



národní
úložiště
šedé
literatury

Matematické modely umělých náhrad kloubů ve vazbě na navigované operační techniky s využitím CT a MRI. II. Algoritmy umožňující numerickou analýzu umělých náhrad kloubů ve vazbě na CT, MRI a navigovanou operační techniku

Nedoma, Jiří
2005

Dostupný z <http://www.nusl.cz/ntk/nusl-35253>

Dílo je chráněno podle autorského zákona č. 121/2000 Sb.

Tento dokument byl stažen z Národního úložiště šedé literatury (NUŠL).

Datum stažení: 04.05.2024

Další dokumenty můžete najít prostřednictvím vyhledávacího rozhraní nusl.cz .



Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Matematické modely umělých
náhrad kloubů ve vazbě
na navigované operační techniky
s využitím CT a MRI
II. Algoritmy umožňující
numerickou analýzu umělých
náhrad kloubů ve vazbě na CT,
MRI a navigovanou operační
techniku

J. Nedoma, I. Hlaváček, J. Daněk, M. Lanzendörfer

Technical report No. TR 951

November 2005



Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Matematické modely umělých náhrad kloubů ve vazbě na navigované operační techniky s využitím CT a MRI

II. Algoritmy umožňující numerickou analýzu umělých náhrad kloubů ve vazbě na CT, MRI a navigovanou operační techniku

J. Nedoma, I. Hlaváček, J. Daněk, M. Lanzendörfer

Technical report No. TR 951

November 2005

Abstrakt:

Předložená studie je výzkumnou zprávou Projektu MPO ČR č. FT-TA/087 -“**Komplexní výzkum biomechanických podmínek aplikace umělých skeletálních náhrad, interakce náhrad s organismem, vyhodnocení příčin selhání a návrh podmínek pro zvýšení jejich stability**” za rok 2005 a úkol:

C. Stanovení podmínek pro zvýšení stability umělých náhrad v lidském organismu

C.2. Vypracování algoritmů předoperační přípravy využívajících matematických modelů umělých náhrad ve vazbě na CT snímkování a navigované operační techniky

C.2.3. Vypracování optimálních algoritmů umožňujících numerickou analýzu umělých náhrad kloubů

(i) ve vazbě na CT a MRI snímkování

(ii) ve vazbě na navigovanou operační techniku.

Ve studii jsou diskutovány matematické 2D a 3D modely náhrad lidských kloubů. Jsou uvedeny numerické experimenty založené na MRI snímkování (páteř), metodě konečných prvků pro kontaktní úlohy, resp. na metodě rozkladu oblasti “non-overlapping domain decomposition method” (v případě totální náhrady kolenního kloubu (TKP)). Je diskutována biomechanická analýza TKP ve vazbě na axiální úchytku pro potřeby navigované operační techniky. Předložená metodika byla aplikována též pro ověřovací studii rozložení napjatosti v totálních náhradách WALTER UNIVERSAL (WU) a WALTER MODULAR (WM). Úkolem této studie je předložit několik návrhů metod a algoritmů založených na vhodných reologických, kontaktních úlohách a metodě konečných prvků ve vazbě na navigovanou operační techniku a s využitím CT a MRI snímkování.

Keywords:

Biomechanika, navigovaná operační technika, matematické modelování, kontaktní úlohy ve vazko-pružnosti

Algoritmy pro předoperační přípravu založené na aplikaci matematických modelů umělých náhrad ve vazbě na CT resp. MRI snímkování a navigované operační techniky

1 Úvod

Hodnocení osových poměrů skeletu dolní končetiny před operací TEP kyčelního kloubu resp. TKP kolenního kloubu se běžně provádí z rtg. snímku dolní končetiny, kde musí být zachycen nejen kyčelní kloub, ale i část pánve s acetabulem resp. kolenní kloub, horní konec stehenní kosti a bérec s hlezenným kloubem.

V případě kolenního kloubu je třeba určit tzv. mechanickou osu dolní končetiny, což je spojnice středu hlavice stehenní kosti se středem hlezenného kloubu. Po nastavení mechanické osy úhel s anatomickou osou stehenní kosti určuje stupeň fyziologické valgozity, ve kterém by měla být provedena resekce dolního konce stehenní kosti. Dodržením správné techniky implantace, především stranově vyrovnaného napětí měkkých tkání a odstraněním zvýšeného tlaku na zadní část tibiálního platu a respektováním mechanické osy končetiny se vytvoří základní předpoklady pro správné biomechanické fungování totální náhrady. Chyby při operačním postupu resp. aplikace nevhodného typu TEP resp. TKP netoleruje žádný implantát, selhávají starší osvědčené typy protéz stejně jako sofistikovanější a několikanásobně dražší nejmodernější implantáty.

Pro bezpečnější aplikace TEP kyčelního kloubu a TKP kolenního kloubu je v současné době snaha o využití nejmodernější techniky, což jsou v současnosti navigované operační techniky a techniky založené na aplikaci kvalitních zobrazovacích technik, jimiž jsou počítačová tomografie – CT a nukleární magnetická rezonance – MRI.

2 CT a MRI zobrazovací techniky

Základním zdrojem geometrických dat pro modelování kloubů je snímkování pomocí CT (Computer Tomography) nebo MRI (Magnetic Resonance Imaging). V porovnání s rentgenovými snímky nám tyto nástroje dávají mnohem přesnější digitální informaci.

Při pohledu na CT a MRI snímek se může zdát, že spolu nemají příliš společného. Nicméně z hlediska našeho cíle – rekonstrukce 3D geometrie objektů, resp. hledání vhodné 2D aproximace, a určení prostorového umístění objektu – můžeme obě metody uvažovat společně. Získaná data jak z CT tak z MRI jsou standardně uložena ve formátu DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine), průmyslovém standardu pro přenos radiologických obrazů (a dalších souvisejících informací) mezi počítači. Zahrnuje nejen CT a MRI, ale také další nástroje, jako například ultrazvukové vyšetření. Výstupem vyšetření jsou snímky v mnoha paralelních vrstvách s rovnoměrnými rozestupy, tedy jakési paralelní řezy (*slice*) snímkanou částí těla pacienta. Po nasnímkování je množství dat uloženo do několika souborů. V každém z nich jsou uloženy dva druhy dat: statistické informace o pacientovi a o způsobu vyšetření jsou uvedeny v hlavičce, a pak samotný obraz daného řezu uložený po *voxelích* (*volumetric pixel*).

Formátem dat uložených v hlavičce se zde nebudeme zabývat, odkážeme jen na [31] a [32]. Je zde uvedena mj. tloušťka řezu, velikost voxelu v obou směrech x a y , metoda snímkování, směr snímkování apod.

Obrazová data jsou v DICOMu uložena jako bit mapa jednotlivých voxelů, z nichž každému je dána jeho intenzita (reprezentovaná v 16 bitech). Implicitně pak u každého voxelu známe souřadnice udávající jeho polohu v prostoru.

Jako příklad uvádíme několik řezů vybraných z vyšetření levého kolenního kloubu pomocí MRI. Snímky byly získány z pracoviště Radiodiagnostické kliniky 1. LF a ÚVN. Velikost pixelu (tj. rozměr voxelu ve směrech x a y) je 0.527 mm a síla řezu 3.3 mm. Všechny řezy na obrázcích 2.1–2.3 jsou v předozadní (sagitální) rovině. Zachycují tedy část stehenní kosti (femuru), dole zakončené dvěma vypouklými kondylami oddělenými mezikondyální jámou, tvořícími vlastní hlavici kloubu. Z vyobrazených

řezů je například patrné, že oba kondyly mají nestejně zakřivení, vpředu pozvolnější, v zadní části prudší. Tyto kondyly kosti stehenní dosedají přibližně do oválných mělkých jamek na kondylech kosti holenní (tibia). Ty jsou v porovnání s nimi spíše ploché. Vyrovnání rozdílů v zakřivení obou protilehlých kondylů zajišťují menisky, jež současně zeslabují vzájemné nárazy kloubních ploch. Na obrázku 2.4 je pro ilustraci znázorněn tentýž kolenní kloub ve frontální rovině. Nejedná se o další MRI snímek, ale o řez ve frontální rovině vytvořený z kombinace snímků vedených v rovině předozadní.

Na obrázku 2.1 je zřetelně vidět femorální část kloubního systému, včetně jejího zakončení, zevního kondylu. Na řezu je také patrná čéška (patella) a četné vazy, kterými je kloubní pouzdro zesíleno. Druhý řez (obrázek 2.2) je veden v blízkosti středu holenní kosti, zároveň prochází mezi oběma kondylami (v oblasti incisura intercondylica), oba kondyly tak nejsou na řezu obsaženy. Třetí vyobrazený řez (obr. 2.3) dobře ilustruje kontaktní plochu mezi druhou (vnitřní) dvojicí kondylů, kost stehenní naopak zcela mizí. Tvorbu geometrického modelu na základě těchto dat blíže popíšeme v sekci 4.



Obrázek 2.1: MRI snímek levého kolene, zevní kondyl

Presentací těchto obrázků chceme mj. poukázat na problémy spojené s vytvářením matematického modelu ve 2D. Jestliže od 2D modelu chceme, aby vystihl základní funkční mechanické závislosti uvnitř studovaného objektu (kloubního systému), často nelze vybrat vhodný řez, který by postačoval k jeho vytvoření. Výše popsané sagitální řezy kloubním systémem kolene jsou toho příkladem: žádný z řezů nezachycuje zároveň jak dostatečně vypovídající partie kosti holenní a kosti stehenní tak oblast kontaktu na vnitřní či vnější dvojici kondylů. K vytvoření vypovídajícího 2D modelu je tak potřeba použít jiný přístup, například kombinaci geometrické informace z různých řezů nebo použití RTG snímku oblasti. To se samozřejmě nijak netýká 3D modelu, který geometrickou situaci zachycuje úplně.

Příkladem CT snímku jsou data získaná v Ústřední vojenské nemocnici (ÚVN) pro modelování Chanceho zlomeniny páteře, snímek je na obrázku 2.5. (Podle Magerlovy klasifikace klasická zlomenina Chanceho typu prochází horizontálně obratlem a bývá lokalizována v rozsahu Th12 až L3. Vzniká především v důsledku autohavárií působením bezpečnostního pásu. Někdy je Chanceho zlomenina doprovázena i rotační složkou.)



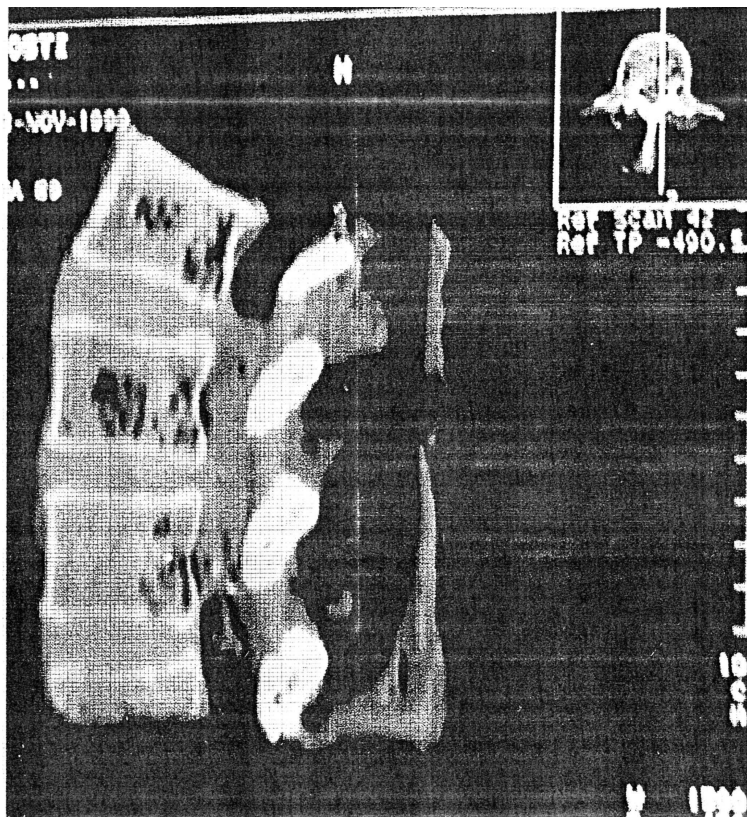
Obrázek 2.2: MRI snímek levého kolene, oblast mezi kondyly



Obrázek 2.3: MRI snímek levého kolene, vnitřní kondyl



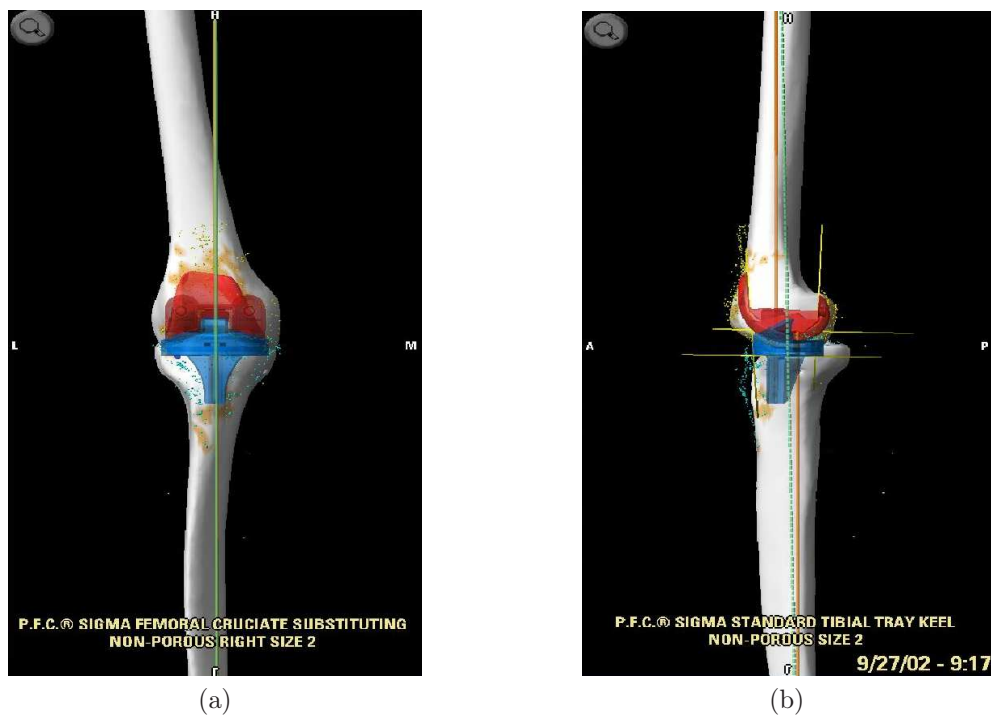
Obrázek 2.4: Frontální řez levým kolenem



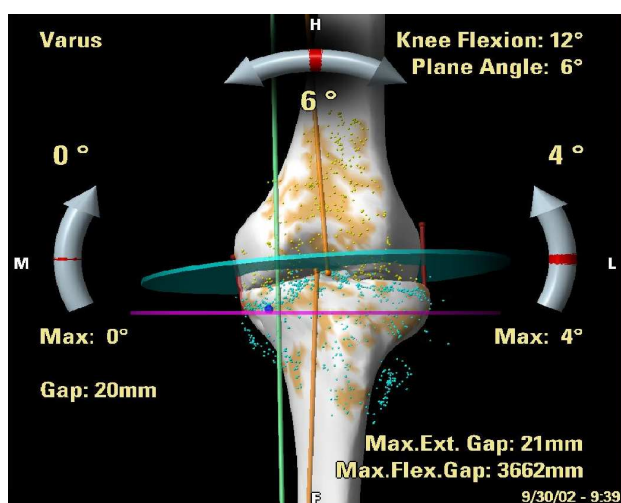
Obrázek 2.5: CT snímek bederní páteře

3 Navigované operační techniky

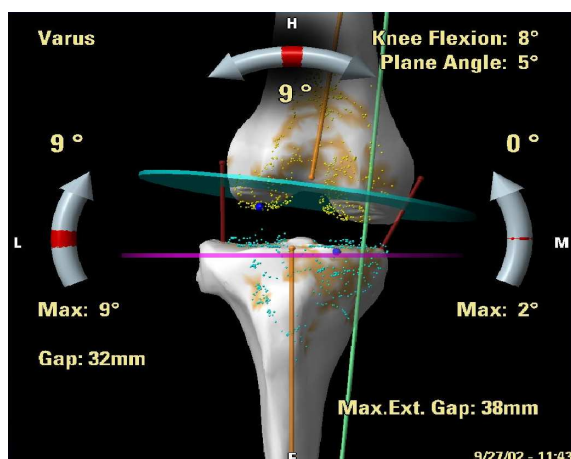
Hodnocení vyváženosti kloubního systému je prakticky subjektivní a obtížně definovatelné a měřitelné, takže ani nejmodernější instrumentaria s počítačovou navigací tento problém zcela neřeší. Otázkou totiž je jaká míra přesnosti vyvážení měkkých tkání a osové odchylky v případě kolenního kloubu má ještě zásadní význam pro dlouhodobé přežití implantátu. Problémem navigované operační techniky je v jejím kinematickém přístupu (viz obr. 3.1a,b, 3.2, 3.3), kdy se určuje mechanická osa končetiny a vhodný návrh resekce femorální části kolenního kloubu, nedefinuje však vedle zatěžujících sil vliv napětí měkkých tkání na vyšetřovaný kloubní systém.



Obrázek 3.1: Vymezení mechanické osy končetiny



Obrázek 3.2: Vymezení resekované plochy



Obrázek 3.3: Vymezení resekované plochy

O napjatostních poměrech, tlakových a tahových, v kloubním systému po aplikaci totální náhrady kloubu rozhoduje napětí měkkých částí kloubního systému v okolí náhrady, tj. kloubního pouzdra, vazů, svalových úponů a výsledné osové postavení celé končetiny. Pozorování lékařů při reoperacích náhrad kloubů nás informují, že při asymetrickém přetížení dochází k předčasnému opotřebení plastové vložky s produkcí velkého množství polyetylenových částic, které v organismu iniciují reakce vedoucí k uvolňování kovových komponent totální náhrady z kosti. Tomu je nutno předem zabránit ještě před samotným operačním výkonem.

Z toho co bylo řečeno vychází náš přístup zkvalitnění navigované operační techniky. Náš přístup počítá s matematickou simulací staticky resp. dynamicky zatěžovaného kloubního systému - kyčelního resp. kolenního, v návaznosti na určení geometrie skeletu odvozeného na základě snímaných bodů na skeletu a virtuálního skeletu v řídicím zařízení navigované operační techniky. Dodržení správného napětí měkkých tkání zajišťující vyváženost ve všech částech kloubu a především dodržení osových poměrů ve smyslu zachování resp. obnovení zátěže v mechanické ose dolní končetiny je pro životnost totálních náhrad kolenních kloubů zcela zásadním požadavkem, který musí zachovávat i matematický model. Metodika popsaná v dalších podkapitolách, která umožňuje numerickou analýzu napjatosti ve studovaném kloubním systému, by měla být zabudována do systému algoritmů navigované operační techniky. Pouze důsledná analýza napjatostních poměrů v kloubním systému umožní operatérovi posoudit správnost navrhovaného operačního postupu.

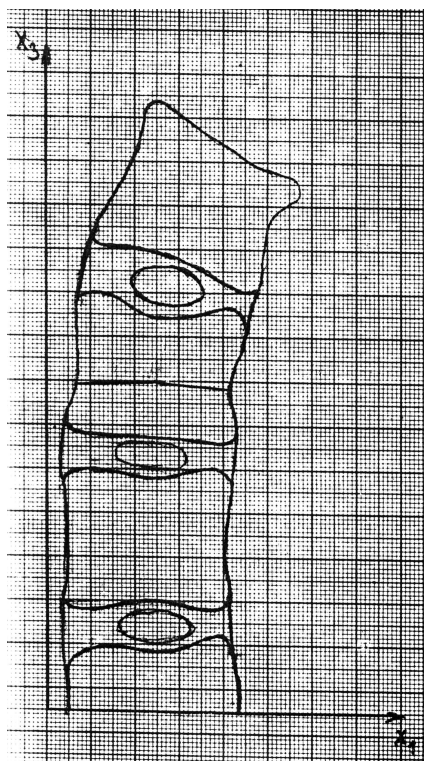
4 Algoritmy umožňující numerickou analýzu umělých náhrad kloubů ve vazbě na CT a MRI snímkování a na navigovanou operační techniku

Před vlastní numerickou analýzou objektu je potřeba mít popis jeho geometrie. Matematický popis geometrie lidského kloubu, ať už zdravého, poškozeného, či kloubní náhrady, není jednoduchým problémem. V posledních letech bylo zpracováno a publikováno množství studií na téma rekonstrukce geometrie na základě CT a MRI dat, využívajících mnoho různých přístupů. Rozmanitost těchto řešení je dána jednak postupným vývojem metod, ale také různými potřebami jednotlivých autorů, respektive různými cíly jednotlivých projektů. Vývoj ani implementace nejnovějších technik na automatizované získávání geometrických dat z MRI a CT snímků není předmětem této studie; tyto problémy vyžadují další práci samostatné vývojové skupiny nebo zakoupení profesionálního software, jako je například *amira* (viz [1]). V následujícím textu uvedeme principy postupu, jakým připravujeme geometrický model pro numerickou analýzu napjatostních poměrů v biomechanickém systému na základě MRI či CT dat. Pro ilustraci zejména uvádíme postup vytváření modelu Chanceho zlomeniny páteře na základě CT snímku.

