



národní
úložiště
šedé
literatury

Matematické modely umělých náhrad kloubů ve vazbě na navigované operační techniky a za použití CT a MRI. I. Dynamické zatěžování TEP a TKR, matematické 2D a 3D modely

Nedoma, Jiří
2005

Dostupný z <http://www.nusl.cz/ntk/nusl-35252>

Dílo je chráněno podle autorského zákona č. 121/2000 Sb.

Tento dokument byl stažen z Národního úložiště šedé literatury (NUŠL).

Datum stažení: 07.06.2024

Další dokumenty můžete najít prostřednictvím vyhledávacího rozhraní nusl.cz .



Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Matematické modely umělých náhrad kloubů ve vazbě na navigované operační techniky a za použití CT a MRI

I. Dynamické zatěžování TEP a TKR, matematické 2D a 3D modely

Jiří Nedoma

Technical report No. TR 950

November 2005

Abstrakt:

Předložená studie je výzkumnou zprávou Projektu MPO ČR č. FT-TA/087 - "Komplexní výzkum biomechanických podmínek aplikace umělých skeletálních náhrad, interakce náhrad s organismem, vyhodnocení příčin selhání a návrh podmínek pro zvýšení jejich stability" za rok 2005 a úkoly:

B. Mechanické a biomechanické hodnocení

B.2. Formulace 2D a 3D matematických modelů v nelineární oblasti (termo-pružnosti a (termo-) vazko-pružnosti).

Ve studii jsou diskutovány mechanická a biomechanická hodnocení dynamického zatěžování kloubních systémů. Jsou formulovány vhodné matematické 2D a 3D modely náhrad lidských kloubů založené na dynamických kontaktních úlohách lineární a nelineární teorie (termo-)pružnosti a (termo-)vazko-pružnosti. Je provedena základní matematická analýza úloh pro statické a dynamické zatěžování lidských kloubů a jejich totálních náhrad. Numerické řešení vyšetřované úlohy je založeno na metodě konečných prvků. Je nalezen odhad chyby přesného a přibližného řešení úlohy. Je navržena aplikace matematických modelů pro účely navigovaných operačních postupů s možností jejich dalších zpřesnění.

Keywords:

Biomechanika, navigovaná operační technika, matematické modelování, kontaktní úlohy ve vazko-pružnosti, vazko-pružnost s krátkou a dlouhou pamětí, nelineární vazko-pružnost

1 Nástin problematiky namáhání umělých kloubních náhrad statickou a dynamickou silou

1.1 Úvod

V úvodu shrneme současné znalosti z biomechaniky ve vazbě na problémy aloartroplastiky a ve vazbě na nové postupy využívající nových zobrazovacích technik jako počítačové tomografie - CT (computer tomography) a nukleární magnetické rezonance - MRI (magnetic resonance imaging) a následně ve vazbě na navigovanou operační techniku. Dodnes, přestože je ročně implantováno ve světě více jak 1 milion umělých kyčelních kloubů a více jak 1/2 milionu kolenních kloubů, existují stále některé technické problémy, které znemožňují dosáhnout stoprocentní úspěšnosti implantací a dlouhodobé trvanlivosti implantované náhrady. Mají-li totální náhrady kloubů spolehlivě plnit svoji funkci a plně zajistit dlouhodobou pohybovou aktivitu člověka, pak jejich konstrukce i následná jejich klinická aplikace musí respektovat biomechanické poměry v příslušném kloubním sektoru pohybového systému. Biologické poznatky umožňující optimální aplikaci kloubních náhrad a technické znalosti materiálů a výrobních postupů potřebné pro výrobu kloubních náhrad musí být doplněny o nejnovější poznatky biomechaniky lidských kloubů, což umožní konstrukci optimálních tvarů umělých kloubů a to jak z hlediska jejich funkce, jejich bezpečného ukotvení, tak i pohybu kloubu při jeho časově proměnném zatěžování.

1.2 Biomechanika lidských kloubů a jejich náhrad při statickém a dynamickém zatěžování

Biomechanika je vědní obor, který se zabývá aplikací zákonů mechaniky v biologických a medicínských vědách. Jedním z hlavních cílů biomechaniky je studium odezvy živé tkáně na vnější energetické působení z hlediska fyziologického za předpokladu, že živá tkáň je v podstatě kompozitní materiál s řízenými vlastnostmi. Biologický materiál, oproti materiálu neživé přírody který je neschopný samovývoje, je schopen samovývoje, reprodukce a možnosti přizpůsobení okolí. Materiály neživé přírody jsou proto velmi těžko přijímány nebo dokonce i nepřijímány živými systémy, neboť je nelze dostatečně rychle regenerovat a obnovovat. Jejich nevýhodou jsou též jejich nedostatečně přizpůsobivé vlastnosti na rozhraní mezi neživými a živými systémy. To jsou důvody problémů umělých náhrad biologických orgánů a jejich částí. Aby bylo možno tyto materiály použít pro vývoj umělých náhrad lidských orgánů, musí splňovat jistá základní kritéria a vlastnosti: (i) bezpodmínečnou přizpůsobivost okolním materiálům živých systémů, (ii) dostatečný rozsah pružných deformací s mírnou nelinearitou a potřebným elastickým modulem, (iii) vhodnou orientaci deformačních vlastností s ohledem na typ a směr silového působení, (iv) vhodné nevrátne deformace umožňující přizpůsobení bez zbytečně velkých časových a prostorových změn vlastností a vyvolaného poškození, ale umožňující relaxaci napětí a zamezení vzniku mikroporušení, (v) omezení celkové deformace při zvyšujícím se napětí se zajištěním pružného chování biomateriálů s vysokou lokální pevností a s minimální potřebou dodání další energie, (vi) vysokou odolnost proti biokorozi, (vii) vysokou pevnost proti cyklickému zatěžování s vysokým počátečním tlumením, (viii) vysoce kvalitní povrchovou úpravu, která zajistí biokompatibilitu a neumožní biokorozi, (ix) schopnost jisté regenerace ve vztahu k okolní živé hmotě-tkáni, jako vyšší formu biokompatibility. V současnosti jako nejnaléhavější a zároveň nejpřístupnější se ukazuje studium biomechanických a biodynamických procesů pohybového systému člověka. Při biomechanické analýze pohybového systému se zaměříme především na zjištění a studium působení vnitřních a vnějších sil, které jsou přenášeny kloubním systémem, a jejich důsledků, charakterizované napětím a deformací ve skeletu. Analýza rozložení napětí a deformací ve skeletu, resp. jeho některé části, určí jejich charakter a jejich vztah k průběhu pohybu a zatěžování.

