mu_{hn}^{kl}|_{\Delta_r} \in P_1(\Delta_r), \forall \Delta_r \subset \Gamma_{cp}^{kl}, \mu_{hn}^{kl} \geq 0 \}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

a množinu  $M_t$  množinou

$$\begin{aligned} M_{Ht} &= \cup_{k,l} \cup_{p=1}^{\bar{p}} M_{Ht}^{kl(p)}, \\ M_{Ht}^{kl(p)} &= \left\{ \mu_{Ht}^{kl} \in \mathbb{L}_H^{kl(p)} : \|\mu_{Ht}^{kl}\| \leq 1, \mu_{Ht}^{kl} = 0 \text{ na } \cup_{kl} (\Gamma_c^{kl} \setminus \text{supp } g_{ch}^{kl}) \right\}, \\ \mathbb{L}_H^{kl(p)} &= \left\{ \mu^{kl} \in [L^\infty(\cup_{k,l} \Gamma_{cp}^{kl})]^2 : \mu^{kl}|_{\Delta_H} \in [P_0(\Delta_H)]^2 \quad \forall \Delta_H \subset \cup_{k,l} \Gamma_{cp}^{kl} \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde  $\mathcal{T}_H^{kl(p)}$  je dělení  $\Gamma_{cp}^{kl}$  na trojúhelníky  $\Delta_H$  takové, že  $\max_{\mathcal{T}_H^{kl(p)}}(\text{diam } \Delta_H) = H$  a kde  $g_{ch}^{kl} \in M_{hn}$  je interpolace funkce  $g_c^{kl}$ . Funkce  $\mu_{hn}$  jsou spojitě a po částech lineární, funkce  $\mu_{Ht}$  jsou po částech konstantní.

Bilineární formu  $b(.,.)$  aproximujeme

$$b(\mu_{hH}, \mathbf{v}_h) = \langle \mu_{hn}^{kl}, v_{hn}^k - v_{hn}^l \rangle_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_{ch}^{kl} \mu_{tH}^{kl} (\mathbf{v}_{ht}^k - \mathbf{v}_{ht}^l) ds. \quad (3.20)$$

Potom řešíme

**Úloha**  $(\mathcal{P}_{sp})_{h0}$ : hledáme dvojici  $(\mathbf{u}_h, \lambda_{hH}) \in V_h \times M_{hn} \times M_{Ht} = V_h \times M_{hH}$ , s.v.  $t \in I$ , takovou, že

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mu_{hH}, \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) & \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mu_{hH} - \lambda_{hH}, \mathbf{v}_h) &\leq 0 & \mu_{hH} \in M_{hH}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

resp.

**Úloha**  $(\mathcal{P}_{sp})_h$ : hledáme dvojici  $(\mathbf{u}_h, \lambda_{hH}) \in V_h \times M_{hn} \times M_{Ht}$ , s.v.  $t \in I$ , takovou, že

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{hH}(\mathbf{u}_h, \mu_{hH}) &\leq \mathcal{L}_{hH}(\mathbf{u}_h, \lambda_{hH}) \leq \mathcal{L}_{hH}(\mathbf{v}_h, \lambda_{hH}) \\ &\quad \forall (\mathbf{v}_h, \mu_{hH}) \in V_h \times M_{hn} \times M_{Ht}, \quad \text{s.v. } t \in I, \end{aligned} \quad (3.22)$$

kde aproximovaný Lagrangian pro  $(\mathbf{v}_h, \mu_{hH}) \in V_h \times M_{hn} \times M_{Ht}$  je definován

$$\mathcal{L}_{hH}(\mathbf{v}_h, \mu_{hH}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) + b(\mu_{hH}, \mathbf{v}_h). \quad (3.23)$$

**Tvrzení 2:** Nechť  $(\mathbf{u}, \lambda)$  je řešení (3.14) a  $(\mathbf{u}_h, \lambda_{hH}) \in V_h \times M_{hn} \times M_{Ht}$  je řešení (3.21) pro s.v.  $t \in I$ . Potom existuje kladná konstanta  $c$  nezávislá na  $h, H$  splňující

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + \|\lambda - \lambda_{hH}\|_{-1/2, \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \leq \\ & \leq c \{ \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \inf_{\mu_h \in M_{hn} \times M_{Ht}} \|\lambda - \mu_h\|_{-1/2, \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} + \\ & \quad + (\max(b(\lambda_h, \mathbf{u}), 0))^{\frac{1}{2}} + (\max(b(\lambda, \mathbf{u}_h), 0))^{\frac{1}{2}} \}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Důkaz je paralelní důkazu z (Haslinger et al. (1996), Hild, Laborde (2002)).

Člen  $\max(b(\lambda, \mathbf{u}_h), 0)$  má velký význam při určení diskrétní podmínky nepronikání na aktuální kontaktní množině  $\Gamma_{ca}^{kl} \subset \Gamma_c^{kl}$ , tj.  $u_n^k - u_n^l = 0$  na  $\Gamma_{ca}^{kl}$  a  $u_n^k - u_n^l < 0$  na  $\Gamma_c^{kl} \setminus \Gamma_{ca}^{kl}$ .

Dá se ukázat, že přibližné řešení konverguje.

**Věta 5:** Nechť  $h \rightarrow 0_+$  tehdy a jen tehdy když  $H \rightarrow 0_+$ . Nechť průnik  $\cup_{k,l} \overline{\Gamma^{kl}} \cap \overline{\Gamma_u}$  sestává z konečného počtu bodů. Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h & \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{v } H^{1,N}(\Omega), \\ \lambda_H & \rightarrow \lambda \quad \text{v } L^2(\cup_{k,l} \Gamma^{kl}) \text{ slabě.} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Primárně duální metoda aktivních množin - PDAS

Jako vhodný algoritmus v každém časovém okamžiku je možno použít primárně duální metodu aktivních množin (primal-dual active set strategy (PDAS)) (viz Hüeber et al. (2005), Hüeber, Wohlmuth (2005), Hlaváček (2006b)).

(i) **Případ**  $N = 2$ .

Označme uzlové body  $\mathbf{u}_h$  jako  $\mathbf{U}$ ,  $\lambda_{hn}$  jako  $\mathbf{\Lambda}_{hn}$  a  $\lambda_{Ht}$  jako  $\mathbf{\Lambda}_{Ht}$ . Definujme matice  $\mathbb{B}_{hn}, \mathbb{B}_{Ht}, \mathbb{F}$  vztahy

$$\begin{aligned} (\mathbb{B}_{hn} \mathbf{U})_r & = (U_{hn}^k(s_r) - U_{hn}^l(s_r)), \quad (\mathbb{B}_{Ht} \mathbf{U})_r = \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \chi_r g_{ch}^{kl} (\mathbf{U}_{Ht}^k - \mathbf{U}_{Ht}^l) ds, \\ (\mathbf{F}, \mathbf{v}) & = \mathbf{v}^T \mathbb{F}, \end{aligned}$$

kde  $\chi_r$  je charakteristická funkce intervalu  $(y_r, y_{r+1})$ ,  $r = 0, 1, \dots, m-1$ . Aproximace prvního členu v (3.20) je

$$\begin{aligned} \langle \mu_{hn}^{kl}, v_{hn}^k - v_{hn}^l \rangle_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} & = \sum_{k,l} \sum_{p=1}^{\bar{p}} \sum_{r=0}^{m(h_p)} M_r^{kl} k_r \mathcal{V}_r^{kl}, \\ M_r^{kl} & = \mu_{hn}^{kl}(s_r), \quad \mathcal{V}_r^{kl} = v_{hn}^k(s_r) - v_{hn}^l(s_r), \\ k_0 & = k_m = h_p/2, \quad k_r = h_p, \quad r = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Potom aproximaci sedlového bodu v každé časové hladině můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \mathbf{U} + \mathbb{B}_{hn}^T (\text{diag } \kappa) \mathbf{\Lambda}_{hn} + \mathbb{B}_{Ht} \mathbf{\Lambda}_{Ht} - \mathbb{F} & = 0, \\ \mathbf{\Lambda}_{hn} - (\mathbf{\Lambda}_{hn} + \rho \mathbb{B}_{hn} \mathbf{U})^+ & = 0, \\ \mathbf{\Lambda}_{Ht} - \pi (\mathbf{\Lambda}_{Ht} + \rho \mathbb{B}_{Ht} \mathbf{U}) & = 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

kde  $(\cdot)^+$  je nezáporná část  $(\cdot)$  a  $\pi$  je projekce intervalu  $[-1, 1]$ , tj. pro  $x \in \mathbb{R}$

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{pro } |x| < 1, \\ \text{sgn } x & \text{pro } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Označme  $\mathbf{w} = (\mathbf{U}, \mathbf{\Lambda}_{hn}, \mathbf{\Lambda}_{Ht})^T$ , potom (3.26) můžeme přepsat do tvaru

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}) := \begin{pmatrix} \mathbb{A} \mathbf{U} + \mathbb{B}_{hn}^T (\text{diag } \kappa) \mathbf{\Lambda}_{hn} + \mathbb{B}_{Ht} \mathbf{\Lambda}_{Ht} - \mathbb{F} \\ \mathbf{\Lambda}_{hn} - (\mathbf{\Lambda}_{hn} + \rho \mathbb{B}_{hn} \mathbf{U})^+ \\ \mathbf{\Lambda}_{Ht} - \pi (\mathbf{\Lambda}_{Ht} + \rho \mathbb{B}_{Ht} \mathbf{U}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Rovnice (3.27) je nelineární a může být řešena Newtonovou metodou. V Hintermüller et al. (2003), (2004), (2005), Hlaváček (2006b)) je ukázáno, že zobecněná Newtonova metoda (generalized

(semismooth) Newton method) velmi rychle konverguje a je tedy vhodná i v tomto případě. Dokonce je ukázáno, že poslounost iterací

$$\mathbf{w}^{(j+1)} = \mathbf{w}^{(j)} - G(\mathbf{w})^{-1} \mathcal{F}(\mathbf{w}^{(j)}), j = 0, 1, \dots$$

konverguje superlineárně k  $\mathbf{w}^*$  s  $\mathcal{F}(\mathbf{w}^*) = 0$ , přičemž  $\|\mathbf{w}^{(0)} - \mathbf{w}^*\|$  je dostatečně malé za předpokladu, že  $\mathcal{F}$  má zobecněnou (slant) derivaci a existuje inverzní zobrazení  $G(\mathbf{w})^{-1}$ . V Hintermüller et al. (2003) zobecněná Newtonova metoda je nazývána jako "primal-dual active set strategy".