První fází je identifikace zkoumaných objektů na MRI či CT snímku (segmentace oblasti). V této fázi rozhodneme, které voxely vyznačují přítomnost hledaného objektu. Hledaným objektem rozumíme ty části těla, které jsme se rozhodli zahrnout do našeho matematického modelu – například v případě kolenního kloubu se jedná zejména o holenní kost, stehenní kost, čéšku, o chrupavčitý povrch obou kondylů, můžeme se ale v dalších fázích zajímat rovněž o svaly a vazy či o synoviální tekutinu, lepší rozlišení částí kostí (případně o vystižení nehomogenního charakteru jednotlivých tkání, atp.)

Naším požadavkem je získat co nejpřesnější polohu bodů hranice objektu, respektive množinu voxelů, které tuto hranici tvoří. (Tím je pak samozřejmě dána množina všech bodů, které tvoří hledaný objekt.) Přibližně se dá hranice kosti určit a zakreslit do CT či MRI snímku pouhým odhadem. Přesná identifikace hranic tkání (kostí) z hodnot intenzity udávaných pro každý voxel je však nesnadný úkol, který v tuto chvíli vyžaduje pozornost lékaře, odborníka na MRI respektive CT snímkování. Výrazným vodítkem je totiž předcházející znalost anatomie snímkové oblasti, která napovídá ve kterých místech hranice tkání hledat. Obecným kritériem je pak nejen samotná hodnota intenzity voxelů, ale také prudké změny této intenzity, matematicky řečeno gradient intenzity.

Příklad hranice hledaných oblastí, vytvořené pro model Chanceho zlomeniny páteře, je vidět na obrázku 4.1. Jedná se o manuálně vytvořený obrys hranic třech základních objektů tvořících vyšetřovanou část páteře – obratlů, meziobratlových plotének a nucleus pulposus – na základě CT snímku bederní páteře na obrázku 2.5.



Obrázek 4.1: Model Chanceho zlomeniny páteře, geometrie na základě obr. 2.5.

V literatuře lze nalézt také mnohé metody automatické segmentace oblasti. Jako příklad uvádíme použití *fast-marching* metody na nalezení oblasti MRI snímku, která zachycuje tibiální část kolenního kloubního systému na sagitálním řezu, popsané v článku [15]. Popsaná metoda vychází z MRI dat uložených v DICOM formátu. Pro odstranění šumu z naměřených MRI dat je nejdříve použita adaptivní metoda *symmetric mean* popsaná v článku. Následně je aplikován fast-marching algoritmus, vycházející z předem zadané (malé) uzavřené křivky uvnitř oblasti. Každý bod křivky se pak pohybuje směrem ven kolmo k současné křivce s rychlostí v podstatě nepřímo úměrnou velikosti gradientu intenzity v daném bodě.

V systému navigované operační techniky je geometrie skeletu určena na základě snímaných bodů

na vyšetřované části skeletu pacienta a virtuálního skeletu. V práci [10] je například popsáno, jak je referenční statistický model femorální a tibiální části kloubního systému kolene přizpůsoben, aby odpovídal několika bodům naměřeným lékařem na povrchu skutečného femuru či tibie pacienta. K informacím, jak jsou takto získaná geometrická data v systému navigované operační techniky reprezentována a jak přesně je tedy možné je využít pro námi navrhované metody numerické analýzy, jsme zatím nezískali přístup.

Druhou fází postupu, poté co máme k dispozici množinu bodů určujících hranice zkoumaných objektů, je definování takto určené oblasti v metodě konečných prvků. Pro účely numerické simulace metodou konečných prvků potřebujeme pro každý objekt zadat oblast s po částech polynomiální (v našem případě po částech lineární) hranicí. V programu FEC tuto hranici zadáváme (ve dvourozměrném případě) v podstatě seznamem vrcholů a jejich souřadnicemi. Na hranicích, kde dochází ke kontaktu dvou objektů, zadáváme kontaktní podmínku. Vrcholy na kontaktních hranicích jsou zadány zvlášť jakožto body hranice každého z kolidujících objektů a v datovém souboru jsou dále uvedeny dvojice těchto “sousedních” bodů. Kontaktní podmínka je pak prováděna na těchto kontaktních dvojicích, detaily lze nalézt například v sekci 5.

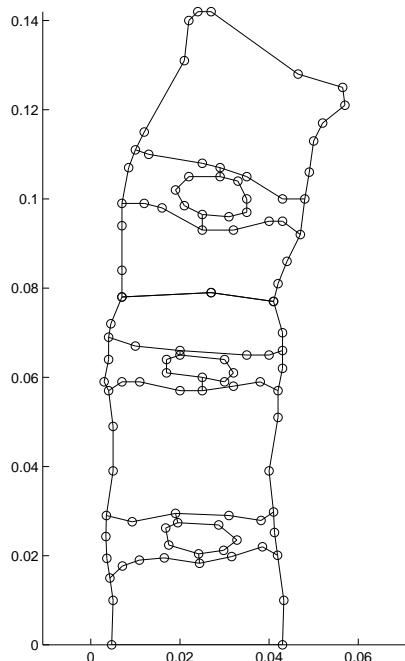
Základní metodou pro nás zůstává ruční zadání, kterému předchází výběr vhodných bodů na hranici individuálně u každého modelu. Přitom se dbá na sladění dvou cílů – aby počet vrcholů zůstal přiměřený, a aby tvar hranice byl zachycen co nejpřesněji. Jako příklad uvedeného postupu ukážeme přípravu geometrie pro model Chanceho zlomeniny páteře.

Na obrázku 4.2 uvádíme geometrii 2D-modelu Chanceho zlomeniny páteře připravenou pro program FEC na základě CT dat, viz obrázky 2.5 a 4.1. Celá výpočetní oblast je rozdělena na několik podoblastí, představujících tkáně různých vlastností. Každé z podoblastí jsou pak přiřazeny materiálové vlastnosti (Youngův modul pružnosti, Poissonova konstanta, hustota, atp.) přímo v datovém souboru určujícím tuto geometrii. Ve vyobrazeném případě modelu zlomeniny páteře se jedná o rozlišení tří typů tkání – obratle, meziobratlové ploténky a nucleus pulposus.

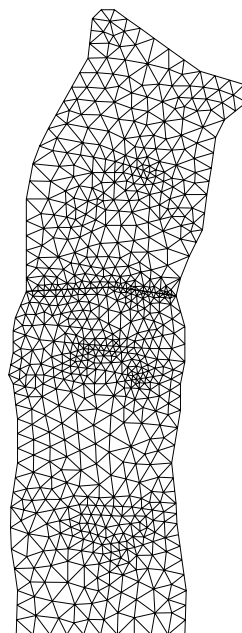
Software pro automatické generování sítě pak na základě takto zadaných hranic oblastí vygeneruje samotnou síť konečných prvků, která pak vstupuje do programu FEC a na které se provádí výpočet. Příklad sítě vygenerované na základě dat vyobrazených na obr. 4.2 je ukázán na obrázku 4.3. Podobně je tomu i v případě metody rozkladu oblasti “non-overlapping domain decomposition method”, kde navíc zadáváme hranice více podoblastí, zpracovávaných pak jednotlivými procesory.

Dalším důležitým krokem, chceme-li se přiblížit ke konečnému cíli, tj. k výpočtům určeným pro posouzení konkrétních situací u konkrétních pacientů, je tvorba úplně trojrozměrné geometrie. Informace o úplně trojrozměrné geometrii je obsažena v získaných datech tak, jak jsme již uvedli v předcházejícím textu (identifikace objektů na MRI a CT snímku), tj. množinou voxelů (jejichž známe souřadnice) určujících příslušnost ke zkoumanému objektu, respektive množinou voxelů určujících polohu hranice objektu. Abychom získali síť konečných prvků pro numerické výpočty, můžeme použít několik přístupů. Podobně, jako postupujeme v dvourozměrném případě, můžeme využít jen informace o poloze bodů hranice a s touto informací dále pracovat. Hranici je pak potřeba vhodně reprezentovat (aproximovat) a na základě této reprezentace je pak možné vytvořit síť konečných prvků automatickým generátorem sítě. Tento postup jsme zatím netestovali, přestože níže citujeme několik studií, které z něj vycházejí.

Jiný postup byl popsán v článku [31] a v [28], kde není nejprve aproximována hranice objektu, ale přímo se využije informace o tom, které voxely jsou součástí objektu. Z těchto voxelů jsou vytvořeny kvádry, jejichž podstavou je jeden nebo více pixelů a jejichž výška je dána vzdáleností mezi řezy. Takto vytvořené kvádry jsou následně ztotožněny s vhodným typem 3D prvků, v tomto případě je na kvádru vygenerována šestice konečných prvků – čtyřstěnů. Ve vrcholech takto vygenerované sítě, které leží na kontaktní hranici, jsou generovány dvojné body z nichž každý patří k jednomu z kolidujících objektů, tj. například z kolidujících částí kloubního systému. Nevýhodou uváděného algoritmu je, že nevyhlazuje vnější hranice studovaného objektu ani kontaktní hranice, což by bylo žádoucí. Použitá implementace dále používala části profesního software ANSYS, který v současnosti není dostupný. Pouze pro informaci uvádíme obrázek z knihy [28], výpočtu napjatosti v oblasti kyčelního kloubu po operaci stříšky dle Boswortha s využitím výstupů ze zobrazení pomocí MRI (na obr. 4.4 je vyobrazení modelu a hraničních podmínek, na obr. 4.5 jsou spočteny vertikální složky tenzoru napětí). Plastika stříšky je obvykle indikována v případech lehčí acetabulární dysplasie. V modelu je 31 vrstev



Obrázek 4.2: Zadání geometrie oblasti na základě obrysu na obr. 4.1.



Obrázek 4.3: Síť konečných prvků generovaná z geometrie na obr. 4.2.

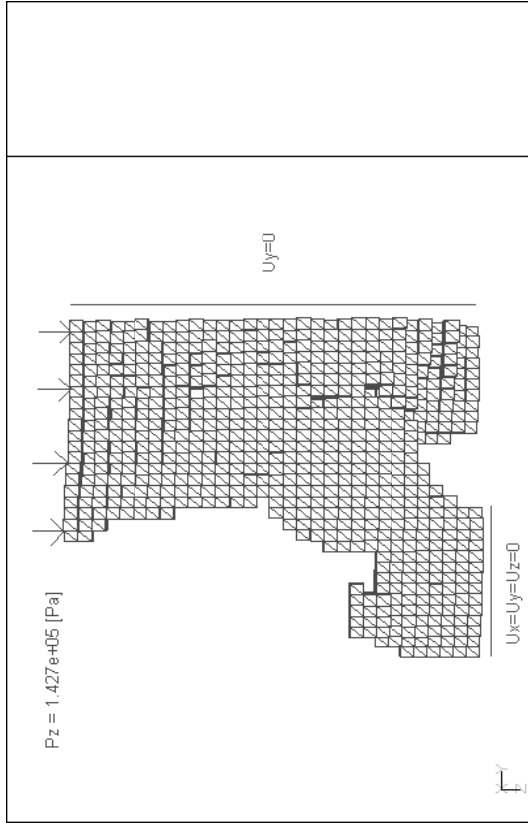
vzdálených od sebe 4mm, každá vrstva obsahovala 512×512 pixelů o rozměrech 0.82×0.82 mm. Rozměry voxelů byly dány $(4 \times 4 \text{ pixely}) \times 4\text{mm}$. Výsledný 3D model obsahoval 10471 uzlů, 6971 prvků šestistěnnů, tj. $6971 \times 6 = 41826$ čtyřstěnnů.

Další z možných metod je popsána v článku [16]. Metoda nejdříve generuje na jednotlivých rovinách křivkách síť bodů. Nalezení vhodného spojení těchto bodů z jednotlivých rovin (tj. určení vhodných vztahů mezi jednotlivými křivkami) je následně generována hrubá 3D síť. Ta je pak na základě *surface-fitting* algoritmů použita pro tvorbu hladké (parametricky dané) 3D-plochy reprezentující hranici objektu.

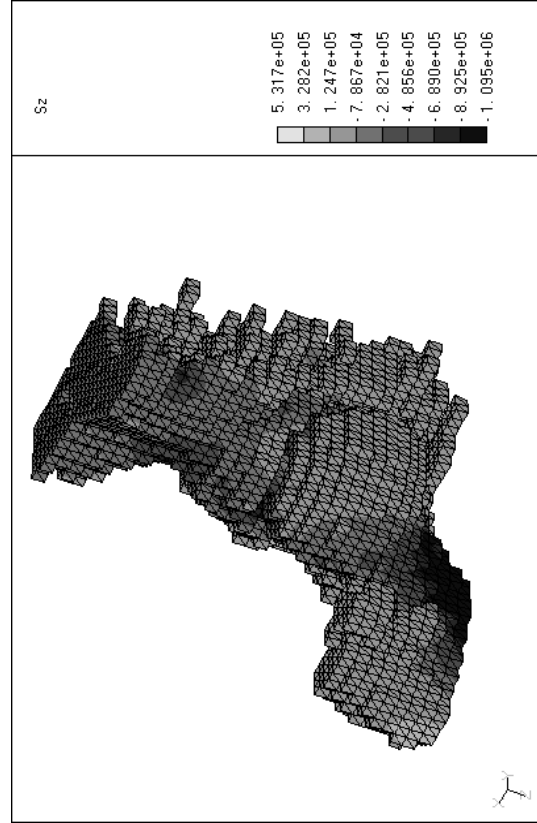
Jiný přístup k automatickému generování 3D-modelů zejména kostí (podobný přístupu používanému u navigované operační techniky) lze nalézt například v [3], kde je použit *mesh-matching* algoritmus: předem vytvořený referenční model femuru je deformován tak, aby odpovídal bodům hranice získaným z CT snímků konkrétního pacienta. Základní myšlenkou v této práci je hledání 3D transformace, složené z posunutí a rotace tuhého tělesa, globální deformace tělesa a lokálních posunutí. Algoritmus pak hledá takovou transformaci která minimalizuje (ve smyslu nejmenších čtverců a zadaného kritéria) vzdálenost transformovaného referenčního modelu od bodů získaných z CT snímku pacienta.

Mnohé biomechanické modely kostí či kloubních systémů se snaží zahrnout nehomogenní charakter elastických vlastností kosti. Příkladem lze uvést [36], kde jsou hodnoty “CT hustoty” (tedy hodnot získané CT snímkováním) naměřené v různých částech femuru použity k zadání materiálových vlastností (Youngův modul pružnosti, Poissonova konstanta, hustota) v daném místě (v příslušném elementu konečně-prvkové sítě).

Obsáhlý přehled literatury o modelování metodou konečných prvků pro účely analýzy skeletu a analýzy a designu například kloubních náhrad, lze dále nalézt v [29]. Dalšími přehledovými články k tematice zobrazovacích metod v medicíně jsou například [2] a [9].



Obrázek 4.4: Model kyčelního kloubu s vyobrazením hraničních podmínek



Obrázek 4.5: Model kyčelního kloubu – vertikální složky spočteného napětí

5 Algoritmy pro modelové úlohy statického a dynamického zatěžování kyčelního a kolenního kloubu

5.1 Příklad statického zatěžování. Lineární pružnost

Navrhovaná metoda je založena na výsledcích článků Nedoma [18], Hlaváček, Nedoma [13], kde úloha byla řešena v lineární termo-pružnosti. V této části se omezíme pouze na elastickou část problému.

Buď $\Omega = \cup_{l=1}^s \Omega^l$ oblast, kterou zaujímá vyšetřovaný kloubní systém, její hranici označme $\partial\Omega$, její části $\Gamma_\tau = {}^1\Gamma_\tau \cup {}^2\Gamma_\tau, \Gamma_u = {}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u, \Gamma_0$ a $\Gamma_c = \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$, kde $k \neq l, k, l \in \{1, \dots, s\}$. Buď $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2) = (-n_2, n_1)$ v 2D případě a $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ v 3D případě vnější normála resp. jednotkový tečný vektor, dále označme $\tau_i = \tau_{ij}n_j$ vektor napětí, jeho normálovou a tečnou složku $\tau_n = \tau_i n_i = \tau_{ij}n_j n_i$, $\tau_t = \tau - \tau_n \mathbf{n}$ a normálové a tečné složky vektoru posunutí $u_n = u_i n_i$, $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - u_n \mathbf{n}$. Dále označme $\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^l$ (indexy k, l označují sousední komponenty kloubu resp. jeho umělé totální náhrady) jsou posunutí v sousedních komponentách kloubu resp. jejich umělých náhrad.

Definujme prostory a množiny virtuálních posunutí

$$V_0 = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{W} \equiv [H^1(\Omega^1)]^N \times \dots \times [H^1(\Omega^s)]^N, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ na } {}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u, v_n = 0 \text{ na } \Gamma_0\},$$

$$V = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{W}, \mathbf{v} = \mathbf{u}_0 \text{ na } {}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u, v_n = 0 \text{ na } \Gamma_0\}$$

a množinu přípustných posunutí

$$K = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V, v_n^k - v_n^l \leq 0 \text{ na } \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}\}.$$

Potom problém nalezení rozložení napjatosti v kloubním systému vede na řešení následující úlohy:

Úloha $(\mathcal{P})_v$: najít funkci $\mathbf{u} \in K$, takovou, že

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j_{gn}(\mathbf{v}) - j_{gn}(\mathbf{u}) \geq S(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in K, \quad (5.1)$$

kde pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^2 a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} c_{ijkl} e_{ij}(\mathbf{u}) e_{kl}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ S(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^2 S^i(\mathbf{v}^i) = \int_{\Omega} F_i v_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds, \\ j_{gn}(\mathbf{v}) &= \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_c^{kl} |\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l| ds = \langle g_c^{kl}, |\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l| \rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Úloha je ekvivalentní úloze hledání minima potenciální energie nad množinou přípustných posunutí, tj.

Úloha $(\mathcal{P})_{vp}$: najít funkci $\mathbf{u} \in K$, takovou, že

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}) &\leq L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in K, \\ L(\mathbf{v}) &= L_0(\mathbf{v}) + j_{gn}(\mathbf{v}), \quad L_0(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - S(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

V případě, že se jednotlivé složky kloubního systému vedle vzájemného posunu mohou i otáčet, zavedeme množinu všech posunutí a rotací tuhých těles

$$\begin{aligned} P &= \prod_{i=1}^s P^i, \quad P^i = \{\mathbf{v}^i \mid \mathbf{v}^i \in [H^1(\Omega^i)]^N, e_{ij}(\mathbf{v}^i) = 0 \text{ s.v.}\}, \\ P^i &= \{\mathbf{v}^i \mid \mathbf{v}^i \in [H^1(\Omega^i)]^3, \mathbf{v}^i = \mathbf{a}^i + \mathbf{b}^i \times \mathbf{x} \text{ pro } N = 3, \\ P^i &= \{\mathbf{v}^i \mid \mathbf{v}^i \in [H^1(\Omega^i)]^2, v_1^i = a_1^i - b^i x_2, v_2^i = a_2^i + b^i x_1\} \text{ pro } N = 2, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^i, i = 1, \dots, s$, jsou libovolné reálné vektory pro $N = 3$ a $a_1^i, a_2^i, b^i, i = 1, \dots, s$, jsou libovolné reálné skaláry pro $N = 2$. Množina K je konvexní kužel a je uzavřená podmnožina V_0 . Nechť $P_V = V_0 \cap P$ a nechť $V_0 = P_V \oplus Q_0$ je ortogonální rozklad V_0 .