Hlavní úloha biomechaniky v medicíně je zaměřena výzkumu v biomechanice kosterního a svalového aparátu na analýzu a syntézu tuhosti a dynamiky lidského skeletu spolu se zahrnutím vlivů působících svalových sil, reologických vlastností materiálů skeletu a měkkých tkání a synoviálních kapalin, výzkumu využití svalstva a regulace teploty a jejich vlivů na patologické jevy částí skeletu, jako osteofyty a další patologické deformace lidského skeletu a jeho částí.

Náplní biomechaniky je studium mechanických pohybů, jejich příčin v celém biosystému a v jeho jednotlivých částech. Kromě toho studuje i vztah biosystému s okolním prostředím. Modelování bi-

osystémů a simulace jeho funkce se stalo významným prostředkem k pochopení funkcí a stavby živé hmoty. Modelování biosystémů lze rozdělit do dvou kategorií modelů. První představuje matematické modely modelující struktury, funkce a vlastnosti zkoumaných biosystémů. Sem patří i matematicko-mechanické modely, jež modelují určitý biomechanický systém a simulují jeho funkci. Dále sem patří modely fyzikálně-mechanických vlastností, termodynamické modely, strukturální modely a modely funkcí. Tím se zabývá teoretická biomechanika. Druhou kategorií modelů tvoří reálně experimentální modely, modelující určitý biomechanický proces nebo objekt. Úkolem těchto modelů je ověřit teoretické předpoklady týkající se struktury, funkce nebo účelu biomechanického objektu jako celku nebo jeho části, ověřovat správnost a přesnost řešení abstraktních matematických modelů, zkoumat dílčí biomechanické problémy, jako napjatostní stavy, schopnost deformace ap. Tím se zabývá experimentální biomechanika. Proto, mají-li umělé náhrady kloubů plnit spolehlivě a dlouhodobě svoji funkci v podmínkách normální pohybové aktivity, musí jejich konstrukce respektovat principy biomechaniky a biomechanických poměrů v příslušném kloubním sektoru pohybového systému. Studium všech sil působících na kloubní systém, ať již přirozený nebo umělý, se zabývají obory jako biostatika, biodynamika, biokinematika, biokinetika a tribologie. V biomechanice pohybového systému se zabýváme studiem vnějších a vnitřních sil, které jsou sumarizovány a přenášeny klouby. Jako důsledek působení vnějších a vnitřních sil pak studujeme rozložení pole deformací a napětí v pohybovém aparátu, jejich charakter a vztah k průběhu pohybu v závislosti na čase.

Uspořádání a tvar lidských kloubů určuje jejich kinematickou a dynamickou charakteristiku. Kinematická charakteristika je dána geometrií kloubu, tvarem kontaktních ploch a jejich chrupavčitého povlaku. Vazy pak plní funkci mechanických zážek nebo vodících a stabilizujících prvků. Z analýz pohybu lidí je zřejmé, že jejich pohybové orgány jsou konstruovány na principu pákového systému se střídavým pohybem. Tvar a forma jednotlivých stavebních prvků kloubního spojení jsou tak rozmanité, že nelze zkonstruovat univerzální umělou náhradu kteréhokoliv lidského kloubu, aby plně vystihla specifické funkční vlastnosti lidského kloubu. Cílem je se tomuto ideálnímu stavu co nejvíce přiblížit. Tomu má napomoci i matematické modelování funkce lidských kloubů a jejich optimálních náhrad.

Z hlediska biomechaniky lze u pohybového ústrojí člověka hovořit o tkáních, o biologických strukturách, o útvarech pasivních a aktivních.

Pasivní elementy jsou tkáně, které vznikající a působící síly, jak zevnitř, tak zevně organismu, přenášejí. Současně působícím silám musejí odolávat a tedy musejí splňovat určité podmínky pevnosti a pružnosti. Tyto tkáně mají působící síly různým způsobem orientovat, usměrňovat a měnit jejich uspořádání. Mezi pasivní elementy zahrnujeme kosti a jejich části, včetně kloubních ploch krytých specializovanou hyalinní chrupavkou, dále vazy, šlachy a povázky. Obecně kost, vazy a šlachy jsou nehomogenní a anizotropní materiály.

Mezi aktivní elementy počítáme svaly, které jsou schopny proměnit energii biochemických reakcí na práci a vyvinout určitý výkon. Mechanické vlastnosti aktivních i pasivních členů pohybového ústrojí člověka se během jeho života mění.