Definujme aktivní a inaktivní množiny s ohledem na multiplikátory  $\Lambda_{hn}$  a  $\Lambda_{Ht}$  vztahy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\Lambda_{hn}}(\mathbf{w}_1) &= \{s_r : (\Lambda_{hn})_r + \rho(\mathbb{B}_{hn}\mathbf{U})_r > 0\}, \\ \mathcal{I}_{\Lambda_{hn}}(\mathbf{w}_1) &= \{s_r : (\Lambda_{hn})_r + \rho(\mathbb{B}_{hn}\mathbf{U})_r \leq 0\}, \quad \mathbf{w}_1 = (\mathbf{U}, \Lambda_{hn})^T, \end{aligned} \quad (3.28)$$

a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\Lambda_{Ht}}(\mathbf{w}_2) &= \{(y_r, y_{r+1}) : |(\Lambda_{Ht})_r + \rho(\mathbb{B}_{Ht}\mathbf{U})_r| < 1\}, \\ \mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}^+(\mathbf{w}_2) &= \{(y_r, y_{r+1}) : |(\Lambda_{Ht})_r + \rho(\mathbb{B}_{Ht}\mathbf{U})_r| \geq 1\}, \\ \mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}^-(\mathbf{w}_2) &= \{(y_r, y_{r+1}) : |(\Lambda_{Ht})_r + \rho(\mathbb{B}_{Ht}\mathbf{U})_r| \leq -1\}, \quad \mathbf{w}_2 = (\mathbf{U}, \Lambda_{Ht})^T. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nelineární funkci  $\mathcal{F}(\mathbf{w})$  zapíšeme ve tvaru

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}) = G(\mathbf{w})\mathbf{w} - (\mathbb{F}, 0, \chi(\mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}^+(\mathbf{w})) - \chi(\mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}^-(\mathbf{w})))^T, \quad (3.30)$$

kde  $G(\mathbf{w})$  je zobecněná (slant) derivace funkce  $\mathcal{F}$ . Existence inverzního zobrazení  $G^{-1}(\mathbf{w})$  je otevřený problém, proto v Hlaváček (2006b) byl zaveden redukovaný operator tření, označme jej  $G_{\mathbb{B}_{Ht}}(\mathbf{w})$ , který je již invertabilní a definovaný

$$G_{\mathbb{B}_{Ht}}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}_{Ht}^T \\ -\chi(\mathcal{A}_{\Lambda_{Ht}}(\mathbf{w}))\rho\mathbb{B}_{Ht} & \chi(\mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}^+(\mathbf{w})) + \chi(\mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}^-(\mathbf{w})) \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

a který je bijektivní pro každé  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

Potom pro každou časovou hladinu můžeme aplikovat algoritmus AU-PDAS (alternující Uzawa - PDAS algoritmus, viz Hlaváček (2006b)):

#### Algoritmus AU-PDAS:

Nechť  $\mathbf{w}^{(0)} = (\mathbf{U}^{(0)}, \Lambda_{hn}^{(0)}, \Lambda_{Ht}^{(0)})^T$ ,  $\rho \in (10^3, 10^4)$  jsou známy. Jestliže  $\mathbf{w}^{(j)} = (\mathbf{U}^{(j)}, \Lambda_{hn}^{(j)}, \Lambda_{Ht}^{(j)})$  je známo, potom

STEP (1): určíme  $\mathbf{w}^{(j+1/2)} = (\mathbf{U}^{(j+1/2)}, \Lambda_{hn}^{(j+1/2)}, \Lambda_{Ht}^{(j+1/2)})^T$  postupem:

- (i)  $(\Lambda_{hn}^{(j+1/2)})_r = \pi\left(\left(\Lambda_{hn}^{(j)}\right)_r + \rho(\mathbb{B}_{hn}\mathbf{U}^{(j)})_r\right)$ ,  $r = 0, \dots, m-1$ ;
- (ii) určíme množiny  $\mathcal{A}_{\Lambda_{hn}}(\mathbf{w}_1^{(j)})$ ,  $\mathcal{I}_{\Lambda_{hn}}(\mathbf{w}_1^{(j)})$  pro  $\mathbf{w}_1^{(j)} = (\mathbf{U}^{(j)}, \Lambda_{hn}^{(j)})^T$  užitím (3.28);
- (iii) určíme  $\mathbf{w}_1^{(j+1/2)} = (\mathbf{U}^{(j+1/2)}, \Lambda_{hn}^{(j+1/2)})^T$  ze soustavy
 
$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbf{U}^{(j+1/2)} + \mathbb{B}_{hn}^T(\text{diag } \kappa)\Lambda_{hn}^{(j+1/2)} &= \mathbb{F} - B_{Ht}^T\Lambda_{Ht}^{(j+1/2)} \\ s_r \in \mathcal{A}_{\Lambda_{hn}}(\mathbf{w}_1^{(j)}) &\Rightarrow \left(\mathbb{B}_{hn}^{(j+1/2)}\mathbf{U}^{(j+1/2)}\right)_r = 0, \\ s_r \in \mathcal{I}_{\Lambda_{hn}}(\mathbf{w}_1^{(j)}) &\Rightarrow \left(\Lambda_{hn}^{(j+1/2)}\right)_r = 0. \end{aligned}$$

STEP (2): určíme  $\mathbf{w}^{(j+1)} = (\mathbf{U}^{(j+1)}, \Lambda_{hn}^{(j+1)}, \Lambda_{Ht}^{(j+1)})^T$  postupem:

- (i)  $\left(\Lambda_{Ht}^{(j+1)}\right)_r = \left(\left(\Lambda_{Ht}^{(j+1/2)}\right)_r + \rho \left(\mathbb{B}_{hn} \mathbf{U}^{(j+1/2)}\right)_r\right)^+, r = 0, \dots, m;$   
(ii) určíme množiny  $\mathcal{A}_{\Lambda_{Ht}}\left(\mathbf{w}_2^{(j+1/2)}\right), \mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}^+\left(\mathbf{w}_2^{(j+1/2)}\right), \mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}^-\left(\mathbf{w}_2^{(j+1/2)}\right)$   
pro  $\mathbf{w}_2^{(j+1/2)} = \left(\mathbf{U}^{(j+1/2)}, \Lambda_{Ht}^{(j+1/2)}\right)^T$  užitím (3.29);  
(iii) určíme  $\mathbf{w}_2^{(j+1)} = \left(\mathbf{U}^{(j+1)}, \Lambda_{Ht}^{(j+1)}\right)^T$  ze soustavy
$$\begin{aligned} \mathbb{A} \mathbf{U}^{(j+1)} + \mathbb{B}_{Ht}^T \Lambda_{Ht}^{(j+1)} &= \mathbb{F} - B_{hn}^T (\text{diag } \kappa) \Lambda_{hn}^{(j+1)}, \\ (y_r, y_{r+1}) \in \mathcal{A}_{\Lambda_{Ht}}\left(\mathbf{w}_2^{(j+1/2)}\right) &\Rightarrow \left(\mathbb{B}_{Ht} \mathbf{U}^{(j+1)}\right)_r = 0, \\ (y_r, y_{r+1}) \in \mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}^+\left(\mathbf{w}_2^{(j+1/2)}\right) &\Rightarrow \left(\Lambda_{Ht}^{(j+1)}\right)_r = 1, \\ (y_r, y_{r+1}) \in \mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}^-\left(\mathbf{w}_2^{(j+1/2)}\right) &\Rightarrow \left(\Lambda_{Ht}^{(j+1)}\right)_r = -1. \end{aligned}$$

(i) **Případ**  $N = 3$ .

Označme uzlové parametry  $\mathbf{u}_h$  jako  $\mathbf{U}$ ,  $\lambda_{hn}$  jako  $\Lambda_{hn}$  a  $\lambda_{Ht} = \left(\lambda_{Ht}^{(1)}, \lambda_{Ht}^{(2)}\right)^T$  jako  $\Lambda_{Ht} = \left(\Lambda_{Ht}^{(1)}, \Lambda_{Ht}^{(2)}\right)^T$ , kde  $\lambda_{Ht}^{(i)}, i = 1, 2$ , jsou konstantní na trojúhelnících  $\Delta_r$  a reprezentují složky vektorů  $\lambda_{Ht}$  ( $\Delta_r$ ) v ortogonálním systému souřadnic, odpovídající každé rovinné části  $\Gamma_{cp}^{kl}, p = 1, \dots, \bar{p}$ . Definujme matice  $\mathbb{B}_{hn}, \mathbb{B}_{Ht} = \left(\mathbb{B}_{Ht}^{(1)}, \mathbb{B}_{Ht}^{(2)}\right)^T$ ,  $\mathbb{F}$  vztahy

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{B}_{hn} \mathbf{U}\right)_r &= \left(U_{hn}^k(s_r) - U_{hn}^l(s_r)\right), \\ \left(\mathbb{B}_{Ht}^{(i)} \mathbf{U}\right)_r &= \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \chi_r g_{ch}^{kl} \left(\mathbf{U}_{Ht}^k - \mathbf{U}_{Ht}^l\right)_i ds, i = 1, 2, \quad (\mathbf{F}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbb{F}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

kde  $\chi_r$  je charakteristická funkce trojúhelníku  $\Delta_r \subset \mathcal{T}_H$ ,  $s_r$  je uzlový bod.

Maticový tvar aproximovaného problému sedlového bodu pro každou časovou hladinu můžeme zapsat ve tvaru (viz např. Hlaváček (2006a, b))

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \mathbf{U} + \mathbb{B}_{hn}^T G \Lambda_{hn} + \mathbb{B}_{Ht}^T \Lambda_{Ht} - \mathbb{F} &= 0 \\ \Lambda_{hn} - \left(\Lambda_{hn} + \rho G \mathbb{B}_{hn} \mathbf{U}\right)^+ &= 0, \\ \Lambda_{Ht} - \pi \left(\Lambda_{Ht} + \rho \mathbb{B}_{Ht} \mathbf{U}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

kde  $G$  je Grammova matice,  $\rho = \text{const.} > 0$  a  $\pi$  je projekce na jednotkové kouli, tj.