Úloha je řešitelná jestliže platí

$$\begin{aligned} \{\mathbf{v} \in P_V \mid v_n^k - v_n^l = 0 \text{ na } \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}\} &= \emptyset, \\ S(\mathbf{w}) &< j_{gn}(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in K \cap P \setminus \{0\}, \quad \text{čili} \\ \int_{\Omega} F_i w_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\tau}} P_i w_i ds - \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_c^{kl} |\mathbf{w}_t^k - \mathbf{w}_t^l| ds &< 0 \quad \forall \mathbf{w} \in K \cap P \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Numerické řešení

Oblast $\Omega = \cup_{i=1}^s \Omega^i$, kterou zaujímá vyšetřovaný kloubní systém, aproximujeme oblastí $\Omega_h = \cup_{i=1}^s \Omega_h^i$ s polygonální hranicí $\partial\Omega_h = \bar{\Gamma}_{uh} \cup \bar{\Gamma}_{\tau h} \cup \bar{\Gamma}_{ch} \cup \bar{\Gamma}_{0h}$, kde $\bar{\Gamma}_{uh}, \bar{\Gamma}_{\tau h}, \bar{\Gamma}_{ch}, \bar{\Gamma}_{0h}$ jsou počásteč lineární. Oblast $\Omega_h = \cup_{i=1}^s \Omega_h^i$ pokryjeme triangulací - trojúhelníky pro $N = 2$ a čtyřstěny pro $N = 3$, nechť q_i jsou uzly užitě triangulace. Buď $\mathcal{T}_h^i, i = 1, \dots, s$, označují triangulaci polygonální oblasti $\Omega_h^i, i = 1, \dots, s$, a $\mathcal{T}_h = \{\mathcal{T}_h^i, i = 1, \dots, s\}$. Předpokládáme, že $\mathcal{T}_h^i, i = 1, \dots, s$, jsou konzistentní s užitým rozkladem hranice $\partial\Omega_h^i, i = 1, \dots, s$ a nechť uzly ležící na Γ_c^{kl} patří k sousedním částem kloubního systému, tj. k podoblastem Ω^k and Ω^l , které jsou ve vzájemném kontaktu. O triangulaci \mathcal{T}_h předpokládáme, že je regulární, tj. jestliže všechny $\mathcal{T}_h^i, i = 1, \dots, s$, jsou regulární, h je maximální strana ($N = 2$) resp. hrana ($N = 3$) triangulace. Pro každý uzel q_i triangulace \mathcal{T}_h na Γ_c^{kl} a Γ_0 definujeme množinu indexů $\mathcal{N}_i^{kl} = \{j \in \{1, \dots, r\} \mid q_i \in \Gamma_{cj}^{kl}\}$ a $\mathcal{N}_i = \{j \in \{1, \dots, r'\} \mid q_i \in \Gamma_{0j}\}$, kde $\Gamma_c^{kl} = \cup_{j=1}^r \Gamma_{cj}^{kl}, \Gamma_0 = \cup_{j=1}^{r'} \Gamma_{0j}, \Gamma_{cj}^{kl}, \Gamma_{0j}$ označují segmenty na Γ_c^{kl}, Γ_0 a r, r' označují počet segmentů na Γ_c^{kl} a Γ_0 .

Definujme konečně dimensionální množinu V_h virtuálních posunutí

$$\begin{aligned} V_h &= \{\mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in [C(\Omega^1)]^N \times \dots \times [C(\Omega^s)]^N, \mathbf{v}_h|_{\mathcal{T}_{hi}} \in [P_1(\mathcal{T}_{hi})]^2, \forall \mathcal{T}_{hi} \in \mathcal{T}_h; \\ &v_{hn}(q_i) = 0, q_i \in \Gamma_0; \mathbf{v}_h(q_i) = \mathbf{u}_0(q_i), q_i \in \Gamma_u\} \end{aligned}$$

a konečně dimensionální množinu přípustných posunutí

$$K_h = \{\mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in V_h, (v_{hn}^k - v_{hn}^l)(q_i) \leq 0, q_i \in \Gamma_c^{kl}, 1 \leq k, l \leq s\}.$$

Řešíme následující úlohu:

Úloha $(\mathcal{P})_h$: hledáme funkci $\mathbf{u}_h \in K_h$ splňující

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{u}_h) + j_{gn}(\mathbf{v}_h) - j_{gn}(\mathbf{u}_h) \geq S(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in K_h. \quad (5.5)$$

Hlavní výsledek, dávající vztah mezi řešením původní spojité úlohy a její aproximací metodou konečných prvků $(\mathcal{P})_h$ jestliže $h \rightarrow 0_+$, za předpokladu, že řešení úlohy je dostatečně hladké.

Věta 1: Nechť $\partial\Omega$ a její části $\Gamma_u, \Gamma_\tau, \Gamma_0, \Gamma_c$ jsou počástech polygonální pro $N = 2$ a počástech mnohostěnný (polyhedrální) pro $N = 3$. Nechť řešení úlohy (\mathcal{P}) $\mathbf{u} \in K \cap [H^2(\Omega)]^N, \tau_{ij}(\mathbf{u}^t) \in H^1(\Omega^t), i, j = 1, 2$ a $\iota = 1, \dots, s, \tau_n^{kl}(\mathbf{u}) \in L^\infty(\Gamma_c^{kl}), u_n^k, u_n^l \in H^2(\Gamma_j^{kl}), k, l = 1, \dots, s$ a $j = 1, \dots, r$. Nechť $K_h \subset K$. Nechť změny $u_n^k - u_n^l < 0 \rightarrow u_n^k - u_n^l = 0$ a $\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l = 0 \rightarrow \mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l \neq 0$ nastávají pouze v konečně mnoha bodech hranice $\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$. Potom pro semi-koercivní případ

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h| = O(h), \text{ kde } |\mathbf{w}| = \left(\sum_{\iota=1}^s \int_{\Omega_h^\iota} e_{ij}(\mathbf{w}^i) e_{ij}(\mathbf{w}^i) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.6)$$

a pro koercivní případ

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| = O(h). \quad (5.7)$$

Vhodné algoritmy řešení jsou předmětem studie v TR 921, zpracované Dr. Hlaváčkem (viz [12]).

5.2 Příklad statického a dynamického zatěžování. Lineární vazko-pružnost

V odstavci 2.2.5 TR-950 (Nedoma [23]) byla studována modelová úloha dynamického zatěžování kloubního systému pro případ, že setrvačné síly, útlum a tření je možno zanedbat. Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady pro fyzikální parametry jako ve zmiňovaném odstavci 2.2.5 TR-950.

Variační formulace úlohy pak vedla na řešení úlohy:

Úloha $(\mathcal{P})_{0v}$: Hledáme vektorovou funkci $\mathbf{u}: \bar{i} \rightarrow V$ takovou, že $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{K}$ pro s.v. $t \in I$, a

$$\begin{aligned} a^{(0)}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + a^{(1)}(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) &\geq \\ &\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \text{ s.v. } t \in I, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.9)$$

Oblast Ω , kterou zaujímá studovaný kloubní systém, aproximujme polygonální pro $N = 2$, resp. polyhedrální pro $N = 3$, oblastí Ω_h . Nechť $\{\mathcal{T}_h\}$ je regulární třída konečně prvkového pokrytí oblasti $\bar{\Omega}$. Nechť $V_h \subset V$ je konečně prvkový prostor lineárních prvků odpovídající pokrytí \mathcal{T}_h . Potom $\mathcal{K}_h = V_h \cap \mathcal{K}$ je tvořen počástech lineárními funkcemi, které jsou nulové v uzlech na $\bar{\Gamma}_u$ a jejichž normálové složky jsou nekladné v uzlech na $\bar{\Gamma}_c^{kl}$. Množina \mathcal{K}_h je neprázdná, uzavřená, konvexní podmnožina V_h . Nechť $\mathbf{u}_{0h} \in \mathcal{K}_h$ je aproximace \mathbf{u}_0 .

Konečně prvková aproximace vedla na řešení úlohy:

Úloha $(\mathcal{P})_{0h}$: Hledáme vektorovou funkci $\mathbf{u}_h: \bar{i} \rightarrow V_h$ takovou, že $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_{0h}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$, a pro s.v. $t \in I, \mathbf{u}_h(t) \in \mathcal{K}_h$ a

$$\begin{aligned} a^{(0)}(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_h(t)) + a^{(1)}(\mathbf{u}_h'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_h(t)) &\geq \\ &\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_h(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}_h, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_{0h}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_h, \quad (5.11)$$

V TR-950 (Nedoma [23]) bylo ukázáno za jakých podmínek je úloha řešitelná a dán odhad chyby řešení $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$. Výsledek je v následující větě:

Věta 2: Nechť oblast Ω je mnohoúhelník pro $N = 2$, a mnohostěn pro $N = 3$. Předpokládejme, že $\mathbf{u}_{0h} \in \mathcal{K}_h$ takové, že $\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_1 \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0$. Potom numerická metoda konverguje a platí

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I;V)} \rightarrow 0 \text{ pro } h \rightarrow 0. \quad (5.12)$$

Je-li navíc $\tau_n \in L^\infty(I; L^2(\Gamma_\tau))$, $\mathbf{u} \in H^1(I; H^{2,N}(\Omega))$, $u_n|_{\cup \Gamma_c^{kl}} \in L^1(I; H^2(\cup \Gamma_c^{kl}))$ a položíme-li $\mathbf{u}_{0h} = r_h \mathbf{u}_0$, kde $r_h \mathbf{u}_0$ je konečně prvkový interpolant \mathbf{u}_0 , potom chyba řešení je

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I;V)} = O(h). \quad (5.13)$$

Za předpokladu, že

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}^{(0)} e_{kl}(\mathbf{u}(t)) + \lambda c_{ijkl}^{(0)} e_{kl}(\mathbf{u}(t)), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (5.14)$$

se dá ukázat, že kontaktní úloha v lineární pružnosti s $\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}(t))$ je speciální případ kontaktní úlohy v lineární vazko-pružnosti s krátkou pamětí. Důkaz je podobný důkazu z odstavce 2.3.2 TR-950 (Nedoma [23]) pro vazko-pružnost s dlouhou pamětí.

5.3 Příklad statického a dynamického zatěžování. Nelineární pružnost

Algoritmus je založen na výsledcích práce Nedoma, Hlaváček [26]. Uvedený algoritmus lze aplikovat pro statické zatěžování kloubního systému a v případě dynamického zatěžování kloubního systému pak v každém časovém kroku.

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2(3)$, kterou zaujímá vyšetřovaný kloubní systém, “triangulujeme”. Potom oblast $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ pokryjeme systémem m trojúhelníků T_h ve 2D případě a systémem m čtyřstěnů ve 3D případě, generující triangulaci \mathcal{T}_h takovou, že $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^m T_{hi}$ a takovou, že dva sousední trojúhelníky mají společný pouze vrchol nebo společnou stranu ve 2D případě, resp. dva sousední čtyřstěny mají pouze společný vrchol nebo stranu nebo společnou stěnu ve 3D případě. Nechť $h = \max_{1 \leq i \leq m} (\text{diam} T_{hi})$ a nechť triangulace $\{\mathcal{T}_h\}$ jsou regulární. Předpokládejme, že $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_\tau$, $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_c$, $\bar{\Gamma}_\tau \cap \bar{\Gamma}_c$ se shodují s vrcholy nebo stranami triangulace \mathcal{T}_h . Definujeme

$$V_h = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [C(\Omega)]^N, \mathbf{v}|_{T_h} \in [P_1]^N, \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_u \forall T_h \in \mathcal{T}_h\},$$

kde P_1 je prostor všech lineárních polynomů a

$$K_h = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V_h, v_n^k - v_n^l \leq 0 \text{ na } \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}\} = K \cap V_h,$$

kde K_h je konvexní a uzavřená podmnožina $V_h \forall h$. Potom užitím metody konečných prvků a metody sečen (FEM-secant modules method) vede algoritmus na řešení posloupností variačních nerovnic semi-koercivního typu s proměnnými koeficienty:

$$\begin{aligned} &\text{nalézt } \mathbf{u}_{n+1}^h \in K_h, n = 1 = 1, 2, \dots \text{ takové, že} \\ &a(\mathbf{u}_n^h; \mathbf{u}_{n+1}^h, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{n+1}^h) \geq (\mathbf{f}^h, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{n+1}^h) \forall \mathbf{v} \in K_h. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Systém variačních nerovnic (5.15) představuje systém lineárních variačních nerovnic z teorie kontaktních úloh v lineární pružnosti, kde elastické koeficienty c_{ijkl} jsou zaměněny koeficienty $c_{ijkl}^*(\mathbf{x}) = 2\lambda A^{\lambda-1}(e_{ij}(\mathbf{u}_n^h))c_{ijkl}(\mathbf{x})$.

Dá se ukázat, že platí odhad

$$\|\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^h\|_{1,\Omega} \rightarrow O(h) \text{ pro } h \rightarrow 0, \quad (5.16)$$

kde \mathbf{u}_{n+1} je řešení $(n+1)$ -tého přiblížení v metodě sečen a \mathbf{u}_{n+1}^h je řešení úlohy (5.15). Konvergence metody sečen je dokazána v Nečas, Hlaváček [17].

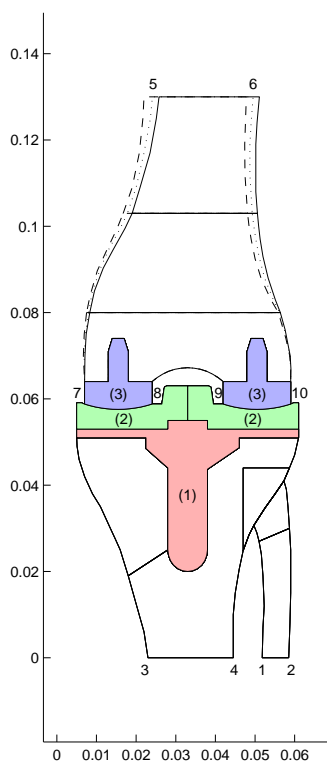
6 Aplikace algoritmů umožňujících numerickou analýzu umělých náhrad kloubů ve vazbě na navigovanou operační techniku, analýza numerických výsledků

Cílem této podkapitoly je porovnat biomechanické vlivy různého stupně valgozity při totální náhradě kolenního kloubu (TKP) v rámci lineární teorie pružnosti.

Při hodnocení osových poměrů skeletu dolní končetiny před operací TKP kolenního kloubu předpokládáme, že geometrie kloubního systému a mechanická osa dolní končetiny byly získány z řídicí jednotky navigované operační techniky. Ve studovaném případě jde o modelovou úlohu, kde geometrie kloubního systému byla získána z rtg. snímku dolní končetiny a studovány axiální úchyly 3,5,7 a 9 st. Jelikož se ukázalo, že optimální úhel valgozity při resekcí dolního konce femuru je cca 7st, případ 3 st. zde nebudeme diskutovat, byl však publikován v práci Daněk et al. [6]. Předpoklad dodržení správného napětí měkkých tkání zajišťující vyváženost ve všech částech kloubu a především dodržení osových poměrů ve smyslu zachování resp. obnovení zátěže v mechanické ose dolní končetiny je pro dlouhodobé kotvení TKP kolenního kloubu zcela zásadním požadavkem, který musel předpokládat i náš matematický model.

Pro numerickou analýzu byla použita metoda konečných prvků a metoda rozkladu oblasti bez překrývání pro kontaktní úlohu teorie pružnosti (Daněk [5], Daněk et al. [6] a [7], kde vyšetřovaná femorotibiální oblast kolenního kloubu zaujímá oblast Ω s hranicí, označme ji symbolem $\partial\Omega$. Hranice $\partial\Omega$ je tvořena částmi 1-2 a 3-4, kde jsou fibula a tibia upevněny, částmi 7-8 a 9-10, jež jsou kontaktními hranicemi mezi oběma částmi femorotibiálního kloubu, částí 11-12, kde se fibula vazivem přimyká k tibii, částí 5-6, kde je předepsáno zatížení, na zbývajících částech hranice $\partial\Omega$ je femorotibiální kloub nezátížen.

Uvažovány byly 3 modely totální náhrady levého kolenního kloubu ve vazbě na axiální úchyly 5,7,9 st, označené jako MODEL I, MODEL II a MODEL III. Modely jsou uvažovány ve frontálním řezu, kde je možno analyzovat vliv axiální úchyly, a v sagitálním řezu. Sagitální řez o vlivu axiální úchyly nic nevyovídá, vypovídá však o přetížení zadní části tibiálního plata v předozadním směru a tedy o jeho případném silném opotřebení. MODEL I odpovídal úhlu valgozity při resekcí dolního konce femuru 5 stupňů, MODEL II 7 stupňů a MODEL III 9 stupňů (obr. 6.1). Ve všech modelech byly



Obrázek 6.1: Geometrie pro MODEL I, II a III - frontální řez

uvažovány následující materiálové parametry (Youngův modul pružnosti E a Poissonova konstanta ν):

- kost: $E = 1.71 \times 10^{10}[Pa]$, $\nu = 0.25$,
- (1) Ti6Al4V: $E = 1.15 \times 10^{11}[Pa]$, $\nu = 0.3$,
- (2) Chirulen: $E = 3.4 \times 10^8[Pa]$, $\nu = 0.4$,

(3) CoCrMo: $E = 2.08 \times 10^{11} [Pa]$, $\nu = 0.3$.

Okrajové podmínky předepsány na částech 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10 a 11-12. Nulové posunutí předepsáno na částech 1-2 a 3-4, na části 5-6 předepsáno zatížení $0.215 \times 10^7 [Pa]$, jednostranná kontaktní hranice na části hranice 7-8, 9-10 a 11-12.

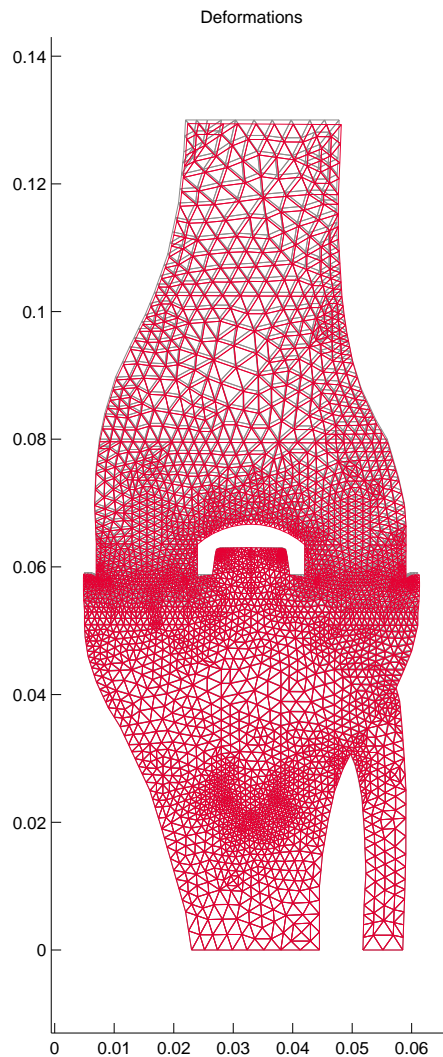
Statistika užití diskretizace:

MODEL I: 13 podoblastí, 3737 uzlů, 7132 prvků, 31+31+15 kontaktních podmínek, 344 prvků na rozhraních mezi podoblastmi,

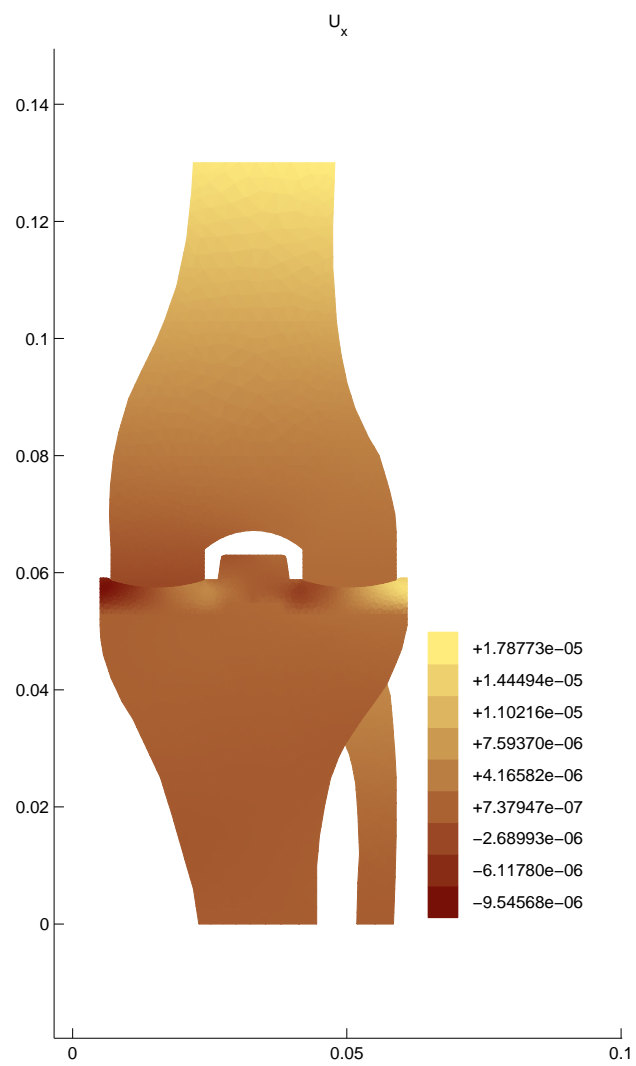
MODEL II: 13 podoblastí, 3780 uzlů, 7208 prvků, 31+31+15 kontaktních podmínek, 350 prvků na rozhraních mezi podoblastmi,

MODEL III: 13 podoblastí, 3763 uzlů, 7180 prvků, 31+31+15 kontaktních podmínek, 346 prvků na rozhraních mezi podoblastmi.