Komponenty pohybového aparátu z hlediska biomechaniky lze shrnout do následujících systémů:

- a) systém segmentů těla a elementů skeletu, jehož funkcí je pasivní zprostředkování přenosu akčních sil na okolí, tvoří pohyblivý a nosný základ pro uchycení svalů, vazů a povázek;
- b) systém kosterních svalů, jehož hlavní funkcí je aktivní silové působení a produkce aktivního mechanického výkonu;
- c) systém mezilehlých prvků, jež spojuje segmenty těla vazivem, chrupavkou, kostí, kloubem a jež spojuje svaly se segmenty šlachou, jeho hlavní funkcí je mechanické spojení mezi systémy a) a b) a v nich samotných;
- d) systém informační, tvořený vnímavými prvky ve svalech, kloubech, šlachách a vnitřním uchu tzv. propioceptory a dále tzv. exteroceptory; viscerceptory a aferentní nervové dráhy (ucho, oko, kožní čidla), jeho funkcí je mechanická recepcce a přenos informací;
- e) systém inervační, tvořený motorickými neurony, nervo-svalovými ploténkami a eferentními neuronovými drahami, synaptickými přechody ap., jeho funkcí je aktivace motorických svalových jednotek;

- f) systém centrální, jež je tvořen míchou, intro- a intrasegmentálními spoji, podkorovými a korovými hybnými podsystémy, jeho funkcí je sběr, selekce, uložení a analýza informace, reprezentace mechanických vlastností prostředí, reflexní činnost, rozhodování apod.

Systémy v bodech a), c) a částečně v b) budou předmětem vyšetřování této studie.

Kosti lidské kostry jsou navzájem spojené. Tato spojení jsou jednak souvislé (plynulé), jednak pohyblivé (dotykové). Pohyblivé spojení je kloub. U kloubů rozeznáváme následující útvary:

- a) kloubní kontaktní (styčné) plochy;
- b) kloubní chrupavky, které kryjí kloubní kontaktní plochy;
- c) kloubní pouzdro, tvořené pevným vazivem. Pouzdro je tvořeno dvěma vrstvami. Vnitřní vrstva, tzv. synoviální, vylučuje do kloubní dutiny vazkou tekutinu - synovii, jež plní funkci vazkého maziva kloubu, vyživuje chrupavku a zvyšuje přilnavost kloubních ploch;
- d) kloubní dutina je šterbinovitý prostor mezi kontaktními plochami malých rozměrů a uzavřený kloubním pouzdem.

Vlastní pohyblivost v kloubech je kombinací pohybů kolem tří os:

- a) kolem horizontální osy v rovině frontální tzv. flexe (ohnutí) a extenze (natažení);
- b) kolem horizontální osy v rovině vagitální tzv. addukce (přitažení) a abdukce (odtažení);
- c) kolem podélné osy kosti tzv. rotace (otáčení).

Vzhledem ke stavbě lidské kostry a způsobu chůze člověka ve vzpřímené poloze jsou nejvíce namáhány nosné velké klouby dolních končetin tj. klouby kyčelní, kolenní a hlezenný. V této studii se budeme podrobněji zabývat matematickou simulací funkce kyčelního a kolenního kloubu a totální náhradou obou kloubů.

Při vývoji umělých kloubních náhrad musíme vycházet z poznatků studia základních funkcí přirozeného kloubu. Ty se musíme pokusit matematicky simulovat, neboť jen srovnání výsledků matematické simulace základních funkcí přirozeného kloubu a výsledků simulace funkcí přirozeného kloubu nahrazeného jeho totální umělou náhradou nám umožní ještě před vlastní implantací kloubu rozhodnout i o vhodnosti té které operační techniky i v případě použití navigované operační techniky. Zbudovaný umělý kloub představuje totiž, podobně jako přirozený kloub, rovnovážný systém, kde tvar odpovídá funkci. Porušení této rovnováhy v přirozeném kloubu má za následek rozvoj artrotických změn s následnou destrukcí kloubních struktur. V případě umělého kloubu vede porušení této rovnováhy k mechanickému selhání, předčasnému uvolnění této umělé náhrady kloubu a případně i její destrukce. Odstranění následků porušení této rovnováhy je také dalším z cílů matematické simulace funkce přirozeného a umělého kloubu, především ve vztahu k navigované operační technice.

Studium kloubů vede na jejich studium z hlediska kinematického, statického, dynamického a z hlediska tribologie. Studium kinematiky kloubů pohybového aparátu člověka vede k objasnění relativních pohybů v kloubu, a to jak z hlediska kvantitativního, tak i kvalitativního. Kinematická charakteristika kloubního spojení tj. stupeň volnosti, převodové poměry ap. jsou dány především tvarem stykových kloubních ploch, tvarem epifýz kostí a chrupavkového pokrytí.

Spolehlivá funkce lidského kloubu je podmíněna nejen vlastním tvarem skeletu a jeho kloubního chrupavčitého krytu, ale rovněž působením různých svalových skupin, vazů a vynikajícími viskózně elastickými vlastnostmi synoviální tekutiny.

Jednotlivá kloubní spojení jsou namáhána při běžných pohybech končetin různě. V zásadě můžeme charakterizovat působící síly na kloubní spojení jako sílu tahovou (v případě horních končetin) a jako sílu tlakovou (v případě dolních končetin).