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{pro } \|x\| < 1, \\ x / \|x\| & \text{pro } \|x\| \geq 1, x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Podobně jako v případě  $N = 2$  máme

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}) := \begin{pmatrix} \mathbb{A} \mathbf{U} + \mathbb{B}_{hn}^T G \Lambda_{hn} + \mathbb{B}_{Ht}^T \Lambda_{Ht} - \mathbb{F} \\ \Lambda_{hn} - \left(\Lambda_{hn} + \rho G \mathbb{B}_{hn} \mathbf{U}\right)^+ \\ \Lambda_{Ht} - \pi \left(\Lambda_{Ht} + \rho \mathbb{B}_{Ht} \mathbf{U}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

kde  $\mathbf{w} = \left(\mathbf{U}, \mathbb{B}_{hn}, \mathbb{B}_{Ht}\right)^T$ . Funkce  $\mathcal{F}(\mathbf{w})$  má zobecněnou derivaci (slant derivative), ale není známo zda existuje inverze Grammovy matice. Proto definujeme redukovaný operátor (matice) tření  $G_{\mathbb{B}_{Ht}}(\mathbf{w})$ , který je invertabilní, vztahem

$$G_{\mathbb{B}_{Ht}}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}_{Ht}^T \\ -\chi(\mathcal{A}_{\Lambda_{Ht}}(\mathbf{w})) \rho \mathbb{B}_{Ht} & \chi(\mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}(\mathbf{w})) \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Aktivní a inaktivní množiny s ohledem na multiplikátory  $\Lambda_{hn}$  a  $\Lambda_{Ht}$  definujeme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\Lambda_{hn}}(\mathbf{w}_1) &= \{s_r : (\Lambda_{hn})_r + \rho(G \mathbb{B}_{hn} \mathbf{U})_r > 0\}, \\ \mathcal{I}_{\Lambda_{hn}}(\mathbf{w}_1) &= \{s_r : (\Lambda_{hn})_r + \rho(G \mathbb{B}_{hn} \mathbf{U})_r \leq 0\}, \quad \mathbf{w}_1 = (\mathbf{U}, \Lambda_{hn})^T, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\Lambda_{Ht}}(\mathbf{w}_2) &= \{\Delta_r \subset \mathcal{T}_H : \|(\Lambda_{Ht})_r + \rho(\mathbb{B}_{Ht} \mathbf{U})_r\| < 1\}, \\ \mathcal{I}_{\Lambda_{Ht}}(\mathbf{w}_2) &= \{\Delta_r \subset \mathcal{T}_H : \|(\Lambda_{Ht})_r + \rho(\mathbb{B}_{Ht} \mathbf{U})_r\| \geq 1\}, \quad \mathbf{w}_2 = (\mathbf{U}, \Lambda_{Ht})^T. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Potom v každé časové hladině uijeme algoritmus AU-PDAS ( viz Hlaváček (2006b)):

**Algorithm AU-PDAS:**

Nechť  $\mathbf{w}^{(0)} = \left( \mathbf{U}^{(0)}, \mathbf{\Lambda}_{hn}^{(0)}, \mathbf{\Lambda}_{Ht}^{(0)} \right)^T$ ,  $\rho \in (10^3, 10^4)$  jsou známy. Jestliže  $\mathbf{w}^{(j)} = \left( \mathbf{U}^{(j)}, \mathbf{\Lambda}_{hn}^{(j)}, \mathbf{\Lambda}_{Ht}^{(j)} \right)$  je známé, potom

STEP (1): určíme  $\mathbf{w}^{(j+1/2)} = \left( \mathbf{U}^{(j+1/2)}, \mathbf{\Lambda}_{hn}^{(j+1/2)}, \mathbf{\Lambda}_{Ht}^{(j+1/2)} \right)$  postupem:

- (i)  $(\mathbf{\Lambda}_{hn})_r^{(j+1/2)} = \pi \left( (\mathbf{\Lambda}_{hn})_r^{(j)} + \rho (\mathbb{B}_{hn} \mathbf{U}^{(j)})_r \right)$ ,  $r = 0, \dots, m-1$ ;
- (ii) určíme množiny  $\mathcal{A}_{\mathbf{\Lambda}_{hn}} \left( \mathbf{w}_1^{(j)} \right)$ ,  $\mathcal{I}_{\mathbf{\Lambda}_{hn}} \left( \mathbf{w}_1^{(j)} \right)$  pro  $\mathbf{w}_1^{(j)} = \left( \mathbf{U}^{(j)}, \mathbf{\Lambda}_{hn}^{(j)} \right)^T$  užitím (3.36);
- (iii) určíme  $\mathbf{w}_1^{(j+1/2)} = \left( \mathbf{U}^{(j+1/2)}, \mathbf{\Lambda}_{hn}^{(j+1/2)} \right)^T$  ze soustavy
 
$$\mathbb{A} \mathbf{U}^{(j+1/2)} + \mathbb{B}_{hn}^T G \mathbf{\Lambda}_{hn}^{(j+1/2)} = \mathbb{F} - B_{Ht}^T \mathbf{\Lambda}_{Ht}^{(j+1/2)}$$

$$s_r \in \mathcal{A}_{\mathbf{\Lambda}_{hn}} \left( \mathbf{w}_1^{(j)} \right) \Rightarrow (G \mathbb{B}_{hn} \mathbf{U}^{(j+1/2)})_r = 0,$$

$$s_r \in \mathcal{I}_{\mathbf{\Lambda}_{hn}} \left( \mathbf{w}_1^{(j)} \right) \Rightarrow (\mathbf{\Lambda}_{hn}^{(j+1/2)})_r = 0.$$

STEP (2): určíme  $\mathbf{w}^{(j+1)} = \left( \mathbf{U}^{(j+1)}, \mathbf{\Lambda}_{hn}^{(j+1)}, \mathbf{\Lambda}_{Ht}^{(j+1)} \right)^T$  postupem:

- (i)  $(\mathbf{\Lambda}_{Ht})_r^{(j+1)} = \left( (\mathbf{\Lambda}_{Ht}^{(j+1/2)})_r + \rho (G \mathbb{B}_{hn} \mathbf{U}^{(j+1/2)})_r \right)^+$ ,  $r = 0, \dots, m$ ;
- (ii) určíme množiny  $\mathcal{A}_{\mathbf{\Lambda}_{Ht}} \left( \mathbf{w}_2^{(j+1/2)} \right)$ ,  $\mathcal{I}_{\mathbf{\Lambda}_{Ht}} \left( \mathbf{w}_2^{(j+1/2)} \right)$  pro  $\mathbf{w}_2^{(j+1/2)} = \left( \mathbf{U}^{(j+1/2)}, \mathbf{\Lambda}_{Ht}^{(j+1/2)} \right)^T$  užitím (3.37);
- (iii) určíme  $\mathbf{w}_2^{(j+1)} = \left( \mathbf{U}^{(j+1)}, \mathbf{\Lambda}_{Ht}^{(j+1)} \right)^T$  ze soustavy
 
$$\mathbb{A} \mathbf{U}^{(j+1)} + \mathbb{B}_{Ht}^T \mathbf{\Lambda}_{Ht}^{(j+1)} = \mathbb{F} - B_{hn}^T G \mathbf{\Lambda}_{hn}^{(j+1)},$$

$$\Delta_r \in \mathcal{A}_{\mathbf{\Lambda}_{Ht}} \left( \mathbf{w}_2^{(j+1/2)} \right) \Rightarrow (\mathbb{B}_{Ht} \mathbf{U}^{(j+1)})_r = 0,$$

$$\Delta_r \in \mathcal{I}_{\mathbf{\Lambda}_{Ht}} \left( \mathbf{w}_2^{(j+1/2)} \right) \Rightarrow (\mathbf{\Lambda}_{Ht}^{(j+1)})_r =$$

$$= \pi \left( (\mathbf{\Lambda}_{Ht}^{(j+1/2)})_r + \rho (\mathbb{B}_{Ht} \mathbf{U}^{(j+1/2)})_r \right).$$

**Poznámka:** Jak ukázali Hintermüller et al. (2004), (Theorem 3.2), algoritmus PDAS se chová jako globálně konvergentní, tj. algoritmus PDAS konverguje pro libovolnou volbu počátečního přiblížení.

V práci (Hlaváček (2006b)) je uveden algoritmus ve kterém předem eliminujeme uzlové parametry funkce posunutí, které nepatří hranici  $\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$ .

**Poděkování.**

Výzkum byl proveden za podpory grantu FT/TA/087 Ministerstva průmyslu a obchodu České Republiky. Autor také děkuje Dr. I. Hlaváčkovi za užitečnou diskuzi při řešení problému.

**Literatura**

1. Adams, R. (1975). Sobolev Spaces. Academic Press, New York.
2. Andersson, L.E. (2000). Existence results for quasistatic contact problems with Coulombian friction. J.Appl. Math.Optim. 42(2), 169-202.
3. Eck, C., Jarušek, J., Krbec, M. (2005). Unilateral Contact Problems. Variational Methods and Existence Theorems. Chapman&Hall/CRC, Taylor&Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore.
4. Ekeland, I., Temam, R. (1976). Convex Analysis and Variational Problems (Studies in Mathematics and its Applications). North-Holland Publ. Co., Amsterdam.



5. Han, W., Sofonea, M. (2002). Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity. Studies in Advances Mathematics, AMS, International Press, Providence.
6. Hild, P., Laborde, P. (2002). Quadratic finite element methods for unilateral contact problems. Appl. Numer. Math. ,41, 410-421.
7. Haslinger, J., Hlaváček, I., Nečas, J. (1996). Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics. Handbook of Numerical Analysis. In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L., vol. IV, North-Holland, Amsterdam, 313-485.
8. Hintermüller, M., Ito, K., Kunish, K. (2003). The primal-dual active set strategy as a semi-smooth Newton method. SIAM J. Optim., 13, 867-888.
9. Hintermüller, M., Kovtunencko, V.A., Kunish, K. (2004). Semismooth Newton method for a class of unilaterally constrained variational problems. Adv. Math. Appl. 14, 513-535.
10. Hintermüller, M., Kovtunencko, V.A., Kunish, K. (2005). Generalized Newton methods for cracks problems with nonpenetration condition. Numer. Meth. for Part. Diff. Eqs, 21, 586-610.
11. Hlaváček, I. (2006a). Mixed finite element analysis of semi-coercive unilateral contact problems with given friction. Appl. Math., 51.
12. Hlaváček, I. (2006b). Primal-dual method of active set for unilateral contact of elastic bodies with given friction. TR-965, ICS AS CR, Prague.
13. Hüeber, S. Matei, A., Wohlmuth, B.I. (2005), Efficient algorithms for problems with friction. Tech. Rep. Univ. Stuttgart SFB404 2005-07.
14. Hüeber, S., Wohlmuth, B.I. (2005). A primal-dual active set strategy for non-linear multi-body contact problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194, 3147-3166.
15. Nečas, J. (1967). Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques. Academia, Prague.
16. Nedoma, J. (1987). On the Signorini problem with friction in linear thermo-elasticity. The quasi-coupled 2D-case. Apl. Mat. 32(3), 186-199.
17. Nedoma, J. (1998). Numerical Modelling in Applied Geodynamics, Wiley, Chichester.

## Part II

# Dynamické zatěžování lidských kloubů

# 1 Formulace dynamické úlohy ve vazko-pružnosti

V této části budeme studovat  $N$ -dimensionální dynamicky zatížený kloubní systém s útlumem. Jako reologii uijeme vazko-pružnost s krátkou pamětí. Vyšetřovaná úloha navazuje na předchozí Část I v lineární pružnosti, kde je úloha vyšetřována jako kvazi-statická. Analýza kontaktní úlohy s kontaktní podmínkou v rychlostech ve spojitém případě byla studována v Nedoma (2005).

## 1.1 Model

Uvažujme podobně jako v předchozím případě systém "s" pružných těles tvořící kloubní systém. Budeme předpokládat existenci tlumících a setrvačných sil.