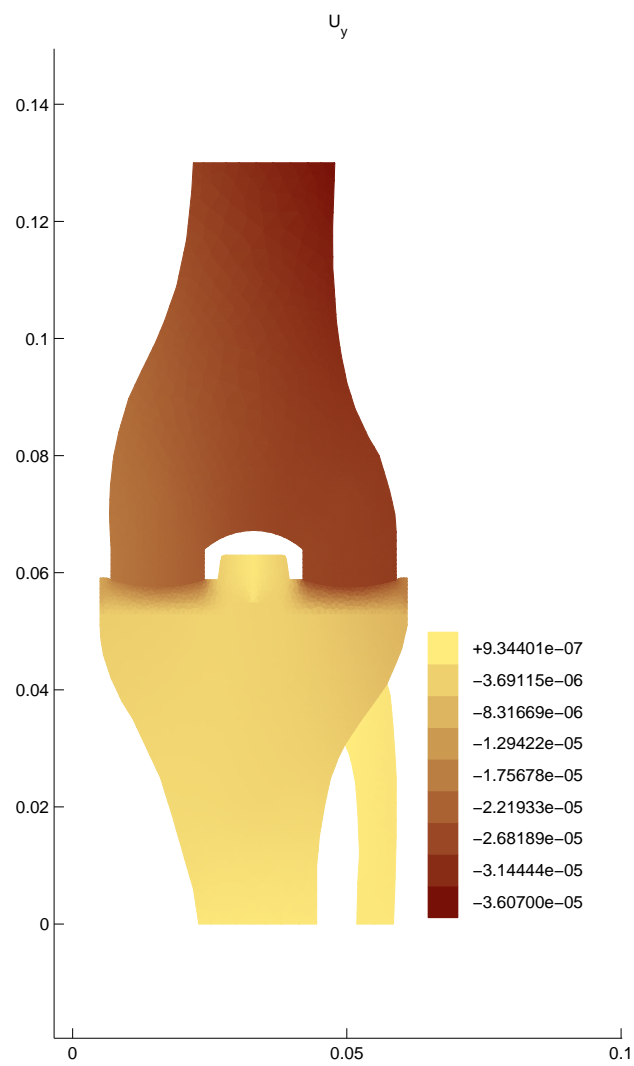
Obdržené výsledky jsou na obr. 6.2-6.28 pro osové odchylky 5, 7 a 9 stupňů.



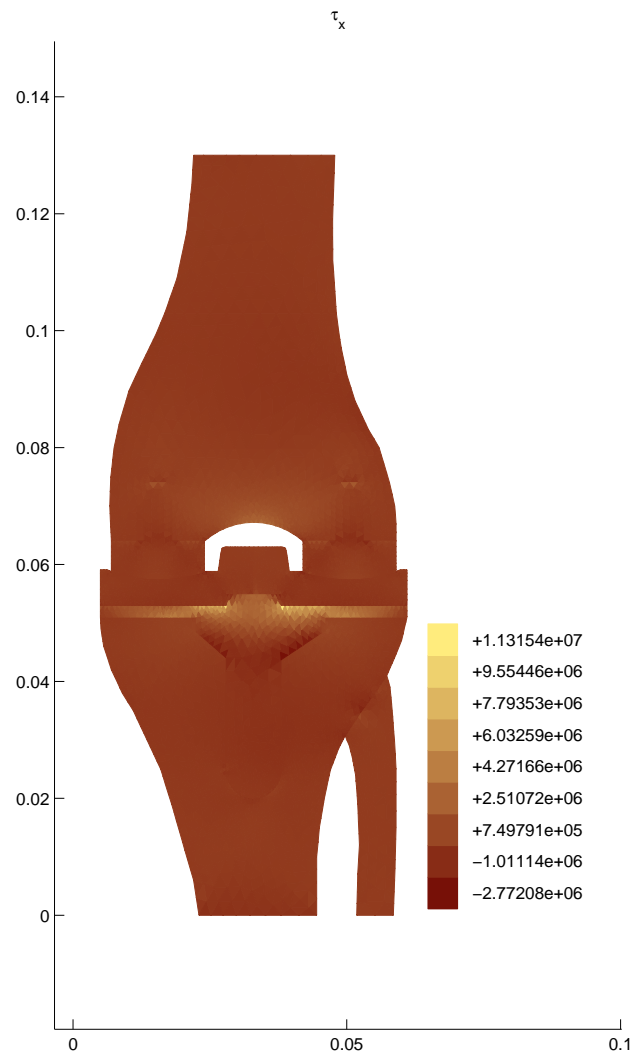
Obrázek 6.2: MODEL I - deformace (faktor zvětšení 20)



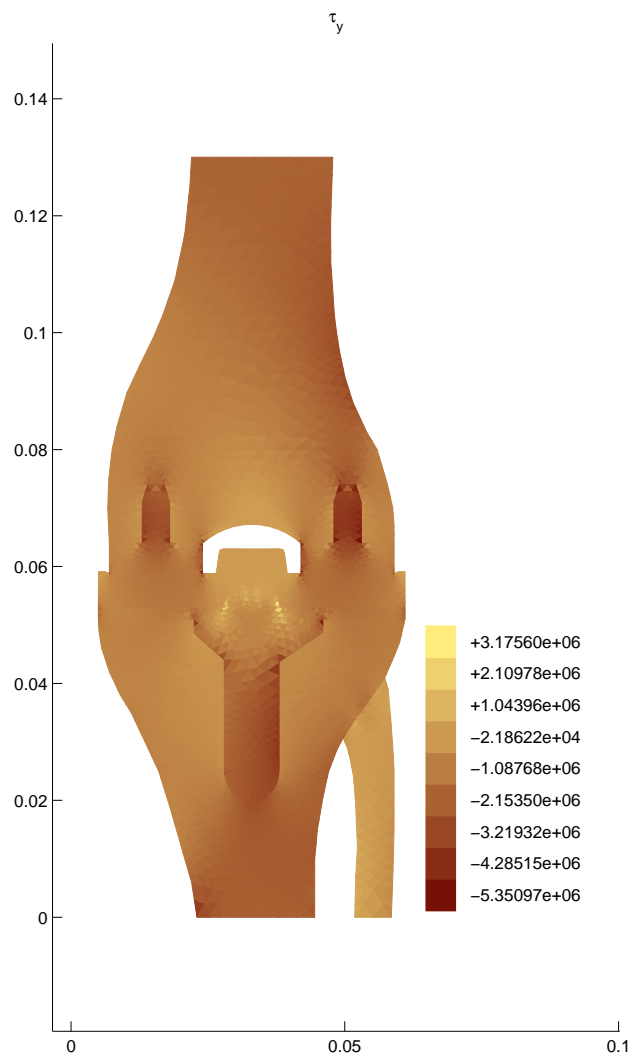
Obrázek 6.3: MODEL I - horizontální složka posunutí



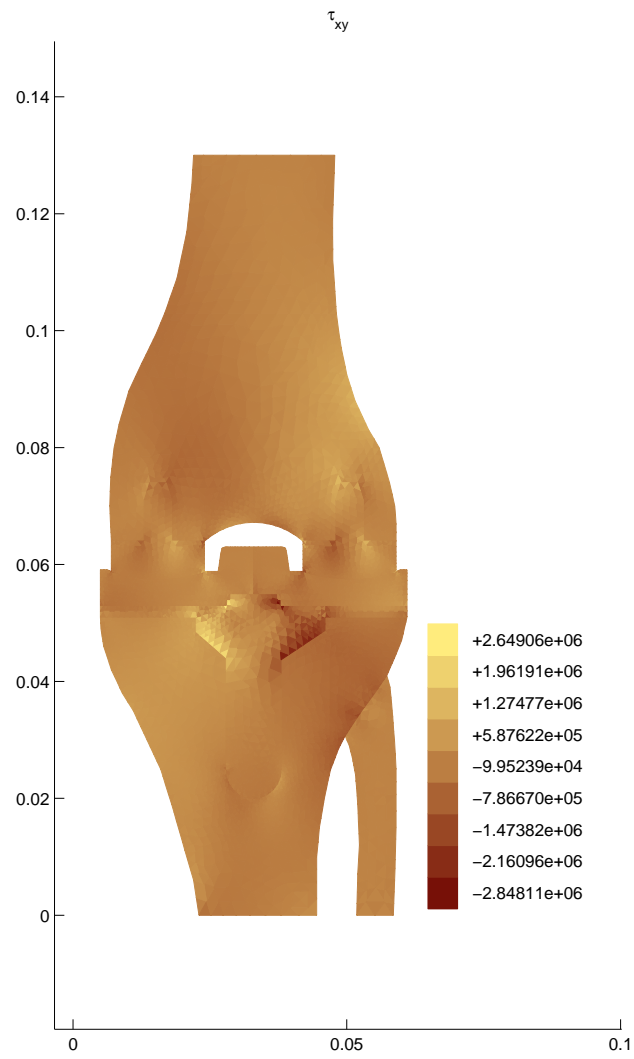
Obrázek 6.4: MODEL I - vertiální složka posunutí



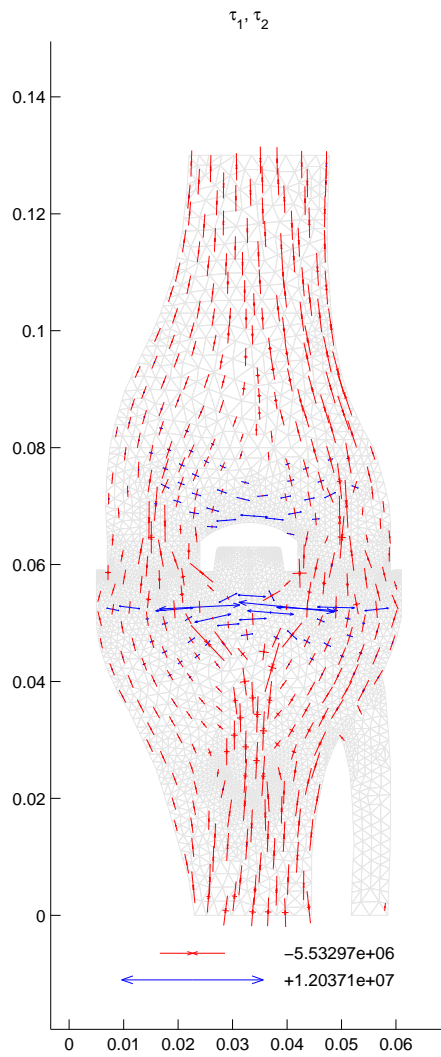
Obrázek 6.5: MODEL I - horizontální složka napětí



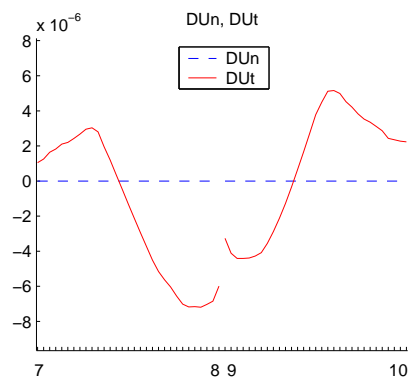
Obrázek 6.6: MODEL I - vertiální složka napětí



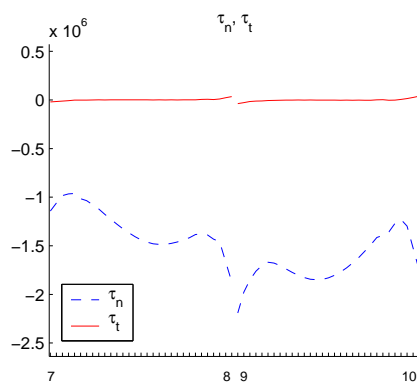
Obrázek 6.7: MODEL I - smyková napětí



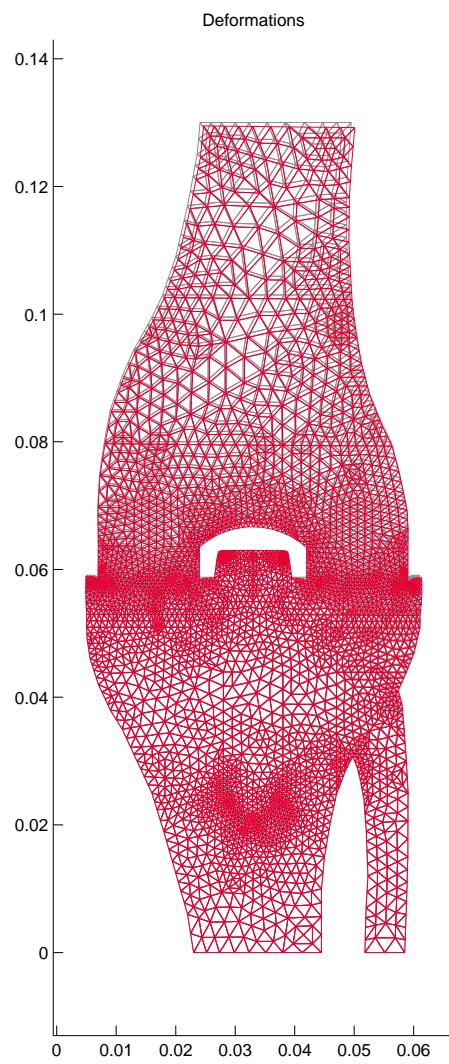
Obrázek 6.8: MODEL I - hlavní napětí



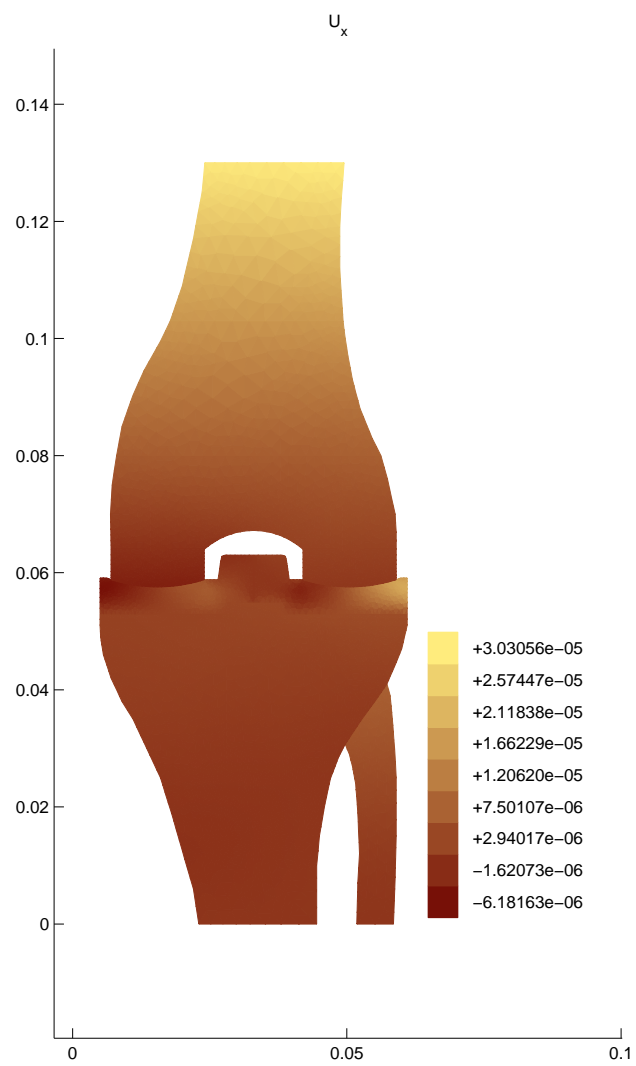
Obrázek 6.9: MODEL I - normálová a tečná složka posunutí na kontaktní hranici



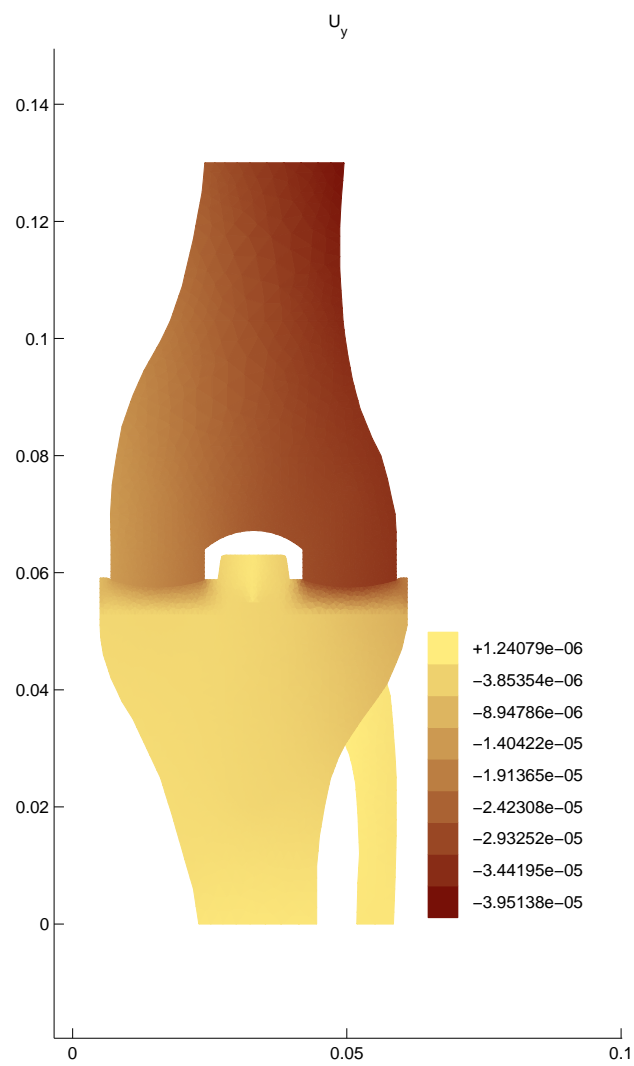
Obrázek 6.10: MODEL I - normálová a tečná složka napětí na kontaktní hranici



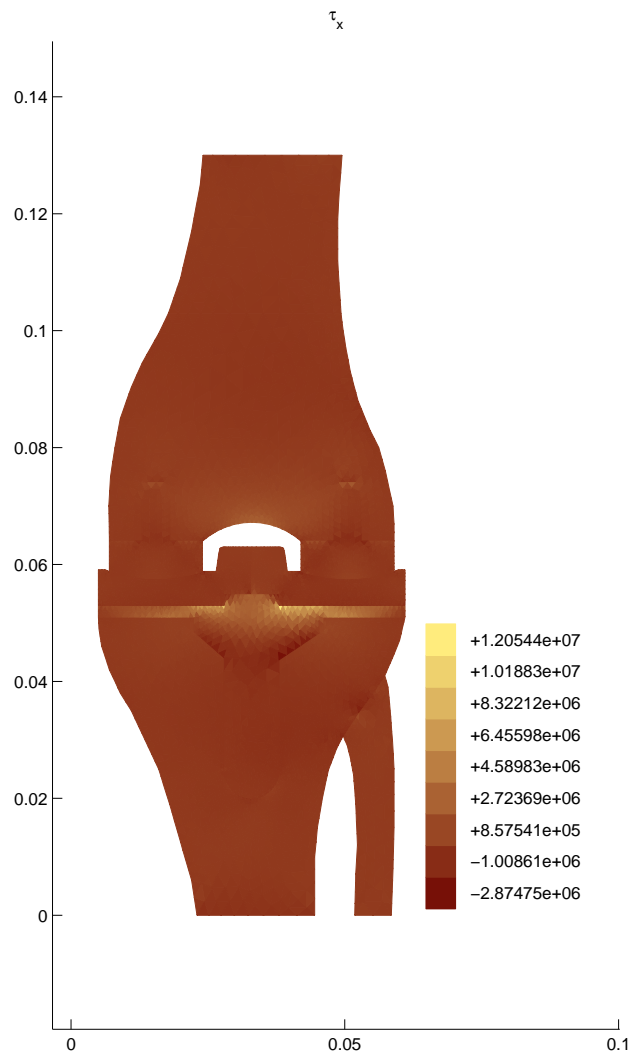
Obrázek 6.11: MODEL II - deformace (faktor zvětšení 20)