Při tahové síle jsou kontaktní kloubní plochy od sebe odtahovány a působení síly je v podstatě zachyceno vazivovým aparátem příslušného kloubu. Kloub v takovém případě slouží jako pohyblivé spojení umožňující relativní pohyby spojených částí skeletu avšak s jistým omezením. Matematicky tato omezení modelujeme jako "gap".

Při tlakovém charakteru síly jsou kontaktní plochy k sobě přitlačovány, takže k relativním pohybům spojených částí skeletu dochází převážně v podmínkách těsného kontaktu kluzných kloubních ploch pod tlakem. Kloub v takovém případě vykonává funkci pružného tlakového spojení. Tyto klouby jsou namáhány mnohem více než klouby horních končetin a také u nich dochází častěji k degenerativním změnám. Hodnota tlakových sil, působících např. na hlavici stehenní kosti (femuru), může být zjištěna ze silového paralelogramu, tj. z hmotnosti těla a výslednice svalových sil udržujících rovnováhu. Při statické situaci jsou síly působící v kyčelním, kolenním a hlezenním kloubu vlivem anatomické stavby těla větší, než je hmotnost těla (pákový systém).

Dynamika ve smyslu pohyblivosti člověka klade mimořádné nároky na pohybový aparát, především pak na klouby a jejich kontaktní plochy. Při chůzi jsou klouby dolních končetin vystaveny dynamickým silám, které vzhledem k jejich dlouhodobému cyklickému působení vedou často k destrukci kontaktních chrupavčitých ploch.

Kyčelní, kolenní i hlezenný kloub mají kontaktní plochy uzpůsobeny tak, aby zachytily dynamické síly odpovídající hmotnosti člověka. Díky elasticitě chrupavčitého krytu kontaktních kloubních ploch se tato kontaktní plocha, jež u kyčelního kloubu činí 430-920 mm², při přetížení zvětšuje o hodnotu úměrnou tloušťce chrupavky, její elasticitě a působící tlakové síle. V případě kolenního kloubu bylo ukázáno, že toto zvětšení kontaktní plochy je až 50%, při flexi velikost kontaktní plochy klesá úměrně s rostoucí flexí kolena. Kolenní kloub je tedy přizpůsoben namáhání, kterému je vystaven po většinu času.

V důsledku namáhání kloubů dolních končetin značnými silami a koncentrací tlakového napětí na poměrně malou plochu má pro dobrou funkci kloubu podstatný význam mazání; u lidského kloubu tuto funkci plní synoviální tekutina. Synoviální tekutina je do kloubní dutiny vylučována vnitřní vrstvou kloubního pouzdra. Ta dodává pružnost chrupavčitém krytům kloubních ploch a přitom je schopna svými viskózně elastickými vlastnostmi zachytit i určitou hodnotu tlakového napětí. Synoviální tekutina spolu s chrupavkou tvoří z kyčelního kloubu, kolenního kloubu a kloubu hlezenního elastické tlakové kloubní uložení.

Lidské klouby jsou tvořeny komponentami z živých tkání, které mají schopnost regenerace. To znamená, že mikrotrhlínky vzniklé jako důsledek přetížení, nevedou následkem tkáňové regenerace přímo k destrukci kloubu.

Příčinu nedostatečného stavu znalostí lze spatřovat v komplikovanosti úlohy, u dosud řešených jednodušších úloh (rovinných) a dále v dosud nedostupné metodě, jež by umožňovala vhodnou exaktní rekonstrukci systému. Zde předkládaná teorie spolu s využitím počítačové tomografie (computer tomography - CT) a nukleární magnetické rezonance (MRI), jejich hardwarového a softwarového vybavení s rozlišovací schopností cca 1 mm (volitelnosti rozlišení kontrastu, možnosti provedení serie tomogramů a současně provedení celkového radiogramu ap.) by měla být tou vhodnou metodou, která by umožňovala vhodnou exaktní rekonstrukci systému a jeho funkce. Navíc CT technika rovněž umožňuje prostorovou rekonstrukci sledovaných útvarů (např. z kosoúhlého průmětu grafickou cestou z jednotlivých řezů lze rekonstruovat prostorové uspořádání např. části kolenního nebo kyčelního kloubu ap.). Sdělnost těchto zobrazení je zřejmá pro praktické aplikace, v kombinaci se simulací funkce příslušného přirozeného kloubu a simulací jeho funkce po aplikaci totální náhrady kloubu.

Vzhledem ke konstrukci přirozených lidských kloubů, vynikajícím viskoelastickým vlastnostem synoviální kapaliny a elasticitě hyalinní chrupavky není tvarové kopírování lidských kloubů ideálním řešením jejich umělé náhrady.

Stále přísnější požadavky kladené na implantáty, snaha o jejich optimální funkci a dosažení maximální životnosti vedly ke zkouškám různých materiálů pro tyto účely - kovů, plastických hmot a keramiky (Al_2O_3 , ZrO_2). Při daném dynamickém mechanickém namáhání (odpovídající řádově $10^6 - 10^7$ kroků za rok) musí mít tyto materiály většinou vyšší pevnostní vlastnosti než původní kost. To z toho důvodu, že dané specifické podmínky neumožňují u implantátu zvolit takovou optimální konstrukci, která by odpovídala konstrukci přirozeného kloubu, jež byla dosažena dlouhým přirozeným vývojem. Následkem vyššího modulu pružnosti je i tuhost implantátu jako celku vyšší než původní kosti, což se nepříznivě projevuje při rázovém zatížení. V každém materiálu, tedy i v živé kosti, vznikají při dlouhodobém proměnném zatížení pod mezí pevnosti latentní poruchy, které za určitých podmínek mohou způsobit lom. Živá kost má však schopnost regenerace svých mechanických vlastností, takže drobné mikrotrhlínky se zacelí, srostou. Tuto vlastnost však nemají neživé materiály, jejich mecha-

nické vlastnosti se snižují nebo v optimálním případě zůstávají zachovány. Tento jev je označován jako únava materiálu. Navíc neživá hmota v těle je napadána i působením okolní tkáně - koroduje.