Nechť  $\Omega = \cup_{l=1}^s \Omega^l \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , je oblast tvořená kloubním systémem a předpokládejme, že její hranice je dostatečně hladká. Nechť  $\partial\Omega = \cup_{l=1}^s \partial\Omega^l$ ,  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_\tau \cup \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_c$ , kde  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_u = {}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u$ , je část hranice kde je kloubní systém podepřen (modelováno Dirichletovými okrajovými podmínkami),  $\Gamma_\tau$ ,  $\Gamma_\tau = {}^1\Gamma_\tau \cup {}^2\Gamma_\tau$ , je část hranice, kde je předepsáno zatížení,  $\Gamma_0$  je část hranice, kde je předepsána podmínka symetrie, resp. oboustranný kontakt,  $\Gamma_c$  je hranice kontaktu mezi dvěma sousedními plochami kloubního systému ve kterém se obě části dotýkají a po sobě pohybují,  $\Gamma_c = \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$ ,  $\Gamma_c^{kl} = \Gamma_c^k \cap \Gamma_c^l$ ,  $k, l = \{1, \dots, s\}$ ,  $k \neq l$ .

Nechť  $\mathbf{x} = (x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $N = 2, 3$ , jsou souřadnice v kartézském systému souřadnic,  $t \in I$ , kde  $I = (0, t_p)$ ,  $t_p > 0$ , je daný časový interval,  $\Omega(t) = I \times \Omega$  a  $\Gamma_\tau(t) = \Gamma_\tau \times I$ ,  $\Gamma_u(t) = \Gamma_u \times I$ ,  $\Gamma_c(t) = \Gamma_c \times I$  označuje části hranice  $\partial\Omega(t) = \partial\Omega \times I$ . V každém časovém okamžiku hledáme rozložení vektoru posunutí  $\mathbf{u} = (u_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $N = 2, 3$ , ve vyšetřované oblasti  $\cup_{l=1}^s \Omega^l$ , tj.  $\mathbf{u}^l(t) = (u_i(t))$ ,  $i = 1, \dots, N$ , v  $\Omega^l$ ,  $l = 1, \dots, s$ .

Bud  $\mathbf{n}$  vnější jednotková normála k hranici oblasti,  $u_n = u_i n_i$ ,  $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - u_n \mathbf{n}$ ,  $\tau_n = \tau_{ij} n_j n_i$ ,  $\tau_t = \tau - \tau_n \mathbf{n}$  jsou normálové a tečné složky vektorů posunutí a napětí,  $\mathbf{u} = (u_i)$ ,  $\tau = (\tau_i)$ ,  $\tau_i = \tau_{ij} n_j$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ . Nechť  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{P}$  jsou objemové a povrchové síly,  $\rho(\mathbf{x}) \geq \rho_0 > 0$  hustota,  $\alpha(\mathbf{x}) \geq \alpha_0 > 0$  fyzikálně má význam tlumení. Označme časovou derivaci symbolem " ' " a nechť  $\mathbf{u}' = (u'_k) = (\frac{\partial u_i}{\partial t})$  je vektor rychlosti. Nechť na  $\Gamma_c^{kl}$  kladný směr vnější jednotkové normály  $\mathbf{n}$  je vztažen k oblasti  $\Omega^k$ .

Vztah mezi deformací a napětím je dán vztahem

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \tau_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = c_{ijkl}^{(0)}(\mathbf{x}) e_{kl}(\mathbf{u}) + c_{ijkl}^{(1)}(\mathbf{x}) e_{kl}(\mathbf{u}'), \\ &\quad i, j, k, l = 1, \dots, N, \text{ v } \Omega(t), \\ \text{resp. } \tau &= C^{(0)}(\mathbf{u}) + C^{(1)}(\mathbf{u}'), \\ e_{ij}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad \mathbf{e}(\mathbf{u}) = (e_{ij}(\mathbf{u})) \end{aligned} \quad (1.1)$$

kde  $c_{ijkl}^{(n)}(\mathbf{x})$ ,  $n = 0, 1$ , jsou elastické a vazké koeficienty,  $e_{ij}(\mathbf{u})$  jsou složky malé deformace  $\mathbf{e}$ ,  $N$  označuje dimenzi prostoru. Předpokládejme, že  $C^{(n)} = (c_{ijkl}^{(n)}(\mathbf{x}))$ ,  $n = 0, 1$ , splňuje

$$\begin{aligned} c_{ijkl}^{(n)} &\in L^\infty(\Omega), \quad n = 0, 1, \\ c_{ijkl}^{(n)} &= c_{jikl}^{(n)} = c_{klij}^{(n)} = c_{ijlk}^{(n)}, \\ c_{ijkl}^{(n)} e_{ij} e_{kl} &\geq c_0^{(n)} e_{ij} e_{ij} \quad \forall e_{ij}, \quad e_{ij} = e_{ji} \text{ a s.v. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad c_0^{(n)} > 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

kde předpokládáme Einsteinovu sumační konvenci.

Uvažujme rovinné či prostorové úlohy kloubního systému tvaru:

**Úloha (P):** Nechť  $N = 2, 3, s \geq 2$ . Hledáme vektorovou funkci  $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ , splňující

$$\rho^l \frac{\partial^2 u_i^l}{\partial t^2} + \alpha^l \frac{\partial u_i^l}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{ij}^l(\mathbf{u}^l, \mathbf{u}'^l)}{\partial x_j} + F_i^l, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad l = 1, \dots, s, \quad (1.3)$$

$$(t, \mathbf{x}) \in \Omega^l(t) = I \times \Omega^l,$$

$$\tau_{ij}^l = \tau_{ij}^l(\mathbf{u}^l, \mathbf{u}'^l) = c_{ijkl}^{(0)l}(\mathbf{x}) e_{kl}(\mathbf{u}^l) + c_{ijkl}^{(1)l}(\mathbf{x}) e_{kl}(\mathbf{u}'^l), \quad i, j, k, l = 1, \dots, N, \quad l = 1, \dots, s, \quad (1.4)$$

$$\tau_{ij} n_j = P_i, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in {}^1\Gamma_\tau(t) = I \times \cup_{l=1}^s ({}^1\Gamma_\tau \cap \partial\Omega^l), \quad (1.5)$$

$$\tau_{ij}n_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in {}^2\Gamma_\tau(t) = I \times \cup_{i=1}^s ({}^2\Gamma_\tau \cap \partial\Omega^i), \quad (1.6)$$

$$u_i = u_{2i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in {}^1\Gamma_u(t) = I \times \cup_{i=1}^s ({}^1\Gamma_u \cap \partial\Omega^i), \quad (1.7)$$

$$u_i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in {}^2\Gamma_u(t) = I \times \cup_{i=1}^s ({}^2\Gamma_u \cap \partial\Omega^i), \quad (1.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n^{ik} - u_n^{il} \leq 0, \tau_n^k = \tau_n^l \equiv \tau_n^{kl} \leq 0, (u_n^{ik} - u_n^{il}) \tau_n^{kl} = 0 \\ \mathbf{u}_t^{ik} - \mathbf{u}_t^{il} = 0 \implies |\tau_t^{kl}| \leq \mathcal{F}_c^{kl}(0) |\tau_n^{kl}| \\ \mathbf{u}_t^{ik} - \mathbf{u}_t^{il} \neq 0 \implies \tau_t^{kl} = -\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_t^{ik} - \mathbf{u}_t^{il}) |\tau_n^{kl}| \frac{\mathbf{u}_t^{ik} - \mathbf{u}_t^{il}}{|\mathbf{u}_t^{ik} - \mathbf{u}_t^{il}|} \end{array} \right\} (t, \mathbf{x}) \in \Gamma_c(t) = I \times \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.10)$$

kde  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  jsou dané funkce,  $\mathbf{u}_2$  má časovou derivaci  $\mathbf{u}'_2$ , a  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$  jsou řešením statických kontaktních úloh s nebo bez tření (viz Nečas, Hlaváček (1981), Nedoma (1983), (1987), (1998), Hlaváček et al. (1988), Haslinger et al. (1996)). Nechť  ${}^a\Gamma_c^{kl} \subset \Gamma_c^{kl}$  jsou množiny splňující  $u_n^k - u_n^l = 0$  na  ${}^a\Gamma_c^{kl}$  a  $u_n^k - u_n^l < 0$  na  ${}^c\Gamma_c^{kl} = \Gamma_c^{kl} \setminus {}^a\Gamma_c^{kl}$ .

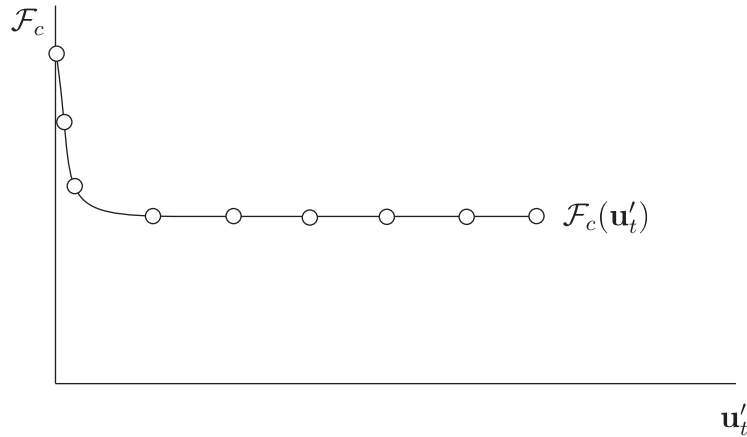


Figure 1.1:

Předpokládejme, že tření závisí na rychlosti (slip speed) (Fig.1) a koeficient tření  $\mathcal{F}_c^{kl} \equiv \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{u}')$  nechť je globálně omezený, nezáporný a splňuje Carathéodoryho podmínky, tj. pro jednoduchost např.  $\mathcal{F}_c^{kl}(\cdot, \mathbf{v})$  je měřitelná,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$ , a  $\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{x}, \cdot)$  je spojitá pro s.v.  $\mathbf{x} \in \Gamma_c^{kl}$  a má kompaktní nosič

$$\mathcal{SF}_c \equiv \sup p_{\mathbf{x}}(\mathcal{F}_c) = \overline{\{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_c(t) = \Gamma_c \times I \mid \exists \mathbf{u}'_t \quad \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{u}'_t) \neq 0\}}. \quad (1.11)$$

Označme  $(y)_+ \equiv \max\{y, 0\}$  kladnou část  $y$ .

V dalším předpokládejme jako v první části této výzkumné zprávy, že Coulombovské tření v každé časové hladině závisí na několika předchozích časových hladinách, tj. pro jednoduchost položíme  $(\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_t^{ik} - \mathbf{u}_t^{il}) \tau_n^{kl}(\mathbf{u}, \mathbf{u}'))(t - \Delta t) \equiv g_c^{kl}$ , kde  $-g_c^{kl}$  má význam třecí síly a  $\Delta t = t_p/m$ ,  $m > 0$  celé číslo. Úloha pak vede na Trescův model tření.