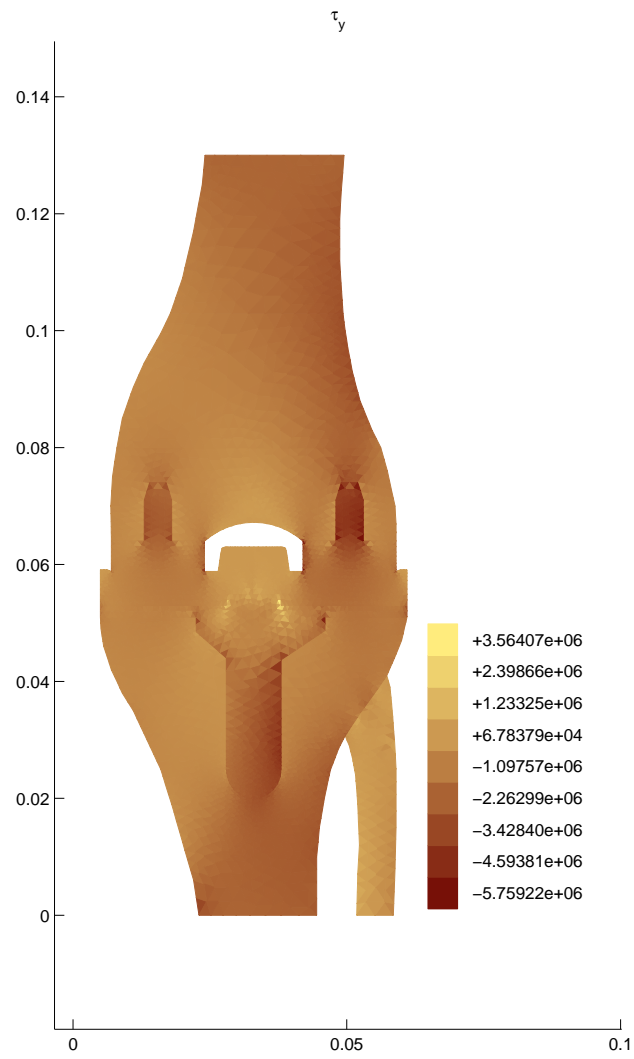
Obrázek 6.12: MODEL II - horizontální složka posunutí



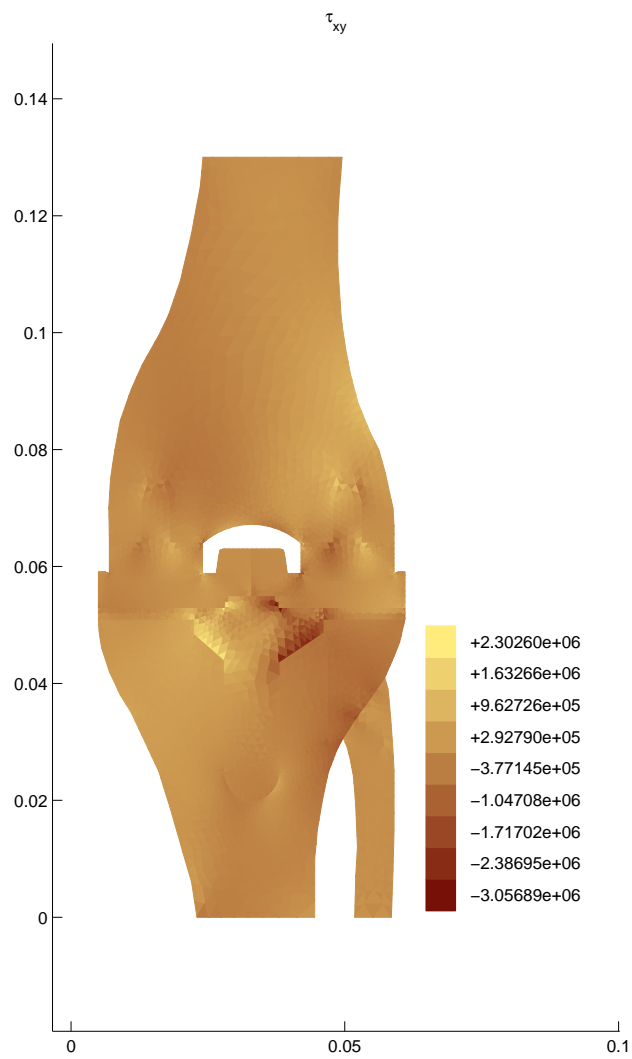
Obrázek 6.13: MODEL II - vertiální složka posunutí



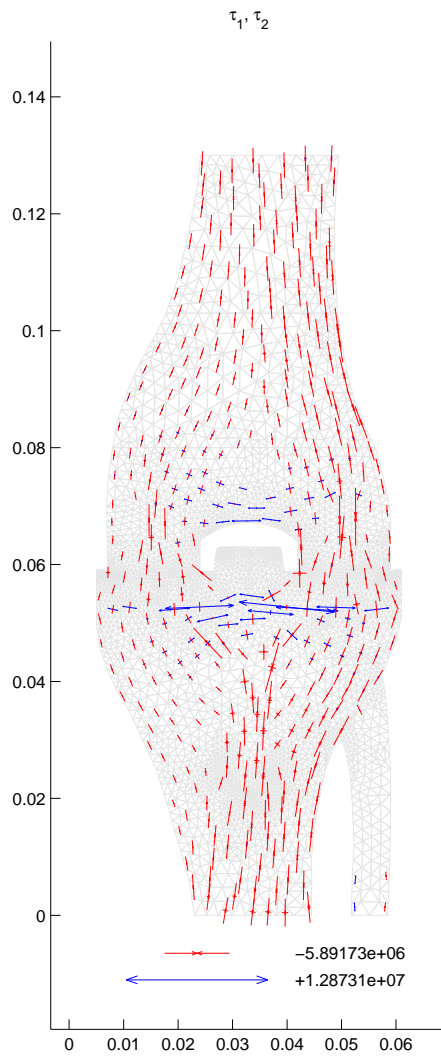
Obrázek 6.14: MODEL II - horizontální složka napětí



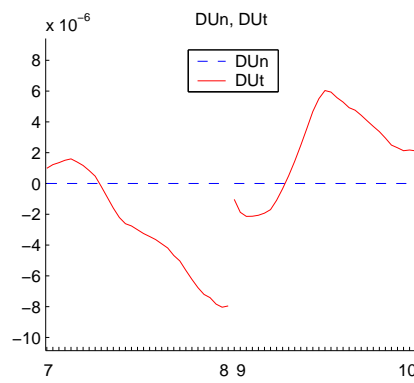
Obrázek 6.15: MODEL II - vertiální složka napětí



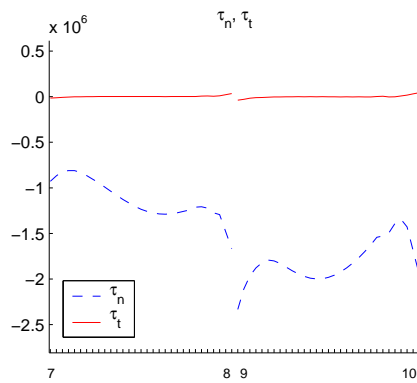
Obrázek 6.16: MODEL II - smyková napětí



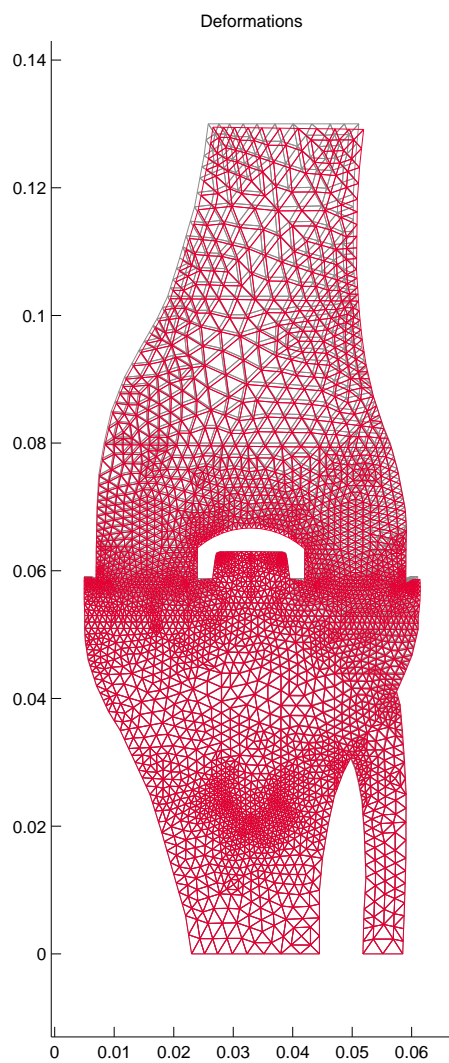
Obrázek 6.17: MODEL II - hlavní napětí



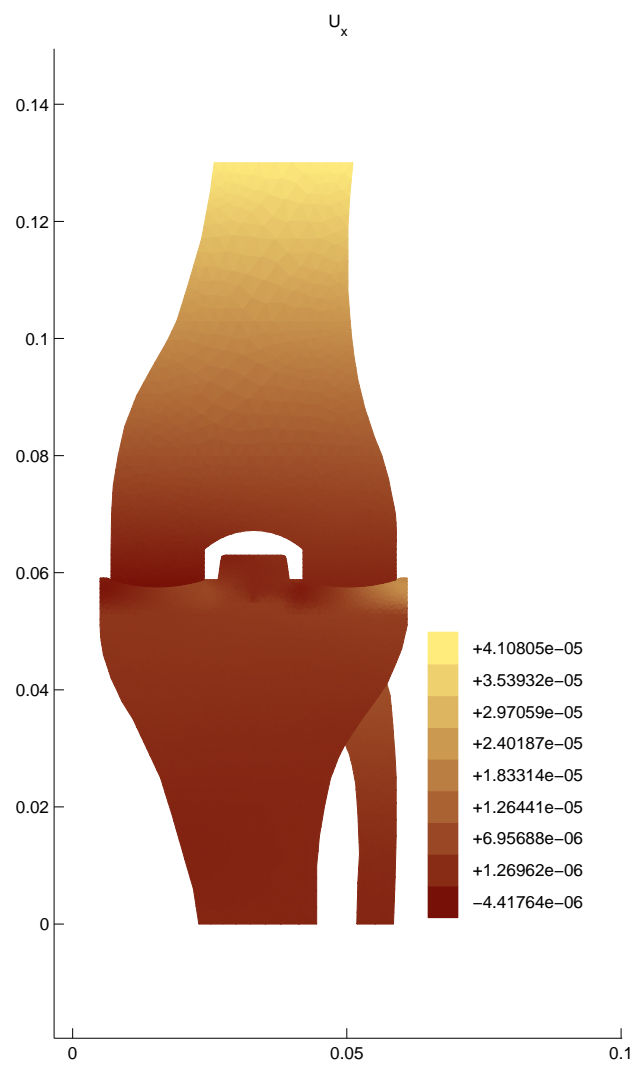
Obrázek 6.18: MODEL II - normálová a tečná složka posunutí na kontaktní hranici



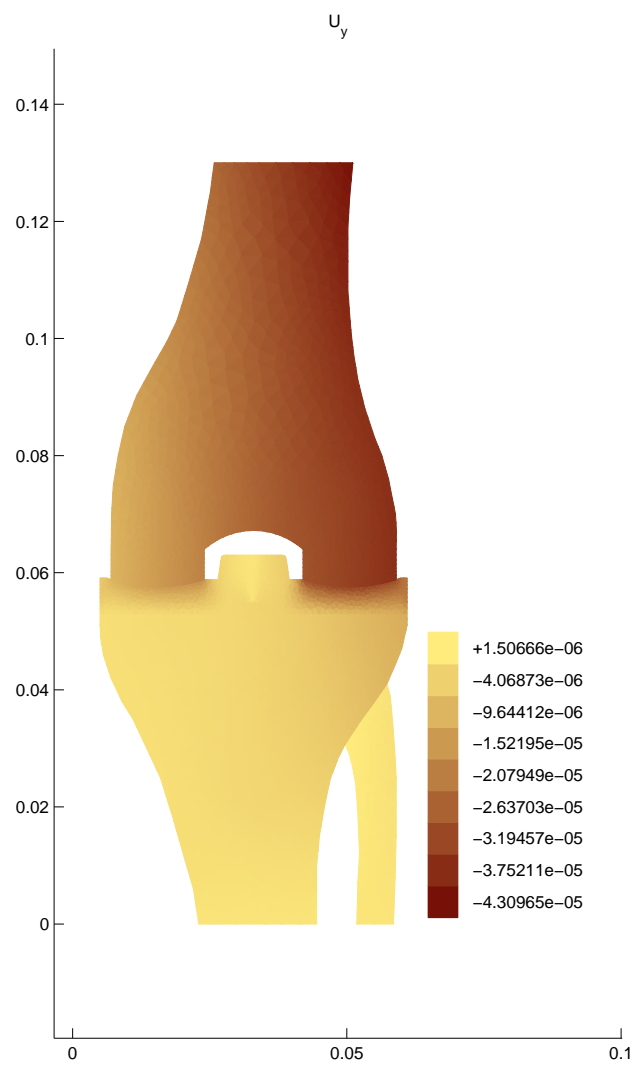
Obrázek 6.19: MODEL II - normálová a tečná složka napětí na kontaktní hranici



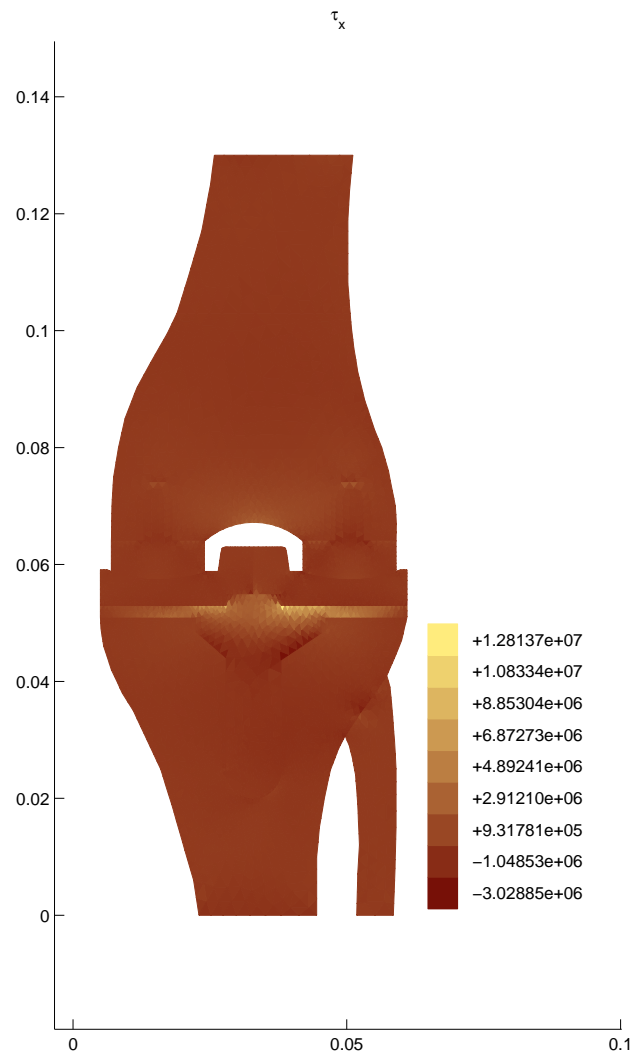
Obrázek 6.20: MODEL III - deformace (faktor zvětšení 20)



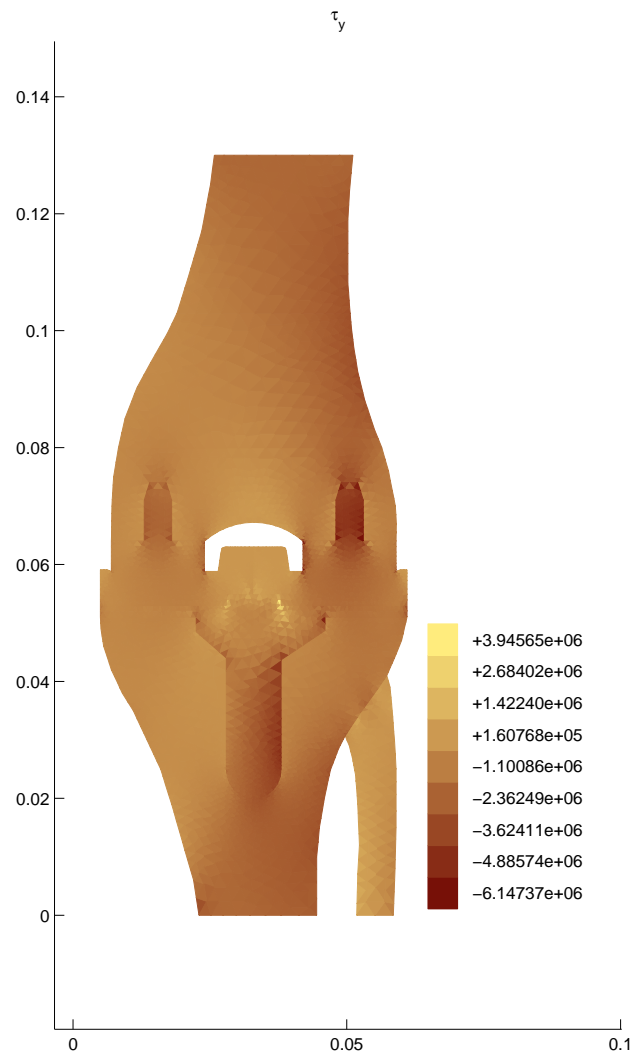
Obrázek 6.21: MODEL III - horizontální složka posunutí



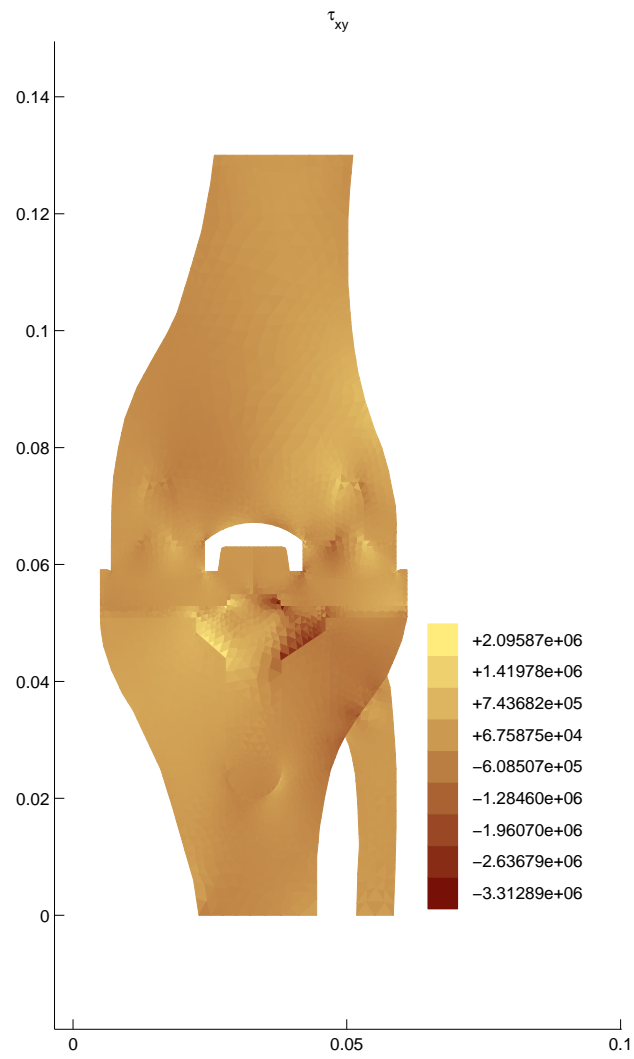
Obrázek 6.22: MODEL III - vertiální složka posunutí



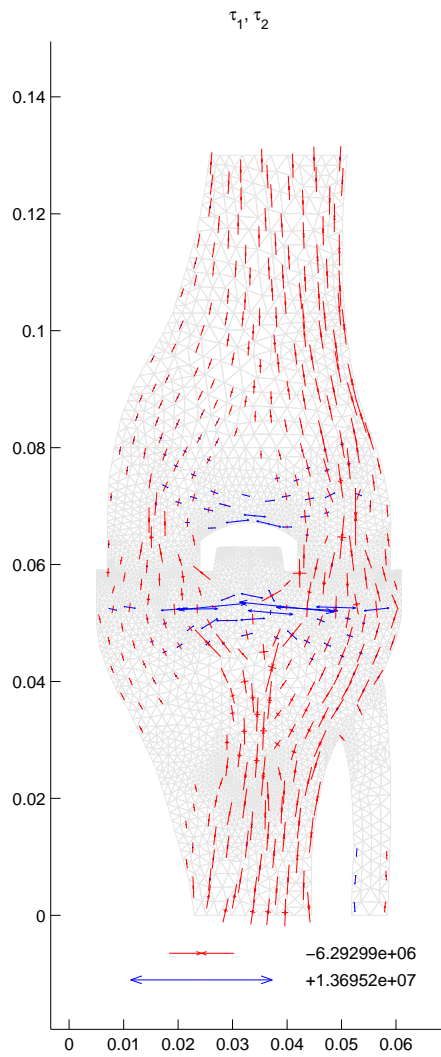
Obrázek 6.23: MODEL III - horizontální složka napětí



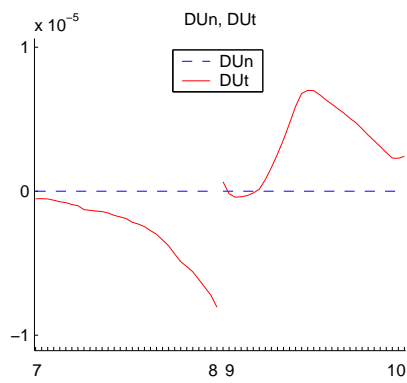
Obrázek 6.24: MODEL III - vertiální složka napětí



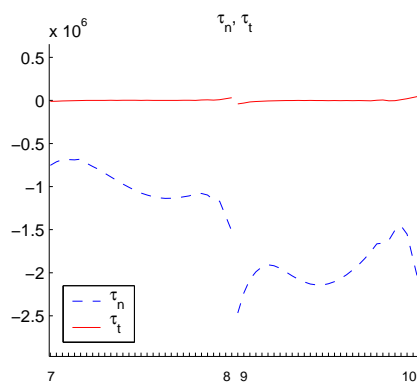
Obrázek 6.25: MODEL III - smyková napětí



Obrázek 6.26: MODEL III - hlavní napětí



Obrázek 6.27: MODEL III - normálová a tečná složka posunutí na kontaktní hranici



Obrázek 6.28: MODEL III - normálová a tečná složka napětí na kontaktní hranici

Deformace femorotibiální části kolenního kloubu po zatížení s daným faktorem zvětšení jsou na obr. 6.2, 6.11, 6.20. Horizontální a vertikální složky vektoru posunutí, obr. 6.3, 6.4, obr. 6.12, 6.13 a obr. 6.21, 6.22, charakterizují vnitřní posunutí hmotných bodů před a po deformaci. Rozložení napjatosti ve vyšetřované části skeletu charakterizují horizontální a vertikální složky tenzoru napětí, smyková napětí a hlavní napětí v uvažované femorotibiální části dolní končetiny (obr. 6.5-6.8, 6.14-6.17 6.23-6.26). Největší změny v horizontální složce napětí jsou indikovány v oblasti tibiálního plata. Z vertikální složky napětí a hlavních napětí vyplývá, že v diafýze je napětí rozloženo rovnoměrně, v oblasti metafýzy se začínají vydělovat oblasti charakterizované tlakem a v oblasti epifýzy se tlak přenáší přes fixační prvky femorální komponenty umělé náhrady, přičemž více zatěžován je vnější kondyl a dále přes chirulénovou vložku se přenáší na tibiální plato a přes fixační prvek tibiálního plata do tibie. Přitom nejlepší napjatostní poměry vykazuje případ 7 st. valgozity.