Stabilní implantáty v ortopedii jsou vystaveny opakovanému vysokému namáhání s počtem $10^6 - 10^7$ cyklů za rok. Velikost působících sil a jejich četnost nelze přesně zjistit. Kromě toho i napěťové podmínky se u jednotlivých pacientů v průběhu doby mění tj. i v průběhu dlouhodobé funkce totální náhrady kloubu. Proto implantáty a jejich spoje s kostí musí být dimenzovány na teoreticky vysokou životnost s maximální bezpečností. Konstrukce umělých náhrad kloubů jsou však omezeny vlastnostmi použitého materiálu. Spolehlivost a životnost totálních náhrad kloubů proto závisí na použití materiálů vhodných mechanických vlastností. Použitý materiál musí splňovat i požadavky biokompatibility a musí být cenově dostupný. Nejvíce používanými materiály jsou kovy (zlato, platina) a slitiny kovů (ocel, titanové slitiny, ap.). Slitiny mají většinou ustálené chemické složení a vývoj se nyní soustřeďuje na technologii jejich zpracování. Kromě kovů a jejich slitin se používají plasty (polyethylen) a některé kompozitní materiály, které zachovávají výhody plastů při zvýšení mechanických vlastností a v posledních letech jsou to především keramické materiály. Zvýšení jejich pevnosti při tahovém namáhání a částečné snížení křehkosti umožnilo využít jejich vynikající tribologické vlastnosti a vynikající biokompatibilitu (snášelnivost v lidském těle). Použití keramických materiálů, které stimulují růst kostní tkáně ve svém okolí, je žádoucí. Dosud se nepodařilo najít vhodnou náhradu za kostní cement, který je nejslabším místem implantace při aplikaci totálních náhrad kloubů. Zde by bylo třeba najít hmotu s vyšší pevností, ale také s větší poddajností pro účinné tlumení rázů při zachování všech výhod, které jsou na používaný polymethylmetakrylát kladeny. V současnosti se používají s výhodou umělé náhrady kloubů, které není nutno cementovat.

Kloubní náhrada musí být konstruována tak, aby spolehlivě splnila následující dvě funkce, totiž: a) aby plnila funkci kloubu, jež má nahradit, za jeho statického a dynamického zatěžování, b) umožnit spolehlivé ukotvení v kloubním sektoru skeletu. Funkční části umělých náhrad kloubů bývají voleny co nejjednodušší, např. v případě kyčelního kloubu mají kulový tvar, neboť jde z hlediska technického o relativně jednoduché řešení. V případě kolenního kloubu, který je v každém případě anatomickým originálem, je napodobení anatomického tvaru velmi obtížné. V takovýchto případech se technické řešení hledá tak, aby odpovídalo funkci a užitému technickému materiálu. Při návrhu umělých kloubních náhrad jsou kontaktní plochy kloubních komponent určujícím faktorem nejen z hlediska pohybu v kloubu, ale také z hlediska rozložení tlakového napětí, a tím i životnosti umělé náhrady kloubu. Rozložení tlakového napětí vystupuje do popředí při konstrukci tvaru kontaktních ploch zvláště v souvislosti s tím, že úloha, kterou mají chrupavka a synoviální tekutina, je dosud technickými prostředky nenahraditelná. Tato charakteristika je rozhodující především u kloubů dolních končetin, které musí při pohybu člověka přenášet svalové síly jako zdroj zrychlení hmotnosti člověka a současně zachycovat síly vznikající při přechodu do klidového stavu. Je tedy důležitá hlavně při konstrukci kyčelního a kolenního kloubu.

Na kontaktních plochách mezi jednotlivými komponentami lidských kloubů a jejich totálních náhrad dochází k postupnému opotřebení, navíc na kontaktních plochách přirozených a umělých kloubů působí tření. Mechanismem opotřebení tuhých těles a mechanismem tření se zabývá tribologie. Opotřebení je nežádoucí změna povrchu nebo povrchů tuhých těles, která jsou ve vzájemném těsném kontaktu, způsobená buď vzájemným působením funkčních povrchů nebo funkčního povrchu a média, které opotřebení vyvolává. Tření je pojem vyjadřující odpor proti pohybu, který vzniká mezi dvěma tělesy v oblasti dotyku jejich povrchů v příčném směru k nim. Mezi tělesy, která jsou v kontaktu, může být přítomno médium - třecí mezivrstva, jež může být kapalné, tuhé (vaselina, grafit) nebo plynné. Tření ve smyslu Coulombově závisí na normálové složce působící síly, se zvětšením přítláčivé (normálové) síly se zvětšuje tření i opotřebení.

Hovoříme o třecích a kluzných dvojicích. Třecí dvojice jsou dvě tělesa v kontaktu, u nichž dochází ke tření jako k žádoucímu efektu (např. brzdy), kluzné dvojice jsou dvě tělesa v kontaktu, u nichž tření je nežádoucí jevem (např. kloubní náhrady). Z tribologie lidských kloubů jsou známy vynikající viskoelastické vlastnosti synoviální tekutiny. Zdá se (Walker, Erkman, Weightman, Duff-Barclay, Spillman), že synoviální tekutina se do kloubu po aplikaci umělé náhrady kloubu vylučuje ve stejném chemickém složení jako v kloubu přirozeném.