## 1.2 Variační formulace úlohy

Nechť  $\Omega = \cup_{i=1}^s \Omega^i$  je omezená, souvislá oblast s dostatečně hladkou hranicí  $\partial\Omega = \Gamma_\tau \cup \Gamma_u \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_c$ , kde  $\Gamma_\tau, \Gamma_u, \Gamma_0, \Gamma_c$  jsou části hranice  $\partial\Omega$  definované výše. Nechť  $\Gamma_u = {}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u$  a  $\Gamma_c = \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$ ,

$\Gamma_c^{kl} = \partial\Omega^k \cap \partial\Omega^l, k \neq l, k, l \in \{1, \dots, s\}$ . Nechť  $\Omega(t) = \Omega \times I$  a nechť  $\Gamma_\tau(t) = \Gamma_\tau \times I, \Gamma_u(t) = \Gamma_u \times I, \Gamma_0(t) = \Gamma_0 \times I, \Gamma_c(t) = \Gamma_c \times I$  označují části hranice  $\partial\Omega(t) = \partial\Omega \times I$ .

Zavedeme Hilbertovy prostory  $L^2(M), L^{2,N}(M) = [L^2(M)]^N, M = \Omega$  resp.  $\Gamma_r, r = u, \tau, c, N = 2, 3$ , a Sobolevovy prostory  $W^{k,2}(M), M = \Omega$  or  $\Gamma_r$ , běžným způsobem jako v Nečas (1967), Adams (1975), Nedoma (2005) a položíme  $W^{k,2}(M) \equiv H^k(M), [H^k(M)]^N \equiv H^{k,N}(M), H^{0,N}(M) = L^{2,N}(M)$  a odpovídající normy označíme  $\|\cdot\|_{k,N}$ . Skalární součiny a duální párování označíme  $(\cdot, \cdot)_{k,M}$  a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,M}$  (pro každé celé  $N$ ). Duální prostory prostoru  $H^{k,N}(M)$  označíme  $(H^{k,N}(M))' = H^{-k,N}(M)$  a odpovídající normy  $\|\cdot\|_{H^{-k,N}(M)} \equiv \|\cdot\|_{-k,N}$ . Norma duálního prostoru  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$  je definována vztahem  $\|u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r)} = \sup_{v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r)} \frac{\langle u, v \rangle_{-1/2, 1/2, \Gamma_r}}{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_r)}}$ , kde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1/2, 1/2, \Gamma_r}$  označuje duální párování mezi  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$  a  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$ . Duální prostory budeme označovat symbolem " ' ". Pro  $\rho \neq 1, \alpha \neq 1, \rho, \alpha \in L^\infty(M)$  s  $\rho \geq \rho_0 > 0, \alpha \geq \alpha_0 > 0$  s.v.  $\mathbf{x} \in M$ , označíme  $(\cdot, \cdot)_{k,M}$  skalární součiny ve váhových prostorech  $L^{2,N}(M)$  a  $\|\cdot\|_{k,M}$  odpovídající normy (Nečas (1967), Adams (1975)). Dále ještě zavedeme běžným způsobem Bochnerovy prostory  $L^2(I; X), W^{k,2}(I; X)$ , kde  $X$  jsou Hilbertovy prostory (Adams (1975), Eck et al. 2005)) a prostor  $B(I; X)$ ,  $X$  je Banachův prostor, jako prostor všech spojitých a omezených funkcí z  $I$  do  $X$  s normou  $\|v\|_{B(I; X)} = \|v\|_{L^\infty(I; X)} = \sup_{t \in I} \|u(t)\|_X$ .

Předpokládejme, že vstupní data splňují následující podmínky:

**Tvrzení 1:** Označme  $C^{(0)} = (c_{ijkl}^{(0)})$  elastické koeficienty a  $C^{(1)} = (c_{ijkl}^{(1)})$  koeficienty viskozity a  $\mathbf{e} = (e_{ij})$  tenzor malé deformace. Elastické koeficienty  $C^{(0)} = (c_{ijkl}^{(0)})$  splňují

- (i)  $C^{(0)} : \Omega \times \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{S}^N$ ,
- (ii) existuje konstanta  $c_0 > 0$  taková, že  $\|C^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - C^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2)\| \leq c_0 \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\| \quad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{S}^N, \text{ s.v. v } \Omega$ ,
- (iii) pro každé  $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^N, \mathbf{x} \mapsto C^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  je měřitelné na  $\Omega$ ,
- (iv) zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto C^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \in L^{2,N \times N}(\Omega) \equiv [L^2(\Omega)]^{N \times N}$ .

Koeficienty viskozity  $C^{(1)} = (c_{ijkl}^{(1)})$  splňují

- (i)  $C^{(1)} : \Omega \times \mathbb{S}^N \rightarrow \mathbb{S}^N$ ,
- (ii) existuje konstanta  $c_1 > 0$  taková, že  $\|C^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - C^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2)\| \leq c_1 \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\| \quad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{S}^N, \text{ s.v. v } \Omega$ ,
- (iii) existuje  $m_1 > 0$  taková, že  $(C^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - C^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2))(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \geq m_1 \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\|^2 \quad \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{S}^N, \text{ s.v. } \mathbf{x} \in \Omega$ ,

- (iv) pro každé  $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^N, \mathbf{x} \mapsto C^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  je měřitelné na  $\Omega$ ,
- (v) zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto C^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \in L^{2,N \times N}(\Omega) \equiv [L^2(\Omega)]^{N \times N}$ , kde  $\mathbb{S}^N$  je prostor všech symetrických tenzorů druhého řádu na  $\mathbb{R}^N$ .

Daná vstupní data splňují  $\rho \in C(\Omega), \mathbf{F} \in W^{1,\infty}(I; [L^2(\Omega)]^N), \mathbf{P} \in W^{1,\infty}(I; [L^2(\Gamma_\tau)]^N), \mathbf{u}_1 \in [H^1(\Omega)]^N, u_{1n}^k - u_{1n}^l = 0$  na  $\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}, \mathbf{u}_0 \in [H^1(\Omega)]^N$ , koeficient tření  $\mathcal{F}_c^{kl} \equiv \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_t^l)$  je omezený, nezáporný a splňuje Carathéodoryho podmínky. Nechť  $n$  je celé číslo, potom  $k = t_p/n$  je časový krok.

Zavedeme množiny virtuálních a přípustných posunutí jako

$$\begin{aligned} V_0 &= \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \prod_{l=1}^s H^{1,N}(\Omega^l), \mathbf{v} = 0 \text{ na } \cup_{l=1}^s (\Gamma_u \cap \partial\Omega^l)\}, \quad V = \mathbf{u}_2 + V_0, \\ K &= \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V, v_n^k - v_n^l \leq 0 \text{ s.v. na } \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}\}, \\ \mathcal{V}_0 &= L^2(I; V_0), \mathcal{V} = L^2(I; V) = \mathbf{u}'_2 + \mathcal{V}_0, \mathcal{K} = L^2(I; K). \end{aligned}$$

Dále definujeme prostor symetrických tenzorů druhého řádu

$Q = \{\tau = (\tau_{ij}) \mid \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq N\} \equiv L^{2,N \times N}(\Omega)$ , a jeho skalární součin vztahem  $(\tau, \sigma)_Q = \int_\Omega \tau_{ij}(\mathbf{x}) \sigma_{ij}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .

Vynásobením (1.3) výrazem  $\mathbf{v} - \mathbf{u}'$ , integrací přes  $\Omega(t)$ , užitím okrajových podmínek a Greenovy lematu, potom dostáváme:

**Úloha**  $(\mathcal{P}_0)_v$  : hledáme  $\mathbf{u}$  a  $\tau$ , splňující (1.3)-(1.10), potom  $\mathbf{u}(t) \in V_0, \tau(t) \in Q$ , a pro s.v.  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}(t) \in K, \quad (\mathbf{u}''(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + (\alpha \mathbf{u}'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + (\tau(t), \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \mathbf{e}(\mathbf{u}'(t)))_Q + \\
& + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}'(t)) \} dt \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) dt \quad \forall \mathbf{v} \in K, \text{ s.v. } t \in I, \\
& \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{1.12}$$

resp. v ekvivaletní formulaci

**Problem**  $(\mathcal{P})_v$  : hledáme posunutí  $\mathbf{u} : I \rightarrow V$  takové, že  $\mathbf{u}(t) \in K$  pro s.v.  $t \in I$  splňuje

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{u}''(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + (\alpha \mathbf{u}'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + a^{(0)}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + \\
& + a^{(1)}(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}'(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) \\
& \quad \forall \mathbf{v} \in K, \text{ s.v. } t \in I,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}). \tag{1.14}$$

kde  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$  jsou řešením statické kontaktní úlohy s resp. bez tření (viz např. Nedoma (1983),(1987), Hlaváček, Nedoma (2002)), a kde

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{u}'', \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^s (\mathbf{u}''^i, \mathbf{v}^i) = \int_{\Omega} \rho u_i'' v_i d\mathbf{x}, \quad (\alpha \mathbf{u}', \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^s (\alpha^i \mathbf{u}'^i, \mathbf{v}^i) = \int_{\Omega} \alpha u_i' v_i d\mathbf{x}, \\
& a^{(n)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^s a^{(n)i}(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i) = \int_{\Omega} c_{ijkl}^{(n)} e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\
& (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^s (\mathbf{f}^i, \mathbf{v}^i) = \int_{\Omega} F_i v_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds, \\
& j(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^s j^i(\mathbf{v}^i) = \int_{\cup_{k,i} \Gamma_c^{kl}} g_c^{kl} |\mathbf{v}_i^k - \mathbf{v}_i^l| ds \equiv \langle g_c^{kl} |\mathbf{v}_i^k - \mathbf{v}_i^l| \rangle_{\Gamma_c},
\end{aligned}$$

kde bilineární formy  $a^{(n)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ,  $n = 0, 1$ , jsou symetrické v  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  a  $a^{(n)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_0^{(n)} \|\mathbf{u}\|_{1,N}^2$ ,  $c_0^{(n)} = \text{const.} > 0$ ,  $|a^{(n)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c_1^{(n)} \|\mathbf{u}\|_{1,N} \|\mathbf{v}\|_{1,N}$ ,  $c_1^{(n)} = \text{const.} > 0$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$ .