Velkou vypovídající hodnotu pro analýzu totální náhrady kolenního kloubu v závislosti na axiální úchylce mají normálové a tečné složky vektoru posunutí a vektoru napětí na hranici kontaktu mezi oběma komponentami kloubu. Normálová složka DU_n charakterizuje vzdalování obou částí kloubu od sebe při zatížení kolenního kloubu a jeho následné deformaci. Z analýzy normálové složky posunutí při přetížení kolenního kloubu vyplývá, že během zatěžování se obě části kloubu v určité fázi zatěžování, např. během chůze s nákladem apod., v některých bodech kontaktní hranice od sebe vzdalují, i když vzdálenost protilehlých bodů na obou komponentách kloubu je relativně malá. V našem studovaném případě jsou obě části kolenního kloubu neustále v těsném kontaktu a k oddalování během zatěžování v závislosti na axiální úchylce nedochází, neboť kolenní kloub není přetěžován. Tečná složka vektoru posunutí DU_t charakterizuje vzájemné posunutí protilehlých bodů obou komponent kolenního kloubu v tečném směru. Analýza tečné složky vektoru posunutí ukazuje na relativně malé posuny v obou kondyálních částech kloubu. Charakter jejich průběhu je pro studované axiální úchytky trochu odlišný. Z hodnot obou složek vektoru posunutí pak obdržíme skutečné vzájemné posunutí protilehlých bodů kontaktu v prostoru. Normálové a tečné složky vektoru napětí na kontaktu v obou kondyálních částech kolenního kloubu, indikují zatěžovací poměry na obou kondyálních částech kolenního kloubu. Vidíme, že na kontaktu mezi oběma femorotibiálními částmi kolenního kloubu je indikován tlak na obou kondylech.

Normálové a tečné složky vektoru posunutí a vektoru napětí na hranici kontaktu mezi oběma částmi, femorální a tibiální, kolenního kloubu v oblasti obou kondylů ukazují obr. 6.9, 6.10, 6.18, 6.19, 6.27, 6.28. Z numerických výsledků vyplývá, že obě komponenty jsou v těsném kontaktu a že pohyb na vnitřním kondylu vzrůstá směrem ke středu a ve vnějším kondylu tečná složka od mezikondyální jámy vzrůstá k maximu pohybu jež se nachází prakticky za středem kondylu a k vnějšímu okraji opět klesá. Numerické výsledky ukazují, že pro horizontální složky napětí převažují relativně malá tahová napětí v oblasti kolem vnější laterální a vnitřní mediální části kontaktu a v oblasti mezikondyální jámy, jinak jsou ve femuru převážně indikována tlaková napětí, především v relativně větších vzdálenostech od kontaktní hranice a rovněž v tibii. Z numerických výsledků vidíme, že v kolenním kloubu se gradienty napětí vyrovnávají v epifýze a metafýze a diafýze je již namáhána rovnoměrně. Pro vertikální složky napětí jsou v celé oblasti indikována převážně tlaková napětí, přičemž oblast mezikondyální jámy a mediální okraj jsou odlehčeny a dále směrem laterálním napětí vzrůstá, podobná situace je indikována i pro tibii. Jak ukazují numerické výsledky, přenos tlakových napětí se přenáší přes vnější laterální a vnitřní mediální části kontaktní oblasti. Situování maximálního napětí ve směru osy x je skoro shodně situováno s oblastí minimálního napětí ve směru osy y . Z průběhu vertikální složky napětí, smykových napětí a hlavních napětí vidíme, že koncentrace tlakových napětí je více situována do oblastí zevního kondylu femuru a tibie, menší část přes vnitřní kondyly, tahová napětí jsou situována do oblastí mezikondyální jámy. Směry silových toků odpovídají trámčové struktuře v epifýze.

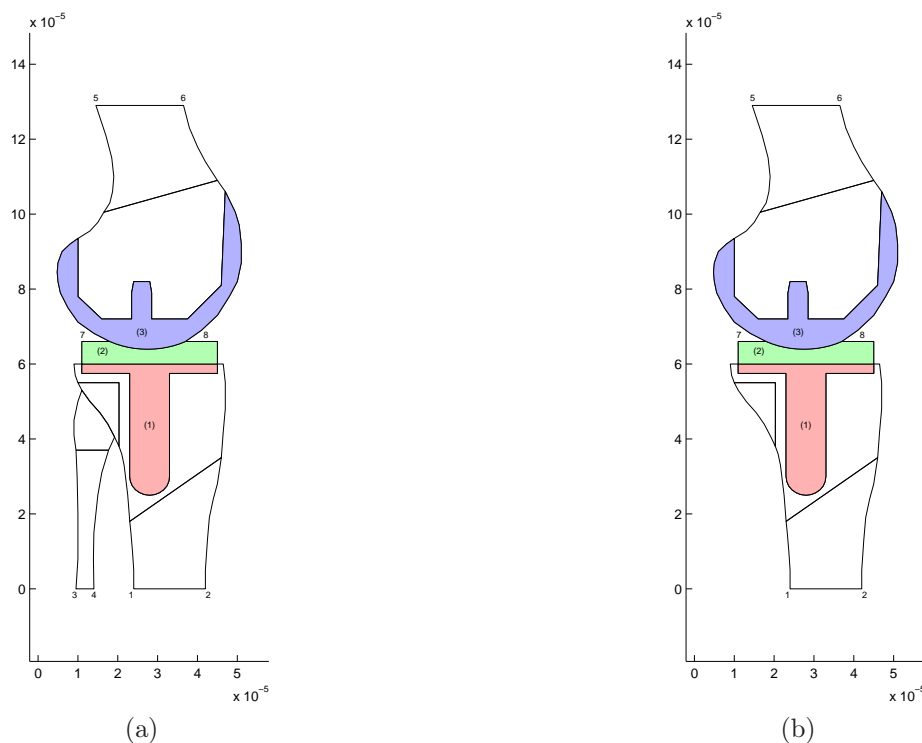
V případě 5 st. valgozity největší změny v horizontální složce napětí jsou indukované v oblasti chirulénové vložky vnějšího kondylu v její laterální části a v oblasti chirulénové vložky vnitřního kondylu v její mediální části. Vertikální složka napětí se nejvíce projevuje v uvažované části femuru, nejméně v oblasti fiduly. Největší změny v horizontální složce napětí jsou indikovány v oblasti tibiálního plata (obr. 6.5). Vertikální složka napětí (obr. 6.6) a hlavní napětí (obr. 6.8) vypovídají, že v diafýze je napětí rozloženo rovnoměrně, v oblasti metafýzy se začínají vydělovat oblasti charakterizované zvýšeným tlakem a v oblasti epifýzy se tlak přenáší přes fixační prvky femorální komponenty umělé náhrady, přitom je více zatěžován vnější kondyl. Tlak se přenáší dále přes chirulénovou vložku na tibiální plato

a přes fixační prvek tibiálního plata do tibie. Smyková napětí (obr. 6.7) a hlavní napětí (obr. 6.8) indikují oblasti charakterizované tahovými napětími v oblasti mezikondyální jámy a v oblasti tibiálního plata. Analýza kontaktních normálových napětí indikuje tlaková napětí, zatímco tečná kontaktní napětí se mnoho neprojevují (obr. 6.9-6.10).

V případě 7 st. horizontální složka vektoru posunutí (obr. 6.12) indikuje vyrovnání deformicity ve femorotibiální části kolenního kloubu. Vertikální složka tenzoru napětí (6.15) indikuje vyrovnanější rozložení napětí oproti případu 5 st., což indikují i smyková napětí (obr. 6.16). Vyvážený přenos zátěže symetricky probíhající oběma částmi kloubu je znázorněn v případě hlavních napětí na obr. 6.17 průběhem tlakového zatížení. Snížení velikosti tahového napětí je indikováno v oblasti mezikondyální jámy. Indikováno je také částečné vyrovnání tlakového zatížení na obou kondylech kolenního kloubu. Tečná složka vektoru napětí se jen nepatrně mění (obr. 6.19).

V případě 9 st. horizontální a vertikální složky vektoru posunutí (obr. 6.21, 6.22) indikují větší změny deformicity v obou oblastech chirulénové vložky. Složky tenzoru napjatosti a hlavní napětí (obr. 6.23-6.26) indikují známky přetížení části kloubu a zvýšení přenosu zátěže zevním kompartmentem kloubu, která je navíc zvýrazněna především na obr. 6.26 průběhem hlavních napětí. Normálové složky vektoru napětí na kontaktu mezi oběma femorotibiálními částmi kolenního kloubu (obr. 6.28) indikují přetížení vnějšího kondylu.

Numerické výsledky v sagitální rovině byly analyzovány na řezech přes oba kondyly (viz obr. 6.29a, b).



Obrázek 6.29: Geometrie pro MODEL IV, V - sagitální řez

Byly uvažovány 2 modely - Model IV - řez přes vnější kondyl (v obrázku vyznačeno fidulou), MODEL V - řez přes vnitřní kondyl (v obrázku vyznačeno bez fiduly) ve třech variantách označených jako A - 5 st., B - 7 st. a C - 9 st. Sagitální řez o vlivu axiální úchytky nic nevyovídá, vypovídá však o přetížení zadní části tibiálního plata v předozadním směru a tedy o jeho případném silném opotřebení. V obou modelech byly uvažovány stejné materiálové parametry jako v předchozím případě.

Okrajové podmínky v případě MODELu IV předepsány na částech 1-2, 3-4, 5-6, 7-8. Nulové posunutí předepsáno na částech 1-2 a 3-4, na částí 5-6 předepsáno zatížení $1.45 \times 10^6 [Pa]$ v případě MODELu IV-A, $1.52 \times 10^6 [Pa]$ v případě MODELu IV-B a $1.61 \times 10^6 [Pa]$ v případě MODELu IV-C, jednostranná kontaktní hranice na částí hranice 7-8.

Okrajové podmínky v případě MODELu V předepsány na částech 1-2, 5-6, 7-8. Nulové posunutí předepsáno na částech 1-2, na části 5-6 předepsáno zatížení $1.2 \times 10^6 [Pa]$ v případě MODELu V-A, $1.0 \times 10^6 [Pa]$ v případě MODELu V-B a $0.86 \times 10^6 [Pa]$ v případě MODELu V-C, jednostranná kontaktní hranice na části hranice 7-8.

Statistika užití diskretizace:

MODEL IV: 10 podoblastí, 2867 uzlů, 4740 prvků, 33 kontaktních podmínek, 299 prvků na rozhraních mezi podoblastmi,

MODEL V: 8 podoblastí, 2474 uzlů, 4104 prvků, 33 kontaktních podmínek, 290 prvků na rozhraních mezi podoblastmi.

Byly provedeny všechny výpočty jako v předchozím případě řezu ve frontální rovině. Numerické výsledky však prokazují, že největší vypovídající hodnotu mají jednak horizontální složka vektoru posunutí U_x a jednak numerické výsledky normálových a tečných složek posunutí DU_n, DU_t a napětí τ_n, τ_t na kontaktu mezi kondyly. Kontakt je na části hranice 7-8, bod 7 odpovídá vyšetřované zadní části tibiálního plata. Horizontální složka vektoru posunutí U_x je na obr. 6.30-6.32. Obrázky indikují posuny v mezích cca -1.667×10^{-5} - -1.748×10^{-5} - $-1.85 \times 10^{-5} m$ u vnějšího kondylu při axiálních úchylných 5, 7, 9 st. v oblasti zadní části tibiálního plata a v mezích cca -1.38×10^{-5} - -1.15×10^{-5} - $-9.20 \times 10^{-6} m$ u vnitřního kondylu při axiálních úchylných 5, 7, 9 st. v oblasti zadní části tibiálního plata. Z těchto výsledků je vidět, že dochází k vymačkávání chirulénové vložky v zadní části tibiálního plata, jež je větší u vnějšího kondylu než u vnitřního kondylu a tedy k jejich deformaci a opotřebení.

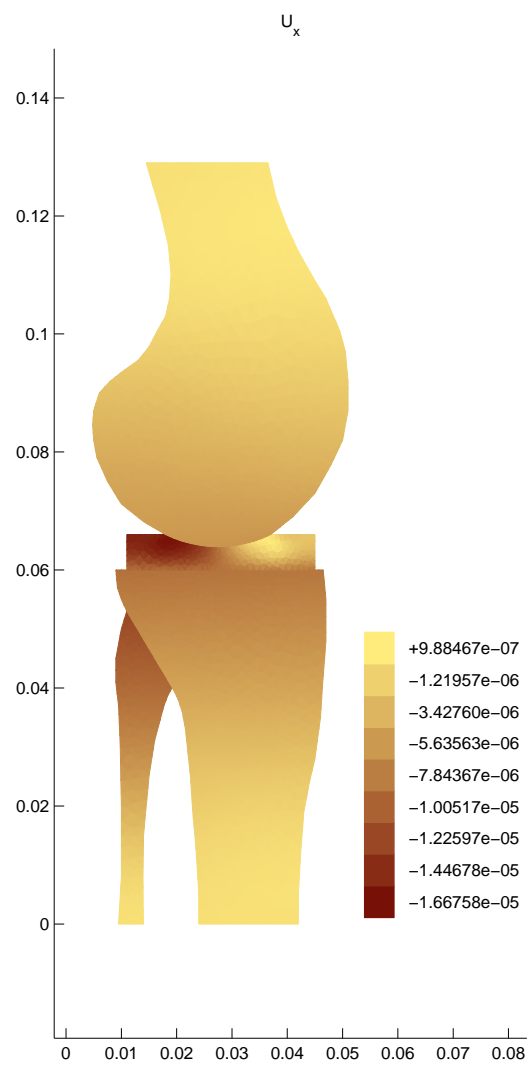
Obr. 6.33-6.35 indikují, že kloubní komponenty jsou v kontaktu během zatěžování pro všechny vyšetřované axiální úchylny a že tečné posuny na kontaktu, jež jsou v mezích cca 1.05×10^{-5} - 1.1×10^{-5} - $1.2 \times 10^{-5} m$ na vnějším kondylu a v mezích cca 0.9×10^{-6} - 0.75×10^{-6} - $0.6 \times 10^{-6} m$ v případě vnitřního kondylu, indikují posuny kloubních komponent v průběhu zatěžování kloubního systému při axiálních úchylných 5, 7, 9 st.

Obr. 6.36-6.38 znázorňují normálová a tečná napětí τ_n, τ_t na kontaktu mezi kloubními komponentami. Zatímco tečná napětí jsou prakticky nulová, velkou vypovídající hodnotu mají normálová napětí na kontaktu. Na vnějším kondylu jsou hodnoty normálových napětí v mezích cca -9.5×10^5 - -10.0×10^5 - $-10.5 \times 10^5 [Pa]$, na vnitřním kondylu v mezích cca -6.5×10^5 - -6×10^5 - $-5 \times 10^5 [Pa]$, v blízkosti zadní části tibiálního plata. Následně tlak vzrůstá a další minimum má v blízkosti přední části tibiálního plata, podobně jako v předchozím případě.

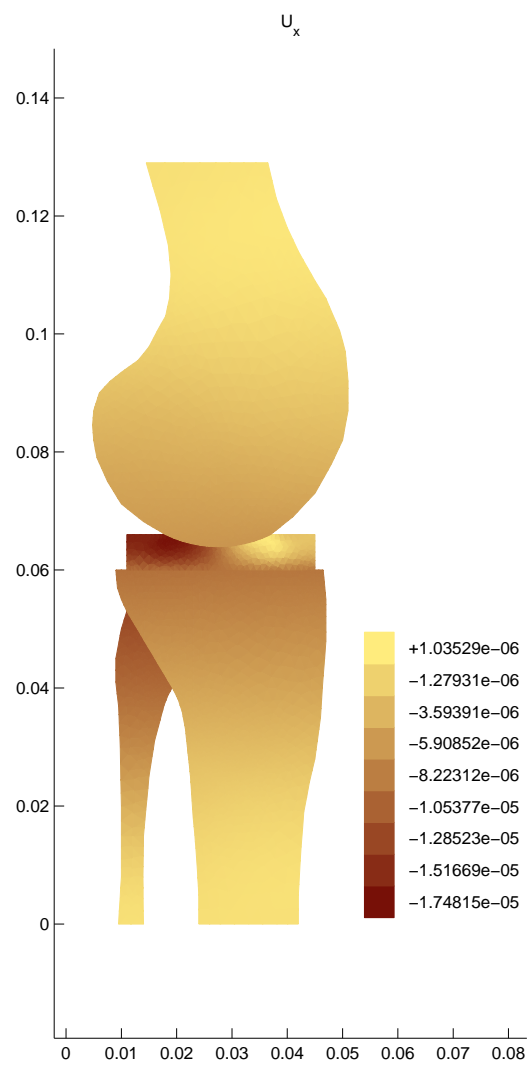
Výsledky prokazují jisté přetížení zadní části tibiálního plata, což indikuje možnost opotřebení a následný otěr polyetylénové vložky TKP. Numerické výsledky ukazují, že bude nutno analyzovat 3D případ, který jistě vysvětlí jistá protichůdná pozorování v oblasti zadní části tibiálního plata z 2D modelu.

Souhrn

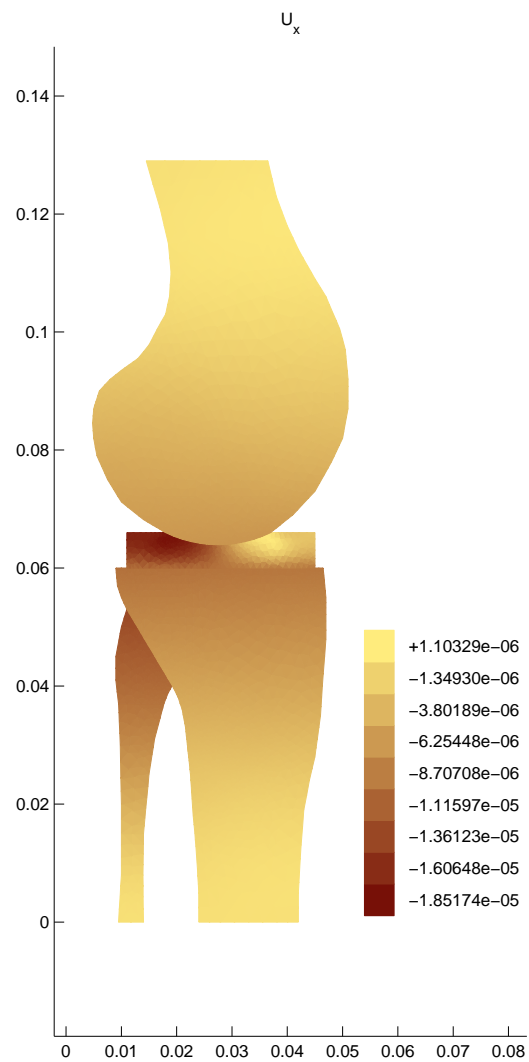
Z prvních analýz numerických výsledků se dá soudit, že optimální rozložení sil působících na TKP v předozadním směru a vyvážený přenos sil v předozadním směru bude odpovídat předchozímu případu 7 st., což deklaruje i průběh hlavních napětí. Optimální přenos sil v předozadním směru s maximem v místě zesílení zadní kortikalis femuru, fixačních prvků femorální resp. dřívku tibiální komponenty je pozorován v praxi. Naopak přetížení zadní části tibiálního plata v předozadním směru při neuvolnění měkkých zadních struktur event. chybném sklonu resekce proximální tibie indikují výsledky výpočtů pro případ 9 stupňů valgosity. Analýzy výsledků řezů přes kondyly v sagitální rovině prokazují jisté přetížení zadní části tibiálního plata, což indikuje možnost opotřebení a následný otěr polyetylénové vložky TKP. Numerické výsledky indikují nutnost analyzovat 2D a 3D modely kloubního systému s kloubním pouzdrům a vazy.