Matematická simulace funkce umělého kloubu založená na matematické teorii kontaktních úloh Signoriniho typu dovoluje studovat napěťové a silové poměry na kontaktních plochách, velikost defor-

mace kontaktních ploch i přenos zatěžovacích sil, přenášených z kloubní jamky na hlavici femuru. Srovnání výsledků matematické simulace přirozeného a umělého kloubu pak umožní posoudit, zda funkce umělé náhrady kloubu bude plně uspokojovat funkční požadavky na ni kladené, a umožní rozhodnout jaká vůle v kloubu bude optimální pro plnou funkční způsobilost umělé náhrady kloubu.

1.3 Dynamické zatěžování, mechanika pohybu

Dynamickým zatěžováním rozumíme zatěžování skeletu člověka nebo jeho částí v čase a to buď konstantními nebo proměnnými silami, pohybem pak změnu místa nebo polohy v důsledku dynamického zatěžování svalovými silami. Každý pohyb vychází z klidové polohy a opět se do klidové polohy vrací. Živé tělo může být pouze v anatomickém (zdánlivém) klidu, nikdy však v důsledku pohybů při dýchání, proudění krve, činnosti srdce apod. ve fyziologickém (absolutním) klidu. Na tělo člověka i jeho skelet působí v každém časovém okamžiku tíže, kterou vědomě či nevědomě v klidu i v pohybu tělo musí neutralizovat a tak udržovat jeho stabilitu. Na tělo působí systém působících sil. Jestliže se tyto síly vyrovnávají, pak hovoříme, že tělo je v rovnováze. Rovnováha je statická, jestliže všechny části těla jsou v klidu a dynamická, jestliže je tělo nebo jeho části v pohybu. Dynamická rovnováha je častější než statická a je základním faktorem všech pohybů. Působí-li na tělo ještě vnější síla (síly), pak pro udržení rovnováhy v důsledku kloubního a vazivového spojení skeletu, dochází k vzájemným posunům dílčích částí skeletu (jako např. lordosy a kyfosity s rozdílným napnutím vazů a svalů, náklon celého těla apod.). Zachování rovnováhy při pohybu a pevnost stoje zajišťuje tření, čím je větší tím je větší stabilita při pohybu i klidu (stojí).

Ke skeletu jsou připojeny svaly (musculus), mající funkci aktivního hybného zařízení, které v důsledku smršťování (kontrakce) na nejrůznější podněty (fyzikální, chemické, mechanické, biologické, fyziologické) vyvolávají svalové síly, jež jsou základem pohybů. Společné působení více svalů při určitém pohybu ovlivňuje plynulost pohybu, přičemž výše únavy jednotlivých svalů (jejich větší či menší výkon) ovlivní v čase i změnu pohybu. Sval v klidu část svých vláken má pod určitým napětím - klidovým napětím (svalový tonus). Funkcí svalů je jednak fixovat klouby v určité poloze (statická funkce svalů), provádět pohyby kostí v kloubech (dynamická funkce svalů), produkovat teplo při smrštění, podpořit proudění krve v žilách, chránit vnitřní orgány. Na končetinách převládají svaly dlouhé, větvenité, s dlouhými úponovými šlachami, přičemž se začátky těchto svalů někdy sdružují ve svaly dvojhavé, trojhavé a vícehavé. Dále rozeznáváme svaly čtyřhranné, trojúhelníkové, kruhovitě, štíhlé, oblé, široké, dvojbříškové a vícebříškové, apod. Nejčastěji se svaly označují podle své funkce - ohybače či flexory, natahovače či extensory, přitahovače či adduktory, odtahovače či abduktory.

Svaly spolu se skeletem tvoří funkční jednotu. Skeletní svaly jsou zdrojem síly pro pohyby těla i jeho částí. Základní vlastnosti svalové tkáně jsou extensibilita, elasticita a kontraktilita, tj. svaly mohou být nataženy, po natažení se vrací do původní polohy a délky, mohou se zkracovat (kontrahovat). Svalová vlákna se mohou kontrahovat až na polovinu své klidové délky. Šlachy se nikdy nezkracují. Prodloužení je přímoúměrné délce vláken a nepřímě úměrné jejich tloušťce. Rozdíly mezi maximálními a minimálními délkami svalových vláken nazýváme amplitudou jejich akce. Působení svalu na kloub je dáno polohou svalu vzhledem k osám pohybu v kloubu, např. na jedné části kloubu sval vyvolává flexi, na opačné straně extensi. Jelikož u širokých svalů je vztah jeho jednotlivých částí k osám pohybu v kloubu různý, bude i různý jejich účín na kloub a tedy každá část svalu bude mít odlišnou funkci. Pohyb v kloubu závisí též na možnosti pohybu v daném kloubu. Funkčně proto svaly dělíme podle těchto kloubů na: (i) flexores - extensores, rotatores u jednoosých kloubů (válcové, kladkovité, čepové), (ii) flexores - extensores, abductores - adduktory u dvojosých kloubů (eliptické, sedlovité), (iii) flexores - extensores, abductores - adduktory, rotatores u trojosých kloubů (kulovité - např. kyčelní kloub).