Úlohu  $(\mathcal{P})_v$  je možno přepsat ještě do tvaru:

**Problem**  $(\mathcal{P})_W$  : Slabé řešení úlohy (3)-(10) je funkce  $\mathbf{u} \in B(I; H^{1,N}(\Omega))$  s  $\mathbf{u}(t, \cdot) \in \mathcal{K}$  pro s.v.  $t \in I$ ,  $\mathbf{u}' \in L^2(I; H^{1,N}(\Omega)) \cap L^\infty(I; L^{2,N}(\Omega))$ ,  $\mathbf{u}'(t_p, \cdot) \in L^{2,N}(\Omega)$  taková, že pro všechna  $\mathbf{v} \in H^{1,N}(\Omega(t))$  s  $\mathbf{v}(t, \cdot) \in \mathcal{K}$  s.v. v  $I$ , platí

$$\begin{aligned}
& \int_I \{ (\mathbf{u}''(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + (\alpha \mathbf{u}'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + a^{(0)}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + \\
& + a^{(1)}(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}'(t)) \} dt \geq \int_I (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) dt, \\
& \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Důkaz je analogický důkazu uvedeného v Nedoma (2005) a je založen na technice penalizace a regularizace. Úloha s kontaktními podmínkami v posunutích a s daným třením je studována a analyzována v Eck et al. (2005), Chap. 4. Analýza úlohy  $(\mathcal{P})$  s kontaktními podmínkami v posunutích a za výše uvedených předpokladů o koeficientu Coulombova tření bude analogická. K důkazu existence řešení je užito rozkladu

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u} + \mathbf{u}' - \mathbf{u}' = \mathbf{w} - \mathbf{u}'.$$

## 2 Numerické řešení

Pro numerické řešení úlohy budeme předpokládat, že kontaktní podmínka (9) je v posunutích a že koeficient Coulombova tření v každé časové hladině závisí na několika předchozích časových hladinách. Úloha pak vede na úlohu se třením Trescova typu.

## 2.1 Existence přibližného řešení

Nechť  $\Omega$  je aproximována oblastí  $\Omega_h$ , polygonální v 2D případě a polyhedrální v 3D případě, s hranicí  $\partial\Omega_h = \Gamma_{\tau h} \cup \Gamma_{uh} \cup \Gamma_{ch}$ . Nechť  $I = (0, t_p), t_p > 0$ , nechť  $m > 0$  je celé číslo, potom  $\Delta t = t_p/m$ ,  $t_i = i\Delta t, i = 0, \dots, m$ . Nechť  $\{\mathcal{T}_h\}$  je regulární třída MKP pokrytí  $\mathcal{T}_h$  oblasti  $\overline{\Omega_h}$  s  $\overline{\Gamma_{\tau h}}, \overline{\Gamma_{uh}}$  a  $\overline{\Gamma_{ch}}$ . Nechť  $V_h \subset V$  je MKP prostor lineárních elementů odpovídající pokrytí  $\mathcal{T}_h$ . Potom  $K_h = V_h \cap K$  je množina počátek spojitých lineárních funkcí, jež jsou nulové na  $\overline{\Gamma_{uh}}$  a splňují podmínku nepronikání v uzlech na  $\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$ .  $K_h$  je neprázdná, uzavřená a konvexní podmnožina množiny  $V_h \subset V$ . Nechť  $\mathbf{u}_0 \in K_h, \mathbf{u}_1 \in K_h$  jsou aproximace  $\mathbf{u}_0$  a  $\mathbf{u}_1$ . Předpokládejme, že koncové body  $\overline{\Gamma_{\tau h} \cup \Gamma_{uh}}, \overline{\Gamma_{uh} \cup \Gamma_{ch}}, \overline{\Gamma_{\tau h} \cup \Gamma_{ch}}$  se kryjí s vrcholy užitého pokrytí  $\mathcal{T}_h$  a že tření je aproximováno hodnotami z předchozích časových hladin, což vede na přibližné řešení úlohy pro Trescův model tření - semi-discrétní úlohu s daným třením.

**Úloha  $(\mathcal{P})_h$ :** nalézt pole posunutí  $\mathbf{u}_h : I \rightarrow V_h$  splňující

$$\mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_{0h}, \mathbf{u}'_h(0) = \mathbf{u}_{1h}, \quad (2.1)$$

a takové, že pro s.v.  $t \in I, \mathbf{u}_h(t) \in K_h$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}''_h(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h(t)) + (\alpha \mathbf{u}'_h(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h(t)) + a^{(0)}(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h(t)) + \\ & + a^{(1)}(\mathbf{u}'_h(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h(t)) + j(\mathbf{v}_h) - j(\mathbf{u}_h(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h(t)) \\ & \quad \forall \mathbf{v}_h \in K_h, \text{ s.v. } t \in I, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}''_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{\iota=1}^s (\mathbf{u}''_{h\iota}, \mathbf{v}_{h\iota}) = \int_{\Omega} \rho u''_{hi} v_{hi} d\mathbf{x}, \\ & (\alpha \mathbf{u}'_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{\iota=1}^s (\alpha^{\iota} \mathbf{u}'_{h\iota}, \mathbf{v}_{h\iota}) = \int_{\Omega} \alpha u'_{hi} v_{hi} d\mathbf{x}, \\ & a^{(n)}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{\iota=1}^s a^{(n)\iota}(\mathbf{u}_{h\iota}, \mathbf{v}_{h\iota}) = \int_{\Omega} c_{ijkl}^{(n)} e_{ij}(\mathbf{u}_h) e_{ij}(\mathbf{v}_h) d\mathbf{x}, \quad n = 0, 1, \\ & (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) = \sum_{\iota=1}^s (\mathbf{f}^{\iota}, \mathbf{v}_{h\iota}) = \int_{\Omega} F_i v_{hi} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_{hi} ds, \\ & j(\mathbf{v}_h) = \sum_{\iota=1}^s j^{\iota}(\mathbf{v}_{h\iota}) = \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_{ch}^{kl} |\mathbf{v}_{ht}^k - \mathbf{v}_{ht}^l| ds \equiv \langle g_{ch}^{kl}, |\mathbf{v}_{ht}^k - \mathbf{v}_{ht}^l| \rangle_{\Gamma_c}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde  $g_{ch}^{kl}$  je aproximace  $g_c^{kl}$ . K důkazu existence přibližného řešení (MKP řešení)  $\mathbf{u}_h$  úlohy  $(\mathcal{P})_h$  uijeme podobně jako výše rozkladu

$$\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h = \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h + \mathbf{u}'_h - \mathbf{u}'_h = \mathbf{w}_h - \mathbf{u}'_h.$$

Důkaz je analogický důkazu ze spojitého případu.

## 2.2 Odhad chyby řešení a konvergence metody

Položme  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_h(t)$  v (1.13),  $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h(t) \in K_h$  v (2.2) a sečtěme. Potom po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}''(t) - \mathbf{u}''_h(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) + (\alpha \mathbf{u}'(t) - \alpha \mathbf{u}'_h(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) + \\ & + a^{(1)}(\mathbf{u}'(t) - \mathbf{u}'_h(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \leq (\mathbf{u}''_h(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) + \\ & + (\alpha \mathbf{u}'_h(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) + a^{(0)}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t), \mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)) + \\ & + a^{(0)}(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) + a^{(1)}(\mathbf{u}'_h(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) + \\ & + j(\mathbf{v}_h(t)) - j(\mathbf{u}(t)) - (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}''(t) - \mathbf{u}''_h(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) + (\alpha \mathbf{u}'(t) - \alpha \mathbf{u}'_h(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) + \\ & + a^{(1)}(\mathbf{u}'(t) - \mathbf{u}'_h(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \leq \\ & \leq a^{(1)}(\mathbf{u}'_h(t) - \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) + a^{(0)}(\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) + \\ & + (\mathbf{u}''_h(t) - \mathbf{u}''(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) + (\alpha \mathbf{u}'_h(t) - \alpha \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) + \\ & + a^{(0)}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t), \mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)) + R(t; \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) \quad \text{s.v. } t \in I, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & R(t; \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) = (\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) + (\alpha \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) + \\ & a^{(0)}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) + a^{(1)}(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) + j(\mathbf{v}_h) - j(\mathbf{u}(t)) - \\ & - (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \text{ s.v. } t \in I. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nechť  $t \in I$ . Integrací (2.4) v intervalu 0 do  $t$ , dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_0^t \{(\mathbf{u}''(\tau) - \mathbf{u}_h''(\tau), \mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau)) + (\alpha \mathbf{u}'(\tau) - \alpha \mathbf{u}_h'(\tau), \mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau)) + \\ & + a^{(1)}(\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{u}_h'(\tau), \mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau))\} d\tau \leq \\ & \leq \int_0^t \{a^{(1)}(\mathbf{u}_h'(\tau) - \mathbf{u}'(\tau), \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)) + a^{(0)}(\mathbf{u}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau), \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)) + \\ & + (\mathbf{u}_h''(\tau) - \mathbf{u}''(\tau), \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)) + (\alpha \mathbf{u}_h'(\tau) - \alpha \mathbf{u}'(\tau), \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)) + \\ & + a^{(0)}(\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau), \mathbf{u}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)) + R(\tau; \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau))\} d\tau. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\begin{aligned} & \left\| C^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - C^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) \right\| \leq c_0 \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\| \quad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{S}^N, \quad \text{s.v. v } \Omega, \\ & \left\| C^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - C^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) \right\| \leq c_1 \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\| \quad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{S}^N, \quad \text{s.v. v } \Omega, \\ & \int_0^t (\mathbf{u}''(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau = (\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t)) - (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0) - \int_0^t (\mathbf{u}'(\tau), \mathbf{u}'(\tau)) d\tau = \\ & = (\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t)) - (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0) - \int_0^t (\|\mathbf{u}'(\tau)\|_{0,N}^2) d\tau \leq \\ & \leq \|\mathbf{u}'(t)\|_{0,N} \|\mathbf{u}(t)\|_{0,N} - \|\mathbf{u}_1\|_{0,N} \|\mathbf{u}_0\|_{0,N} - \left[ \|\mathbf{u}'(t)\|_{0,N}^2 - \|\mathbf{u}_1\|_{0,N}^2 \right], \\ & \int_0^t (\mathbf{u}'(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau = \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(\tau)\|_{0,N}^2 \right) d\tau = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{0,N}^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_1\|_{0,N}^2, \end{aligned}$$

a jelikož  $\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t) = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h} + \int_0^t (\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{u}_h'(\tau)) d\tau$ , potom

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{1,N}^2 & \leq c \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_{1,N}^2 + c \int_0^t \|\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{u}_h'(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau \quad \text{a} \\ \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau & \leq c \int_0^t \|\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{u}_h'(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau + c \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_{1,N}^2. \end{aligned}$$