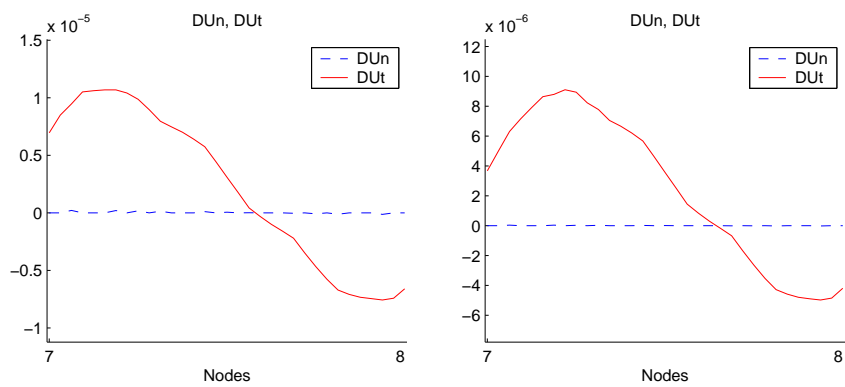
Obrázek 6.30: MODEL IV-A - horizontální složka posunutí



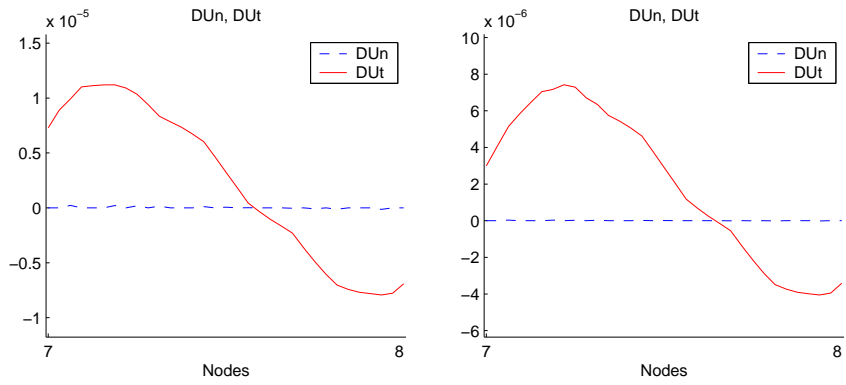
Obrázek 6.31: MODEL IV-B - horizontální složka posunutí



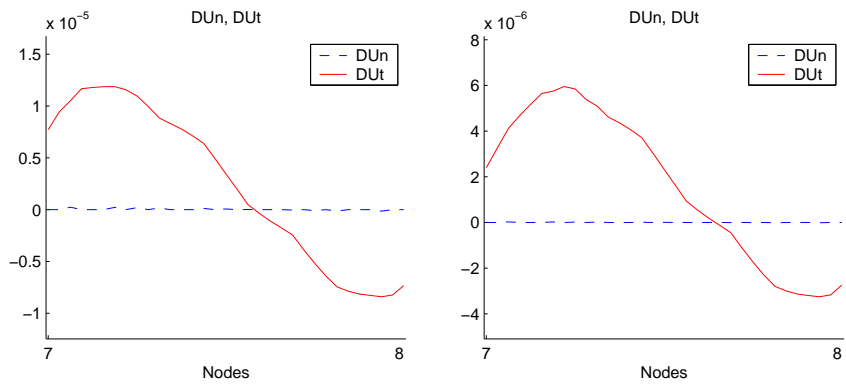
Obrázek 6.32: MODEL IV-C - horizontální složka posunutí



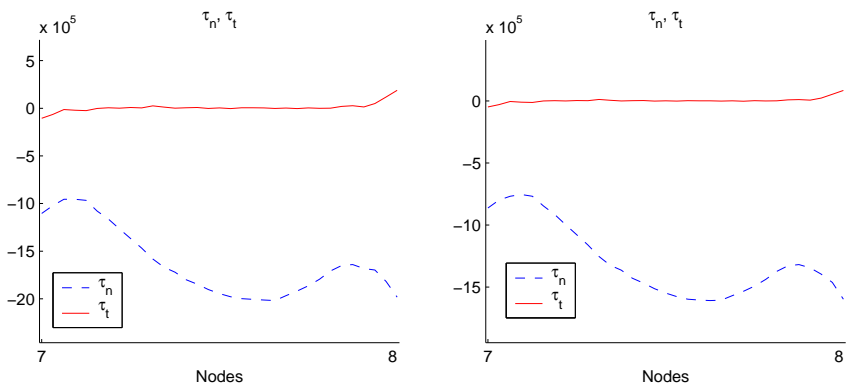
Obrázek 6.33: MODEL IV-A, V-A - normálová a tečná složka posunutí na kontaktní hranici



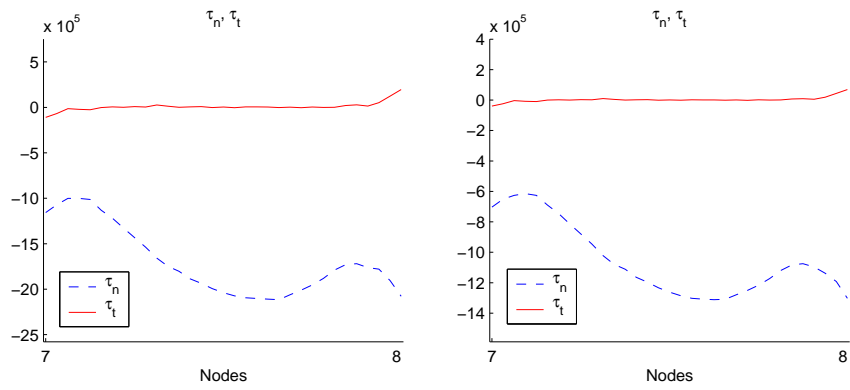
Obrázek 6.34: MODEL IV-B, V-B - normálová a tečná složka posunutí na kontaktní hranici



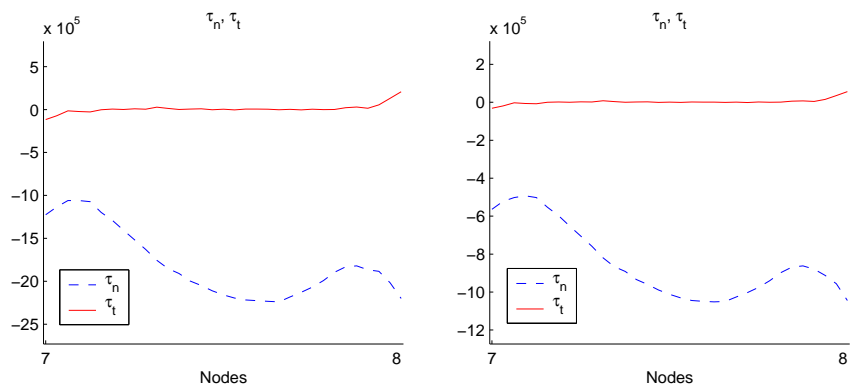
Obrázek 6.35: MODEL IV-C, V-C - normálová a tečná složka posunutí na kontaktní hranici



Obrázek 6.36: MODEL IV-A, V-A - normálová a tečná složka napětí na kontaktní hranici



Obrázek 6.37: MODEL IV-B, V-B - normálová a tečná složka napětí na kontaktní hranici



Obrázek 6.38: MODEL IV-C, V-C - normálová a tečná složka napětí na kontaktní hranici

7 Aplikace

Výsledky numerické analýzy byly použity pro ověření funkce totální kolenní náhrady WALTER UNIVERSAL (WU) a WALTER MODULAR (WM). Oba typy implantátů jsou určeny pro primární náhradu kolenního kloubu a to zejména při osteoartróze a dále při destrukcích kolenního kloubu vznikajících na podkladě zánětlivých revmatických i jiných systémových onemocnění. Implantát lze využít i při řešení některých úrazových poškození kolena a při řešení posttraumatických následků.

WALTER UNIVERSAL (WU) (viz obr. 7.1) je starší typ, který je používán od roku 1984 a dosud byl úspěšně implantován ve více než 12.000 případech. WALTER MODULAR (WM) (viz obr. 7.2)



Obrázek 7.1: Kolenní náhrada WALTER UNIVERSAL (WU)

navazuje na předchozí model WU a využívá získané zkušenosti.



Obrázek 7.2: Kolenní náhrada WALTER MODULAR (WM)

Pro získání geometrie modelu bylo použito rtg. snímků. Studovány byly 2 modely kolenní náhrady, frontální a sagitální řez (viz obr. 7.3 a,b).

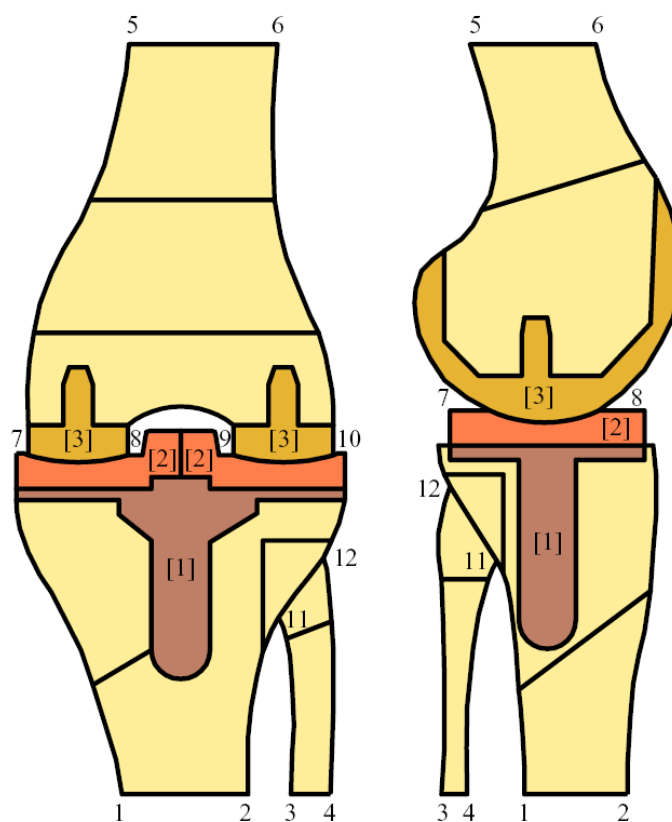
Ve obou modelech byly uvažovány následující materiálové parametry (Youngův modul pružnosti E a Poissonova konstanta ν):

kost: $E = 1.71 \times 10^{10} [Pa]$, $\nu = 0.25$,

[1] Ti6Al4V: $E = 1.15 \times 10^{11} [Pa]$, $\nu = 0.3$,

[2] Chirulen: $E = 3.4 \times 10^8 [Pa]$, $\nu = 0.4$,

[3] CoCrMo: $E = 2.08 \times 10^{11} [Pa]$, $\nu = 0.3$.



Obrázek 7.3: Geometrie modelu kolenní náhrady WALTER MODULAR –
 a) frontální řez, b) sagitální řez

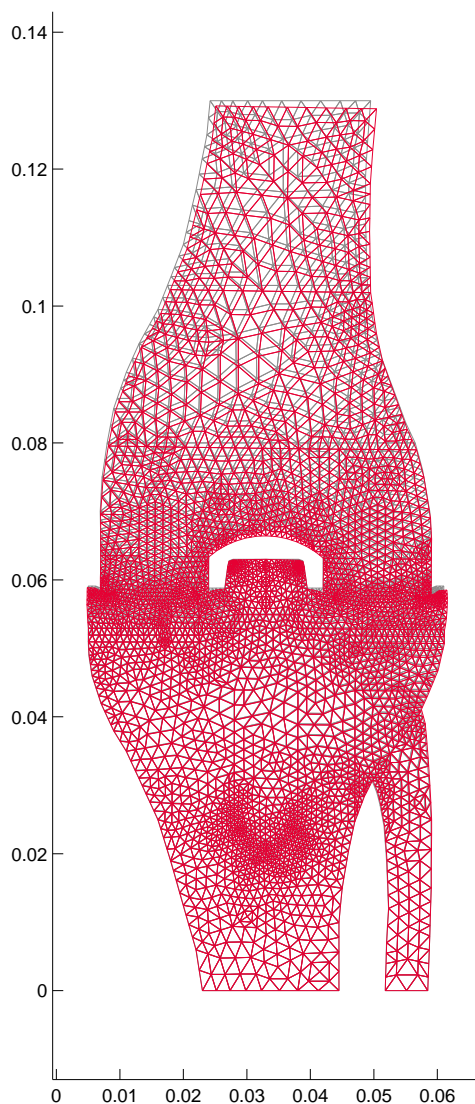
Okrajové podmínky byly předepsány na částech hranice 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10 a 11-12. Nulové posunutí bylo předepsáno na částech 1-2 a 3-4, na části 5-6 bylo předepsáno zatížení $0.215 \times 10^7 [Pa]$ a kontaktní hranice na části hranice 7-8, 9-10 a 11-12.

Statistika užití diskretizace:

Frontální řez: 13 podoblastí, 3780 uzlů, 7208 prvků, 31+31+15 kontaktních podmínek, 350 prvků na rozhraních mezi podoblastmi,

Sagitální řez: 10 podoblastí, 2867 uzlů, 4740 prvků, 33+15 kontaktních podmínek, 299 prvků na rozhraních mezi podoblastmi.

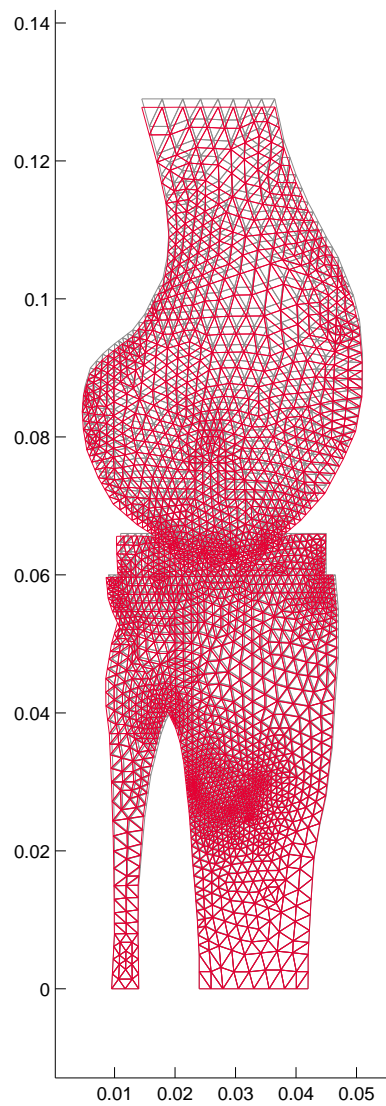
Obdržené výsledky jsou na obr. 7.4-7.15.



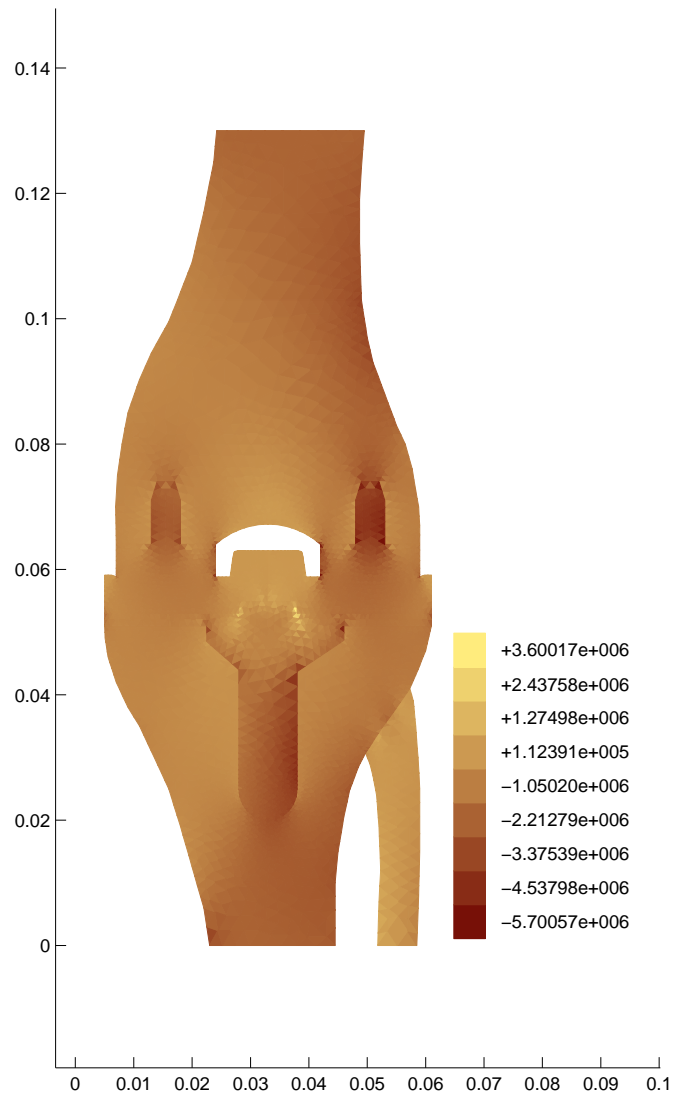
Obrázek 7.4: Frontální řez – deformace (faktor zvětšení 20)

Deformace femorotibiální části kolenního kloubu po zatížení s daným faktorem zvětšení jsou na obr. 7.4, 7.5. Vertikální složky tenzoru napětí jsou na obr. 7.6, 7.7, smyková napětí na obr. 7.8, 7.9 a hlavní napětí na obr. 7.10, 7.11 Normálové a tečné složky vektoru posunutí a tenzoru napětí na hranici kontaktu mezi oběma částmi, femorální a tibiální, kolenního kloubu v oblasti obou kondylů ukazují obr. 7.12 - 7.15.