Zevní síly působící na tělo jsou neutralizovány pevností skeletu, vazů a činností svalstva. Působení svalů je přitom různé podle toho, zda mají tyto vnější síly vyrovnávat (tzv. statické kontrakce - při znehybnění kloubů a při udržování rovnováhy v klidu i pohybu), resp. překonávat (kontrakce zkrácením svalů - vlastní funkce svalu, provádí vlastní aktivní pohyb, přičemž hluboce uložené svaly vykonávají rychlý pohyb neboť jsou upnuty v blízkosti kloubů, svaly povrchově uložené vykonávají pomalé pohyby neboť jsou upnuty dále od kloubů), resp. zmírňovat (kontrakce prodloužením svalů - čili elastická kontrakce, je pozvolné uvolňování smrštěného svalu, resp. brzdí účín akčních svalů (tzv.

synergistů) vykonávajících určitý pohyb např. při předklonu, svaly antagonisté, provádějící opačný pohyb než akční svaly, zajišťují aby pohyby byly harmonické, přesné a úměrné, dále usměrňují činnost synergistů). Je zřejmé, že činnost svalů musí být koordinována.

Tělo jako celek, ale i jeho jednotlivé části se pohybují na základě zákonů mechaniky, dané Newtonovými zákony pohybu a zákony souvisejícími s pákovými systémy, neboť lidské tělo je charakterizováno pákovým systémem. Tělo jako celek se pohybuje chůzí (lokomocí) nebo rotací.

Progresivní pohyb celého těla vlastní silou z místa na místo nazýváme lokomocí. Je to translační pohyb způsobený úhlovým pohybem končetin. Účinnost pohybu těla vpřed závisí na pevnosti podložky a na tření. Tělo v pohybu naopak pokračuje vpřed pokud není zastaveno silou. Síla při lokomoci má složku horizontální a vertikální. Vertikální složka působí ve směru proti působící tíži zemské, horizontální složka působí ve směru pohybu (tzv. propulsní fáze pohybu) a je příčinnou pohybu vpřed nebo ve směru proti směru pohybu (tzv. brzdící fáze). Má-li se tělo pohybovat vpřed, potom horizontální složka v propulsní fázi je větší než v brzdící fázi. Rychlost pohybu (chůze) je přímo úměrná velikosti odrazu a směru a frekvenci síly odrazu. Tuto sílu dodávají extensoři kyčelního kloubu, kolenního kloubu a hlezenného kloubu, směr pak natočení dolní končetiny v okamžiku svalového smrštění, přitom dolní končetiny provádějí jakýsi kyvadlový pohyb. Chůze může být definována jako střídavé ztrácení a následné nabývání rovnováhy (stability) získáním nové podpěrné polohy, přičemž rovnováha (stabilita) je přímo úměrná velikosti podpěrné plochy. Tedy při chůzi se tělo pohybuje vpřed střídavou činností dolních končetin, přičemž se tělo v každé fázi kroku opírá alespoň jednou končetinou (podpěrnou či nosnou končetinou) o podložku, druhou končetinu nazýváme visící či kročnou končetinou. Jedná se o translační pohyb celého těla, prováděný úhlovými pohyby jeho jednotlivých částí. Během chůze se obě končetiny střídají ve své funkci hnací a podpěrné. Znalost správné polohy končetiny při analýze chůze je podstatná. Z tohoto důvodu biochemici krok rozfázovali na 31 fází (Bombeli (1983)). Během kroku dolní končetiny procházejí fází švihlu a fází podpory. Fáze podpory se dělí na fázi zbrzdění (od okamžiku, kdy se kročná noha dotkla podložky, k okamžiku, kdy je těsně pod těžištěm) a na fázi propulsní (od momentu, kdy je noha těsně pod těžištěm k okamžiku, kdy opustí podložku). Začátek fáze brzdění jedné končetiny se překrývá s koncem propulsní fáze druhé končetiny, hovoříme pak o fázi dvojí opory jež je společnou (časově krátkou) fází obou končetin. V této fázi se obě nohy dotýkají podložky, přední oporná končetina se dotýká patou a zadní hnací se dotýká podložky špičkou. Tato fáze je však velmi labilní. Detailní analýzu jednotlivých fází kroku podávají anatomické a svalové analýzy chůze. Těžiště těla se při chůzi střídavě zvyšuje a snižuje, nejvýše je v polovině kroku, tj. v okamžiku, kdy visící končetina má nosnou končetinu. Délka a doba kroku závisí na délce končetin, řídí se tedy zákony kyvu. Na chůzi má vliv věk, pohlaví a tělesná konstituce.

Matematická simulace chůze, jak plyne z anatomické a svalové analýzy chůze, je úkol nadmíru těžký, neboť v každém časovém okamžiku se mění poloha i tvar pohybující se končetiny. V naší studii se omezíme na studium zatížení dolní končetiny nebo jejích částí (kyčelní kloub, kolenní kloub) v 16té fázi kroku (Bombelli (1983)) při vysokém namáhání v čase, a při zatížení odpovídajícím váze člověka.

Chceme-li správně simulovat napětové poměry v totální náhradě kloubu, musíme znát fyziologické rozložení působících sil v kloubu samotném i rozložení sil, jež se na kloub (např. kolenní, kyčelní, apod.) přenášejí z kosterního skeletu a navíc také fyziologicky správný směr působících sil.