Potom po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{0,N}^2 - \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_{0,N}^2 + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{1,N}^2 - \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1h}\|_{1,N}^2] - \\ & - c \|\mathbf{u}'(t) - \mathbf{u}_h'(t)\|_{0,N}^2 + c \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_{0,N}^2 \leq \|\mathbf{u}_1\|_{0,N} \|\mathbf{u}_0\|_{0,N} - \|\mathbf{u}'(t)\|_{0,N} \|\mathbf{u}(t)\|_{0,N} + \\ & + \int_0^t c_0 \|\mathbf{u}_h'(\tau) - \mathbf{u}'(\tau)\|_{1,N} \|\mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)\|_{1,N} d\tau + \int_0^t c_0 \|\mathbf{u}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau + \\ & + \int_0^t a^{(1)}(\mathbf{u}_h'(\tau) - \mathbf{u}'(\tau), \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)) d\tau + \int_0^t (\mathbf{u}_h''(\tau) - \mathbf{u}''(\tau), \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)) d\tau + \\ & + \int_0^t (\alpha \mathbf{u}_h'(\tau) - \alpha \mathbf{u}'(\tau), \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)) d\tau + \int_0^t R(\tau; \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Jelikož

$$\begin{aligned} & \int_0^t a^{(1)}(\mathbf{u}_h'(\tau) - \mathbf{u}'(\tau), \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)) d\tau = a^{(1)}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_h(t)) - \\ & - a^{(1)}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}) - \int_0^t a^{(1)}(\mathbf{u}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau), \mathbf{v}_h'(\tau) - \mathbf{u}'(\tau)) d\tau, \\ & \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_h(t) = \mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h} + \int_0^t (\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{v}_h'(\tau)) d\tau, \quad \text{odtud} \\ & \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_h(t)\|_{1,N}^2 \leq c \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N}^2 + c \int_0^t \|\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{v}_h'(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau, \\ & \int_0^t (\alpha \mathbf{u}_h'(\tau) - \alpha \mathbf{u}'(\tau), \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau)) d\tau = (\alpha \mathbf{u}_h(t) - \alpha \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h(t) - \mathbf{u}(t)) - \\ & - (\alpha \mathbf{u}_{0h} - \alpha \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_{0h} - \mathbf{u}_0) - \int_0^t (\alpha \mathbf{u}_h(\tau) - \alpha \mathbf{u}(\tau), \mathbf{v}_h'(\tau) - \mathbf{u}'(\tau)) d\tau, \\ & \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{v}_h(\tau)\|_{0,N}^2 d\tau \leq c \int_0^t \|\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{v}_h'(\tau)\|_{0,N}^2 d\tau + c \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{0,N}^2, \end{aligned}$$

potom po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{1,N}^2 & \leq c \{ \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_{1,N}^2 + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N}^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1h}\|_{0,N}^2 + \\ & + \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau + \int_0^t \|\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{v}_h'(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau \} + c \int_0^t |R(\tau; \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau))| d\tau. \end{aligned}$$

Užitím Gronwallova lematu dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I; V_0)}^2 & \leq c \{ \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N}^2 + \|\mathbf{u}' - \mathbf{v}_h'\|_{L^2(I; V_0)}^2 + \\ & + \|\mathbf{R}(\cdot; \mathbf{v}_h - \mathbf{u})\|_{L^1(I; V_0)} + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N}^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1h}\|_{1,N}^2 \}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Odtud, jelikož  $\mathbf{v}_h \in H^1(I; K_h)$  je libovolné, dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I; V_0)}^2 & \leq c \{ \inf_{\mathbf{v}_h \in H^1(I; K_h)} [ \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N}^2 + \|\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{v}_h'(\tau)\|_{L^2(I; V_0)}^2 + \\ & + \|\mathbf{R}(\cdot; \mathbf{v}_h - \mathbf{u})\|_{L^1(I; V_0)} ] + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N}^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1h}\|_{1,N}^2 \}, \end{aligned}$$

jež je základním odhadem pro důkaz konvergence metody.



Výsledek shrneme do následující věty:

**Věta 1:** Nechť jsou splněny předpoklady Tvrzení 1 a nechť  $\mathbf{f} \in L^2(I; L^{2,N}(\Omega))$ ,  $\mathbf{u}_0 \in K$ ,  $\mathbf{u}_{0h} \in K_h$ ,  $\mathbf{u}_1 \in V_0$ ,  $\mathbf{u}_{1h} \in V_{0h}$ , a nechť koeficient tření  $\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{u}'_h)$  splňuje Carathéodoryho podmínky, je spojitý, nezáporný a omezený. Potom chyba semi-diskretizace splňuje odhad

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I; V_0)}^2 &\leq c\{\inf_{\mathbf{v}_h \in H^1(I; K_h)}[\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N}^2 + \|\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{v}'_h(\tau)\|_{L^2(I; V_0)}^2 + \\ &\quad + \|R(\cdot; \mathbf{v}_h - \mathbf{u})\|_{L^1(I; V_0)}] + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N}^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1h}\|_{1,N}^2\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Konvergenci přibližného řešení k přesnému řešení dává následující věta:

**Věta 2:** Nechť platí předpoklady Tvrzení 1. Nechť  $\mathbf{u}_0 \in K$ ,  $\mathbf{u}_{0h} \in K_h$ ,  $\mathbf{u}_1 \in V_0$ ,  $\mathbf{u}_{1h} \in V_{0h}$  jsou takové, že

$$\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_{V_0} \rightarrow 0 \quad \text{a} \quad \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1h}\|_{V_0} \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

potom

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I; V_0)} \rightarrow 0 \quad \text{for } h \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Důkaz: Vyjdeme z odhadu (2.8). Užitím (2.5) odhadneme  $|R(t; \mathbf{v})|$ . Podle definice funkcionálu  $j(\cdot)$  je

$$\begin{aligned} |j(\mathbf{v}_h) - j(\mathbf{u}(t))| &\leq \|g_c\|_{L^\infty(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl})} \|\mathbf{v}_{ht}^k - \mathbf{v}_{ht}^l - \mathbf{u}_t^k(t) + \mathbf{u}_t^l(t)\|_{1,N, \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \leq \\ &\leq c \|g_c\|_{L^\infty(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl})} \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h(t)\|_{V_0}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Potom

$$|R(t; \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t))| \leq c \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h(t)\|_V, \quad (2.12)$$

kde konstanta  $c$  závisí na  $\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(I; V_0)}$ ,  $\|g_c\|_{L^\infty(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl})}$ ,  $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(I; L^{2,N}(\Omega))}$ ,  $\|\mathbf{P}\|_{L^\infty(I; L^{2,N}(\Gamma_\tau))}$ . Odtud a z (2.8) plyne

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I; V_0)} &\leq c\{\inf_{\mathbf{v}_h \in H^1(I; K_h)}[\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N}^2 + \|\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{v}'_h(\tau)\|_{L^2(I; V_0)}^2 + \\ &\quad + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{L^1(I; V_0)}^{1/2}] + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N}^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1h}\|_{1,N}^2\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Jelikož  $K \cap [C^\infty(\bar{\Omega})]^N$  je hustý v  $K$  vzhledem k normě prostoru  $V_0$ , potom  $H^1(I; K \cap [C^\infty(\bar{\Omega})]^N)$  je hustý v  $K$  vzhledem k normě prostoru  $H^1(I; V_0)$  (viz Han Sofonea (2002)). Odtud již plyne konvergence semi-diskretní aproximace k přesnému řešení úlohy.  $\square$

K odvození optimálního odhadu chyby řešení vyjdeme z odhadu (2.8) a předpokladů regularity

$$\begin{aligned} \tau_n &\in L^\infty(I; L^{2,N}(\partial\Omega)), \quad \mathbf{u}_0 \in H^{2,N}(\Omega), \quad \mathbf{u} \in L^2(I; H^{2,N}(\Omega)), \\ \mathbf{u}|_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} &\in L^2(I; H^{2,N}(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl})). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Jelikož

$$\begin{aligned} a^{(0)}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + a^{(1)}(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) &= \int_{\partial\Omega} \tau(t) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} ds - \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{v} ds + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} [\tau_n(t) v_n + \tau_t(t) \cdot \mathbf{v}_t] ds + \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \\ R(t; \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) &= (\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) + (\alpha \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) + \\ &+ a^{(0)}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) + a^{(1)}(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) + j(\mathbf{v}_h) - j(\mathbf{u}(t)) - \\ &- (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)) = \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \{\tau_t(t) \cdot (\mathbf{v}_{ht}^k - \mathbf{v}_{ht}^l - \mathbf{u}_t^k + \mathbf{u}_t^l)\} + \\ &+ \|g_c^{kl}\|_{L^\infty(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl})} \left( \|\mathbf{v}_{ht}^k - \mathbf{v}_{ht}^l\|_{L^1(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl})} - \|\mathbf{u}_t^k(t) - \mathbf{u}_t^l(t)\|_{L^1(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl})} \right) ds \leq \\ &\leq c \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}(t)\|_{L^1(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl})}, \end{aligned}$$

potom z (2.8) plyne

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(I; V)} &\leq c\{\inf_{\mathbf{v}_h \in H^1(I; K_h)}[\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N} + \|\mathbf{u}' - \mathbf{v}'_h\|_{L^2(I; V_0)} + \\ &\quad + \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h\|_{L^1(I; \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl})}^{1/2}] + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_{1,N} + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1h}\|_{1,N}\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Položme pro každé  $t \in \bar{I}$   $\mathbf{v}_h(t) = r_h \mathbf{u}(t) \in H^1(I; K_h)$ , kde  $r_h \mathbf{u}(t)$  je MKP interpolant funkce  $\mathbf{u}(t)$ . Pro počástech lineární interpolant  $r_h \mathbf{u}$ , vztahený na  $\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$  (kde  $\Gamma_c^{kl}$  je aproximována  $m$  počástech lineárními segmenty), máme následující odhad chyby

$$\|\mathbf{u} - r_h \mathbf{u}\|_{L^2, N(\Gamma_c)} \leq ch^2 \sum_{i=1}^m |\mathbf{u}|_{H^2, N(\Gamma_c^i)}, \quad \Gamma_c^i = \cup_{k,l} \cup_{i=1}^m \Gamma_c^{kli}.$$

Položíme-li  $\mathbf{u}_{0h} = r_h \mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_{1h} = r_h \mathbf{u}_1$ , potom z (2.15) dostáváme odhad řádu  $O(h)$ .

## 2.3 Algoritmus

Algoritmus je založen na semi-implicitním schématu a na předpokladu, že třetí člen je aproximován v každé časové hladině hodnotami z předchozích časových hladin (pro jednoduchost budeme předpokládat, že závisí pouze na jeho hodnotě z předchozí časové hladiny). Algoritmus pak odpovídá algoritmu pro Trescův model s daným třením.