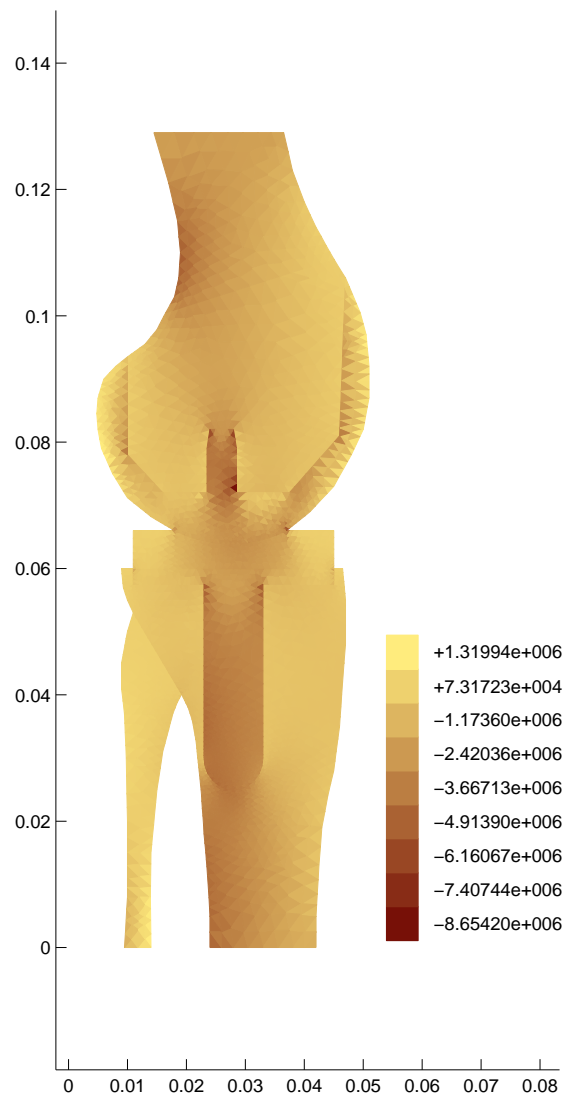
Numerické výsledky ukazují, že pro horizontální složky napětí převažují relativně malá tahová



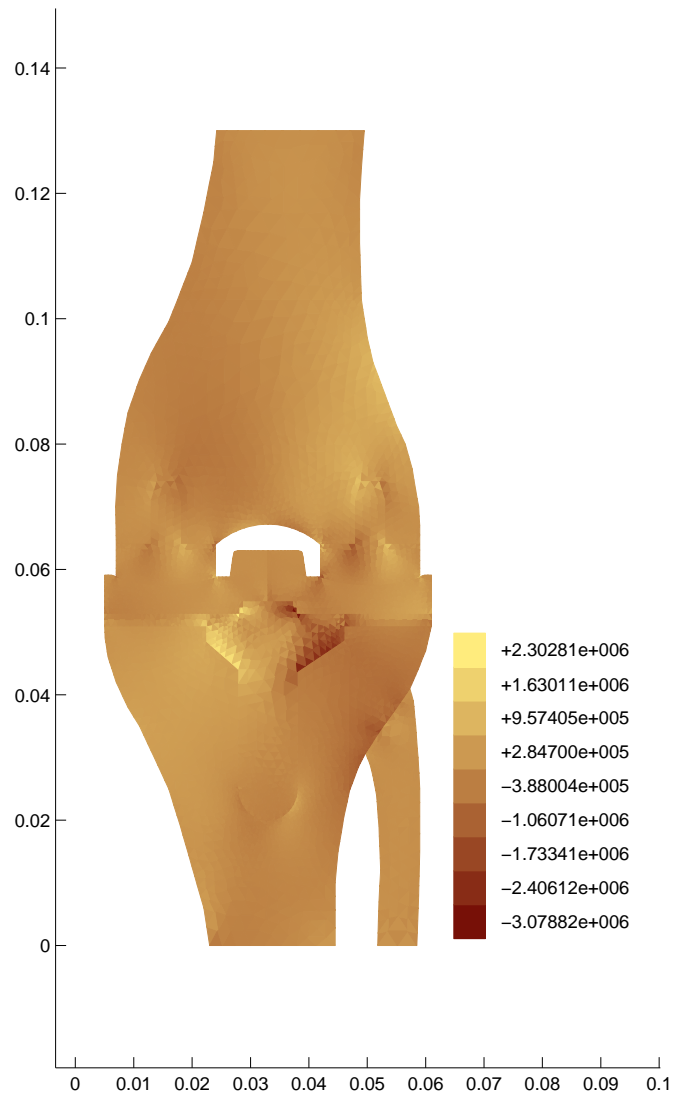
Obrázek 7.5: Sagitální řez – deformace (faktor zvětšení 20)



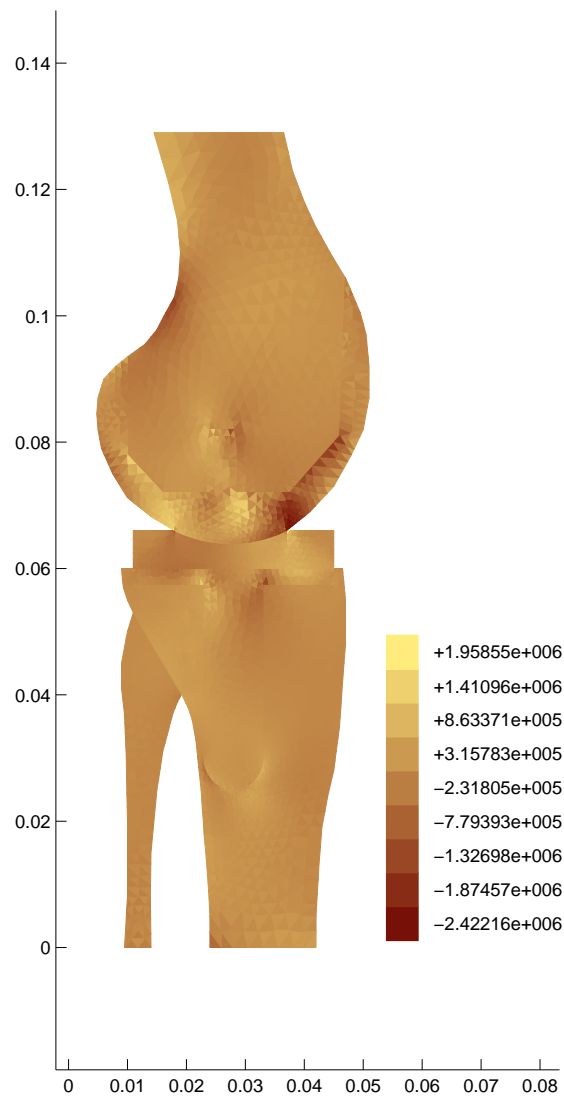
Obrázek 7.6: Frontální řez – vertikální složka napětí



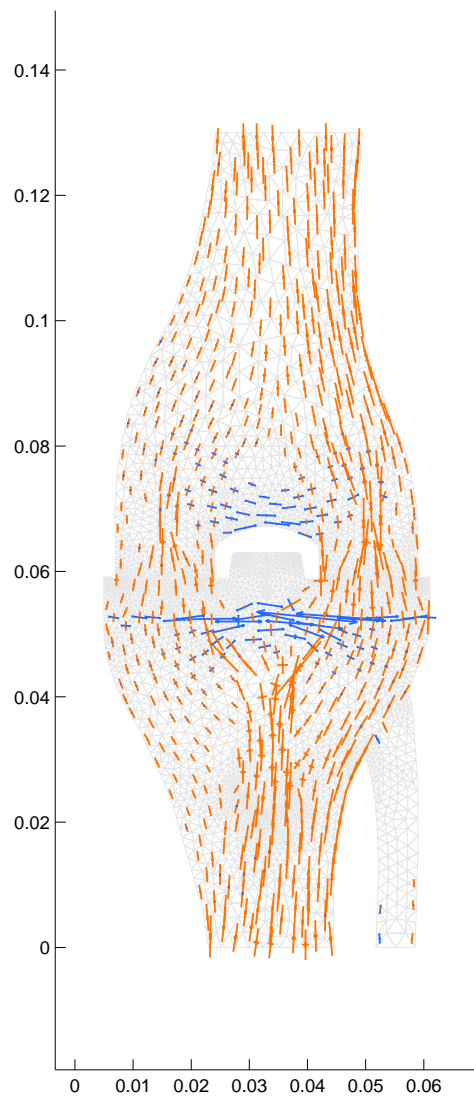
Obrázek 7.7: Sagitální řez – vertikální složka napětí



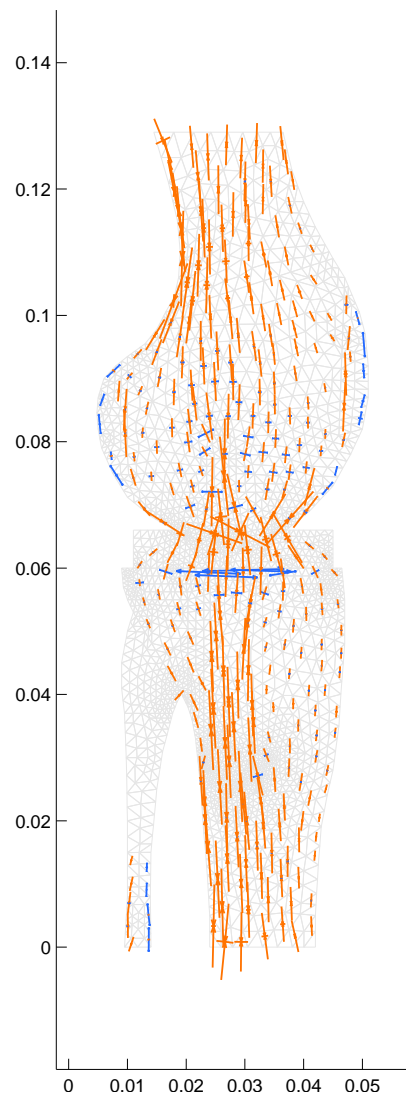
Obrázek 7.8: Frontální řez – smyková napětí



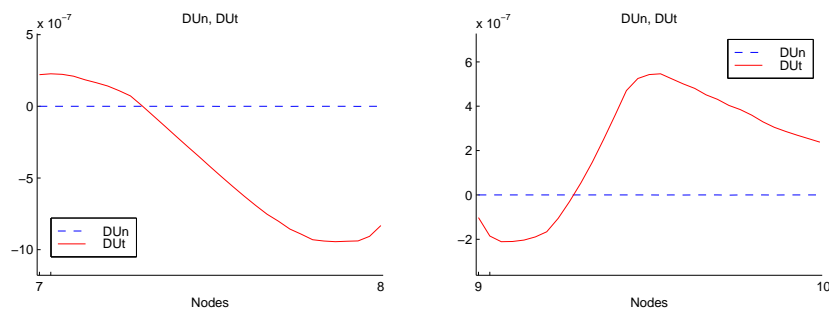
Obrázek 7.9: Sagitální řez – smyková napětí



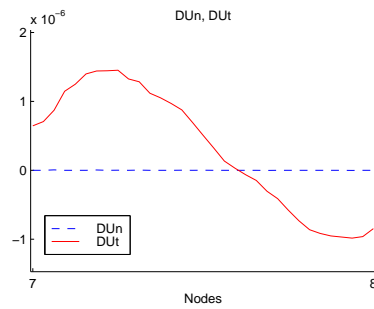
Obrázek 7.10: Frontální řez – hlavní napětí



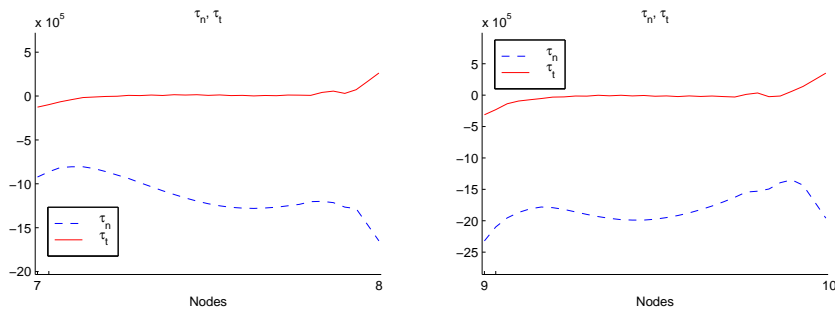
Obrázek 7.11: Sagitální řez – hlavní napětí



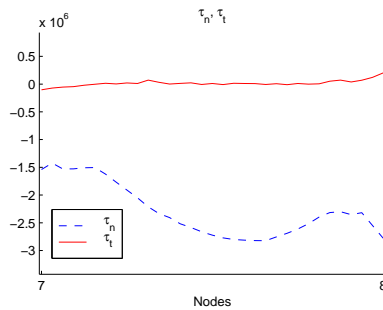
Obrázek 7.12: Frontální řez – normálová a tečná složka posunutí na kontaktní hranici



Obrázek 7.13: Sagitální řez – normálová a tečná složka posunutí na kontaktní hranici



Obrázek 7.14: Frontální řez – normálová a tečná složka napětí na kontaktní hranici



Obrázek 7.15: Sagitální řez – normálová a tečná složka posunutí na kontaktní hranici

napětí v oblasti okolo vnitřní mediální a vnější laterální části kontaktu a v oblasti mezikondyální jámy, jinak jsou ve femuru a tibií převážně indikována tlaková napětí. Z analýzy našich numerických výsledků vyplývá, že v kolenním kloubu se gradienty napětí vyrovnávají v epifýze a metafýze a diafýza je již namáhána rovnoměrně. Pro vertikální složky napětí jsou v celé oblasti indikována převážně tlaková napětí. Oblast mezikondyální jámy a mediální okraj jsou odlehčeny a dále směrem laterálním napětí vzrůstá. Obdobná situace platí pro tibií. Výsledky ukazují přenos tlakových napětí přes vnější laterální a vnitřní mediální části kontaktní oblasti. Z vertikálních, smykových a stejně tak hlavních napětí je vidět, že větší část přenášených tlaků je v oblastech vnějšího kondylu a tibie a menší část v oblasti vnitřního kondylu. Tahové napětí je soustředěno v oblasti mezi kondyly.

Uvedené výsledky byly prezentovány na 17th IMACS Congress v sekci Mathematical Biomechanics, který se uskutečnil v Paříži ve dnech 11.-15.7.2005 (viz příspěvek ve sborníku konference [35]).

Shrnutí

Úkolem této studie je předložit několik návrhů metod a algoritmů umožňujících zkvalitnění navigované operační techniky. Navrhujeme zde použití numerické analýzy ke zjištění napjatostních poměrů v kloubním systému po aplikaci TKP kolenního kloubu (respektive TEP kyčelního kloubu) konkrétně zadaným způsobem. Důsledná analýza napjatostních poměrů v kloubním systému umožní operatérovi posoudit správnost navrhovaného operačního postupu. Navrhované metody jsou založené na vhodných reologiích, kontaktních úlohách a na metodě konečných prvků. Aplikace přístupu závisí však na umožnění přístupu k datům z řídicí jednotky navigované operační techniky, tj. ke geometrii vyšetřované části skeletu.

Literatura

- [1] **amira** – 3D visualisation and modelling system. Amira 3.1 Manual.
<http://www.amiravis.com/Amira31-manual.pdf>
- [2] Audette, M. A., Ferrie, F. P., Peters, T. M. (2000). An algorithmic overview of surface registration techniques for medical imaging. *Medical Image Analysis* 4 (3), pp. 201-217.
- [3] Couteau, B., Payan, Y., Lavallée, S. (2000) The mesh-matching algorithm: an automatic 3D mesh generator for finite element structures. *Journal of Biomechanics* 33, pp. 1005-1009, Elsevier Science Ltd.
- [4] Čech, O., Pavlovský, R. et al. (1979). *Aloplastika kyčelního kloubu*. Avicenum, Praha.
- [5] Daněk, J. (2002). Domain decomposition algorithm for solving contact of elastic bodies. In: Sloot, P.M.A. et al. (Eds), *ICCS 2002, LNCS 2331*, s. 820-829, Springer Vlg, Berlím, Heidelberg.
- [6] Daněk, J., Denk, F., Hlaváček, I., Nedoma, J., Stehlík, J., Vavřík, P. (2004a). On the stress-strain analysis of the knee replacement. In: Lagana et al. (Eds). *ICCSA 2004, LNCS 3044*, Springer Vlg., s. 456-466.
- [7] Daněk, J., Denk, F., Hlaváček, I., Nedoma, J., Stehlík, J., Vavřík, P. (2004b). Stress-strain distribution in the knee joint after the implantation of total replacement in a connection on the axial deviations. In: *Proc. of Biomechanics of Man 2004, the Congress of the Czech Society of Biomechanics, Špičák, November 16-19, Czech Republic*.
- [8] Daněk, J., Hlaváček, I., Nedoma, J. (2005). Domain decomposition for generalized unilateral semi-coercive contact problem with friction in elasticity. *Mathematics and Computers in Simulation* 68/3, pp. 271-300, Elsevier Science Ltd., North-Holland.
- [9] Duncan, J. S., Ayache, N. (2000). Medical image analysis: Progress over two decades and the challenges ahead. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22 (1), pp. 85-106.
- [10] Fleute, M., Lavallée, S. (1998) Building a Complete Surface Model from Sparse Data Using Statistical Shape Models: Application to Computer Assisted Knee Surgery. In: W.M.Wells et al. (Eds.): *MICCAI'98, LNCS 1496*, pp. 879-887, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998.
- [11] Hlaváček, I. (1999). Domain decomposition applied to a unilateral contact of elastic bodies. Technical Report No 785, Inst. Of Computer Science AS CR, Prague, Czech Republic.
- [12] Hlaváček, I. (2004). Mixed finite element analysis of semi-coercive unilateral contact problem with given friction. Technical Report No 921, Inst. Of Computer Science AS CR, Prague, Czech Republic.
- [13] Hlaváček, I., Nedoma, J. (2002). On a solution of a generalized semi-coercive contact problem in thermo-elasticity. *Mathematics and Computers in Simulation*, 60, 1-17.
- [14] Charnley, J. (1979). *Low Friction Arthroplasty*. Springer Vlg., New York.

- [15] Kardos, I., Hajder, L., Chetverikov, D. Bone Surface Reconstruction From CT/MR Images Using Fast Marching and Level Set Methods. Proc. Joint Hungarian-Austrian Conference on Image Processing and Pattern Recognition, Veszprém, 2005, pp. 41-48
- [16] Meyers, D., Skinner, Sh., Sloan, K. (1992) Surfaces from Contours. ACM Transactions on Graphics 11/3, pp. 228-258.
- [17] Hlaváček, I., Nečas, J. (1982). Optimization of the Domain in Elliptic Unilateral Boundary-Value Problems by Finite-Element Method. Rairo-Analyse Numerique-Numerical Analysis 16 (4), pp. 351-373.
- [18] Nedoma, J. (1987). On the Signorini problem with friction in linear thermoelasticity: The quasi-coupled 2D-case. Apl. Mat. 32, 3, 186-199.
- [19] Nedoma, J. (1993). Mathematical Modelling in Biomechanics. Bone- and Vascular-Implant Systems. Habilitation thesis. ICS AS CR, Prague.
- [20] Nedoma, J. (2005a). Solvability of Dynamic Multibody Contact Problems with Coulomb Friction and Damping in Visco-Elasticity With Short Memory. Přípravuje se do tisku.
- [21] Nedoma, J. (2005b). Solution method for the weight-bearing human joint replacements. Přípravuje se do tisku.
- [22] Nedoma, J. (2005c). On the dynamic contact problem with Coulomb friction in nonlinear elasticity. MODELLING'2005, Pilsen, July 4-8, připravuje se do tisku.
- [23] Nedoma, J. (2005d). Matematické modely umělých náhrad kloubů ve vazbě na navigované operační techniky a za použití CT a MRI I. Dynamické zatěžování TEP a TKR, matematické 2D a 3D modely. Technical Report No 950, Inst. Of Computer Science AS CR, Prague, Czech Republic.
- [24] Nedoma, J., Bartoš, M., Kestřánek sen, Z., Kestřánek jr, Z., Stehlík, J. (1999a). Numerical methods for constrained optimization in 2D and 3D biomechanics. Numer. Linear Algebra Appl. 6, 557-586.
- [25] Nedoma, J. et al. (1999b). Numerical analysis of the loosened total hip replacements (THR). Mathematics and Computers in Simulation, 50, 285-304.
- [26] Nedoma, J. and Hlaváček, I. (2002). On a solution of a semi-coercive contact problem in a nonlinear thermo-elastic rheology. Math. Comput. in Simulation 60, 117-127.
- [27] Nedoma, J., Hlaváček, I., Daněk, J., Vavřík, P., Stehlík, J., Denk, F. (2003). Some recent result on a domain decomposition method in biomechanics of human joints. LNCS 2667, s. 587-600 Springer Vlg.
- [28] Nedoma, J., Stehlík, J. et al. (2006). Biomechanika lidského skeletu a umělých náhrad jeho částí. Karolinum, Praha. V tisku.
- [29] Prendergast, P. J. (1997). Finite element models in tissue mechanics and orthopaedic implant design. Clinical Biomechanics 12 (6), pp. 343-366.
- [30] Stehlík, J., Nedoma, J. (1989). Matematická simulace velkých lidských kloubů a optimální tvar jejich umělých náhrad. I,II., Technical Report No 406, 407, ÚI AV ČR, Praha.
- [31] Bartoš, M., Kestřánek, Z. Jr., Kestřánek, Z., Nedoma, J., Stehlík, J. (1999). On the 2D and 3D finite element simulation in orthopaedy using MR]. Math. and Comput. in Simulation 50, 115-121.
- [32] Horiil, S. C. et al. DICOM: An Introduction to the Standard, http://www.xray.hmc.psu.edu/dicom/dicom_intro/dicomintro.html
- [33] Rybka, V., Vavřík, P. (1993) Alopastika kolenního kloubu. Arcadia, Praha.

- [34] Sosna, A., Vavřík, P., Krbec, M., Pokorný, D. et al. (2001) *Základy ortopedie*. TRITON, Praha.
- [35] Vavřík, P., Denk, F., Nedoma, J., Daněk, J., Hlaváček, I. (2005) Numerical Analysis of the Weight-Bearing Total Knee Joint Replacement. Realization in Practice – WALTER UNIVERSAL (WU) and WALTER MODULAR (WM). In: Proc. of the 17th IMACS Congress, Paris, 2005.
- [36] Wirtz, D. C., Pandorf, T., Portheine, F., et al. (2003) Concept and development of an orthotropic FE model of the proximal femur. *Journal of Biomechanics* 36 (2), pp. 289-293.
- [37] White, A. A., Panjabi, M. M. (1978) *Clinical Biomechanics of the Spine*. Lippincott, Philadelphia