Nechť  $m > 0$  je celé číslo, potom  $\Delta t = t_p/m$ ,  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Potom

$$\begin{aligned} & (\Delta t^{-2} (\mathbf{u}_h^{i+1} - 2\mathbf{u}_h^i + \mathbf{u}_h^{i-1}), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}) + (\Delta t^{-1} \alpha (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}) + \\ & + a^{(0)} (\mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}) + a^{(1)} (\Delta t^{-1} (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}) + \\ & + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_{ch}^{kl} |\mathbf{v}_{th}^k - \mathbf{v}_{th}^l| ds - \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_{ch}^{kl} |\mathbf{u}_{th}^k(t_{i+1}) - \mathbf{u}_{th}^l(t_{i+1})| ds \geq \\ & \geq (\mathbf{f}(t_{i+1}), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}) \quad \forall \mathbf{v}_h \in K_h, \\ & \mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_{0h}, \quad \mathbf{u}'_h(0) = \mathbf{u}_{1h}, \end{aligned}$$

kde  $g_{ch}^{kl} = \mathcal{F}_c^{kl} (\Delta t^{-1} (\Delta \mathbf{u}_h(t_i) - \Delta \mathbf{u}_h(t_{i+1}))) \Big| \tau_n^{kl} \left( \mathbf{u}_h(t_i), \frac{\Delta \mathbf{u}_h(t_i)}{\Delta t} \right) \Big|$ ,  $\mathbf{u}_h^i = \mathbf{u}_h(t_i)$ ,  $\Delta \mathbf{u}_h^i = \mathbf{u}_h(t_i) - \mathbf{u}_h(t_{i-1})$ . Označme

$$\begin{aligned} g_{ch}^{kl}(t_i) &= \mathcal{F}_c^{kl} (\Delta t^{-1} (\Delta \mathbf{u}_h^i - \Delta \mathbf{u}_h^i)) \Big| \tau_n^{kl} \left( \mathbf{u}_h^i, \frac{\Delta \mathbf{u}_h^i}{\Delta t} \right) \Big|, \\ (\bar{\mathbf{F}}(t_{i+1}), \mathbf{v}_h) &= \Delta t^2 (\mathbf{f}(t_{i+1}), \mathbf{v}_h) + (2\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i-1}, \mathbf{v}_h) + \\ & + \Delta t (\alpha \mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h) + \Delta t a_h^{(1)} (\mathbf{u}_h^i, \mathbf{v}_h), \end{aligned}$$

potom

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}) + \Delta t (\alpha \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}) + \Delta t^2 a^{(0)} (\mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}) + \\ & + \Delta t a^{(1)} (\mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}) + \\ & + \Delta t^2 \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_{ch}^{kl}(t_i) (|\mathbf{v}_{th}^k - \mathbf{v}_{th}^l| - |\mathbf{u}_{th}^k(t_{i+1}) - \mathbf{u}_{th}^l(t_{i+1})|) ds \geq \quad (2.16) \\ & \geq (\bar{\mathbf{F}}(t_{i+1}), \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h^{i+1}), \\ & \mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_{0h}, \quad \mathbf{u}'_h(0) = \mathbf{u}_{1h}. \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h) + \Delta t (\alpha \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h) + \Delta t^2 a^{(0)} (\mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h) + \Delta t a^{(1)} (\mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{v}_h) + \\ & + \Delta t^2 \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_{ch}^{kl}(t_i) (|\mathbf{v}_{th}^k - \mathbf{v}_{th}^l|) ds - (\bar{\mathbf{F}}(t_{i+1}), \mathbf{v}_h) \geq \\ & \geq (\mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{i+1}) + \Delta t (\alpha \mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{i+1}) + \Delta t^2 a^{(0)} (\mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{i+1}) + \\ & + \Delta t a^{(1)} (\mathbf{u}_h^{i+1}, \mathbf{u}_h^{i+1}) + \Delta t^2 \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_{ch}^{kl}(t_i) (|\mathbf{u}_{th}^k(t_{i+1}) - \mathbf{u}_{th}^l(t_{i+1})|) ds - \\ & - (\bar{\mathbf{F}}(t_{i+1}), \mathbf{u}_h^{i+1}), \\ & \mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_{0h}, \quad \mathbf{u}'_h(0) = \mathbf{u}_{1h}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pro jednoduchost položíme  $\mathbf{u}_h^{i+1} \equiv \mathbf{u}_h$ ,  $\bar{g}_{ch}^{kl} = g_{ch}^{kl}(t_i)$ ,  $\bar{\mathbf{F}}(t_{i+1}) \equiv \mathbf{f}_h$ , potom (2.16) můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \Delta t (\alpha \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \Delta t^2 a^{(0)} (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \\ & + \Delta t a^{(1)} (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \Delta t^2 \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \bar{g}_{ch}^{kl} (|\mathbf{v}_{th}^k - \mathbf{v}_{th}^l| - |\mathbf{u}_{th}^k - \mathbf{u}_{th}^l|) ds \geq \quad (2.18) \\ & \geq (\bar{\mathbf{f}}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad t = t_{i+1} \in I, \\ & \mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_{0h}, \quad \mathbf{u}'_h(0) = \mathbf{u}_{1h}. \end{aligned}$$

Zavedeme bilineární formu  $A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$  a funkcionál  $j(\mathbf{v}_h)$  vztahy

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \Delta t (\alpha \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \Delta t^2 a^{(0)} (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \Delta t a^{(1)} (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), \\ j(\mathbf{v}_h) &= \Delta t^2 \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \bar{g}_{ch}^{kl} |\mathbf{v}_{th}^k - \mathbf{v}_{th}^l| ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Za předpokladu, že  $\rho \geq \rho_0 > 0$ ,  $\alpha \geq \alpha_0 > 0$  a jelikož bilineární formy  $a_h^{(n)}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ ,  $n = 0, 1$ , jsou symetrické v  $\mathbf{u}_h$  a  $\mathbf{v}_h$  a splňují  $a^{(n)}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq c_0^{(n)} \|\mathbf{u}_h\|_{1,N}^2$ ,  $c_0^{(n)} = \text{const.} > 0$ ,  $|a^{(n)}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| \leq c_0^{(n)} \|\mathbf{u}_h\|_{1,N} \|\mathbf{v}_h\|_{1,N}$ ,  $c_1^{(n)} = \text{const.} > 0$ ,  $n = 0, 1$ ,  $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in V_h$ , potom bilineární forma  $A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$  je také symetrická v  $\mathbf{u}_h$  a  $\mathbf{v}_h$  a platí

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &\geq a_0 \|\mathbf{u}_h\|_{1,N}^2, \quad c_0^{(n)} = \text{const.} > 0, \\ |A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| &\leq a_1 \|\mathbf{u}_h\|_{1,N} \|\mathbf{v}_h\|_{1,N}, \quad a_1 = \text{const.} > 0, \quad \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in V_{0h}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Potom řešíme následující úlohu:

**Úloha**  $(\mathcal{P}_A)_h$ : hledáme  $\mathbf{u}_h \in K_h$  takové, že

$$A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + j(\mathbf{v}_h) - j(\mathbf{u}_h) \geq (\bar{\mathbf{f}}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in K_h, \quad \forall t = t_{i+1} \in I, \quad (2.21)$$

a splňuje počáteční podmínky pro  $t = 0$ .

Zavedeme funkcionál  $L(\mathbf{v}_h)$  vztahem

$$L(\mathbf{v}_h) = L_0(\mathbf{v}_h) + j(\mathbf{v}_h),$$

kde

$$L_0(\mathbf{v}_h) = \frac{1}{2} A(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - (\bar{\mathbf{f}}_h, \mathbf{v}_h).$$

Potom úloha  $(\mathcal{P}_A)_h$  je ekvivalentní s následující úlohou:

nalézt  $\mathbf{u}_h \in K_h$  takové, že

$$L(\mathbf{u}_h) \leq L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in K_h, \quad \forall t = t_{i+1} \in I, \quad (2.22)$$

a splňující počáteční podmínky pro  $t = 0$ .

Algoritmus v každé časové hladině vede na úlohu hledání sedlového bodu s použitím Uzawova algoritmu. Jeho částí je minimalizační problém s omezeními danými podmínkami nepronikání na kontaktních hranicích mezi jednotlivými komponentami kloubního systému. Pro řešení minimalizačního problému se ukazuje jako neefektivnější metoda sdružených projektovaných gradientů. Pro výpočty projekcí gradientu je zvolena metoda sdružených gradientů. Tento postup se ukazuje jako optimální, neboť množina aktivních omezení se během výpočtu mění a navíc počet omezení je mnohem menší než dimenze vektoru gradientu. Algoritmus lze značně urychlit zavedením techniky předpokládání do optimalizačního procesu v každém kroku Uzawova algoritmu.

Jako vhodný algoritmus je také možno použít primárně duální metodu aktivních množin (primal-dual active set strategy (PDAS)) analogicky jako v případě kvazi-statické kontaktní úlohy. Užitý algoritmus je následně v každé časové hladině založen na smíšené variační formulaci pomocí Lagrangeových multiplikátorů a tedy na hledání sedlového bodu. Potom pro každou časovou hladinu můžeme aplikovat algoritmus AU-PDAS jako ve statickém případě (viz Hlaváček (2006)) resp. v kvazi-statickém případě, diskutovaném v předchozí části výzkumné zprávy. Algoritmus je pak modifikací algoritmu v kvazi-statickém případě.

## Literatura

1. Adams, R.A. (1975). Sobolev Spaces, Academic Press, New York.
2. Eck, Ch., Jarušek, J., Krbeč, M. (2005). Unilateral Contact Problems. Variational Methods and Existence Theorems. Chapman&Hall/CRC, Taylors&Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore.
3. Han, W., Sofonea, M. (2002). Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity, AMS/IP, Providence, RI.

4. Haslinger, J., Hlaváček, I., Nečas, J. (1996). Numerical Methods for Unilateral Problems in Solid Mechanics. In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L., Handbook of Numerical Analysis, vol.IV, Elsevier, Amsterdam, 313-486.
5. Hlaváček, I. (2006). Primárně duální metoda aktivních množin pro jednostranný kontakt pružných těles s daným třením. Technical Report No. 965, ÚI AV ČR, Praha.
6. Hlaváček, I., Haslinger, J., Nečas, J., Lovíšek, J. (1988). Solution of Variational Inequalities in Mechanics. Springer Vlg., New York.
7. Hlaváček, I., Nedoma, J. (2002). On a solution of a generalized semi-coercive contact problem in thermo-elasticity. Mathematics and Computers in Simulation, 60, 1-17.
8. Nečas, J. (1967). Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Praha, Academia.
9. Nečas, J., Hlaváček, I. (1981). Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies. An Introduction. Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York.
10. Nedoma, J. (1983). On one type of Signorini problem without friction in linear thermo-elasticity. Appl. Math. 28(6), 393-407.
11. Nedoma, J. (1987). On the Signorini problem with friction in linear thermoelasticity: The quasi-coupled 2D-case. Apl. Mat. 32, 3, 186-199.
12. Nedoma, J. et al. (1999). Numerical methods for constrained optimization in 2D and 3D biomechanics. Num. Linear Algebra Appl. 6, 557-586.
13. Nedoma, J. (2005). Matematické modely umělých náhrad kloubů ve vazbě na navigované operační techniky a za použití CT a MRI. Část. I. Dynamické zatěžování TEP a TKR, matematické 2D a 3D modely. Technical Report TR-950, ÚI AV ČR, Praha.