Většina autorů vychází z Pauwelsovy úvahy, který řešil pouze jednorozměrnou úlohu s uvažováním pouze hmotnosti těla a svalové síly abduktorů. Tyto představy se rozšiřují do roviny frontální pro statický stoj na jedné noze a zjednodušené působení svalů. Z této představy můžeme potvrdit jen to, že síla P jako výslednice silového působení hmotnosti člověka a funkce svalových skupin je rozhodující pro určení tlakového zatížení hlavice a krčku stehenní kosti a že namáhání horního konce stehenní kosti, a tedy i umělé náhrady kyčelního kloubu, bude mít ohybový charakter.

Prostorová analýza působení jednotlivých svalových skupin v sektoru kyčelního kloubu zatím nebyla nikým provedena. Je zřejmé, že působící horizontální svalové síly ovlivní směr síly P .

Na zatěžování implantované kloubní náhrady kyčelního kloubu má vliv chůze, která je rozhodujícím faktorem ovlivňujícím charakter zatěžování kloubů dolní končetiny. Chůze je dopředný pohyb ve směru kolmém k frontální rovině. Proto analyzujeme působení síly v rovině směru pohybu, tj. v rovině sagitální. Umělé jamky kyčelního kloubu, které byly před delší dobou implantovány a funkčně zatěžovány nás informují o směru působení síly na hlavici umělé náhrady kyčelního kloubu při chůzi.

Pohyb těla při chůzi předpokládáme za pohyb rovnoměrný, který je udržován silovými impulsy

pružných prvků, totiž svalů. Z experimentálních měření plyne, že reakční síla převyšuje silové působení vyvolané hmotností pokusné osoby celkem nevýznamně. Její zvýšení je reakce silových impulsů. Druhé zjištění se týká řádově zvýšené síly působící na hlavici kyčelního kloubu. Charakteristický průběh této síly v krokovém cyklu odpovídá průběhu síly registrované na náslapné desce, je však řádově vyšší. To je důsledek působení jednotlivých svalových skupin zapojených při odrazu a došlapu dolní končetiny. Pro matematické modelování a simulování tohoto pohybu bude nutno zjistit velikosti těchto působících sil. Z předchozích úvah můžeme dedukovat, že

(i) reakční síly při odrazu a došlapu jsou vždy větší než síly vyvolané hmotností testované osoby, nárůst je úměrný zrychlení při odrazu a došlapu;

(ii) reakční síla při odrazu je větší než reakční síla při došlapu, neboť reakce na podložce nevyjadřuje reálnou sílu působící v kloubech dolní končetiny, odrazová síla působí na delším úseku pohybu těžiště těla;

(iii) síla, kterou působí odrazová noha v kyčelním kloubu musí být pro udržení dopředného pohybu větší než reakční síla v kyčelním kloubu při došlapu;

(iv) směr těchto reakčních sil je blízký poloze osy stehenní kosti při odrazu a došlapu;

(v) v okamžiku, kdy těžiště těla prochází nad oporovou nohou je síla působící na klouby dolní končetiny nejmenší, neboť svaly oporové nohy nejsou v akci a švihová noha působí jako rovnovážný prvek.

Odtud se domníváme, že na rozdíl od statického stoje o jedné noze, kdy je silové zatížení hlavičky endoprotézy zvýšeno působením svalů udržujících rovnováhu, je situace při chůzi opačná. Svaly zvyšující silové působení v kloubech dolní končetiny jsou zapojeny při chůzi v okamžiku odrazu a došlapu a ve fázi plné opory působí jako rovnovážný prvek švihová noha. Snížení vertikálního silového působení hmotnosti těla na podložku je způsobeno horizontální silovou složkou těla v pohybu.

Odtud vyplývá, že směr síly, která působí na všechny klouby dolní končetiny při chůzi bez opory, bude probíhat rovinou proloženou směrem chůze, tedy rovinou sagitální. Největší reakční síla bude působit na klouby v okamžiku odrazu a došlapu. Směr této síly vzhledem k vertikále sagitální roviny je u kyčelního kloubu určen délkou kroku a u kolenního kloubu polohou osy stehenní kosti.

Po implantaci umělé náhrady kyčelního kloubu se biomechanické poměry v kloubním sektoru mění, především v závislosti na intenzitě pohybu pacienta. Z pohybové aktivity vyplývá nejen hodnota výsledné síly, která působí na hlavici kyčelního kloubu, ale také míra kolébání pánve v rovině frontální. S větší aktivitou pacienta se směr výsledné síly, ve vztahu k vertikální ose pánve, odklání laterálně. Čím nižší pohybovou aktivitu pacient projevuje, tím menší je opotřebení.

Umělá náhrada kyčelního kloubu je nejvíce namáhaným kloubem z hlediska působení ohybového momentu. Velkou úlohu zde hraje způsob ukotvení dřívku kloubní náhrady ve dřevěném kanálu stehenní kosti. Dřík má klínový tvar zužující se směrem k jeho dolnímu konci. Tento tvar je zvolen z toho důvodu, aby při zavádění do dřevěného kanálu stehenní kosti vyplněné kostním cementem PMMA, pronikal dřík hmotou PMMA a přitom ji vtlačil do spongiózní kosti na vnitřním povrchu kanálu. Tím, že PMMA vyplní všechny nerovnosti v uvolněném kanálu horního konce stehenní kosti, vytvoří ideální lože pro dřík kloubní náhrady. Další důvod pro jeho tvar je snadné jeho uvolnění směrem nahoru při reoperaci. Klínovitý dřík má z hlediska pevnosti v určitém místě svůj tzv. kritický průřez. V případě, že dřík je pevně zafixován a naléhá na rovinu resekovaného krčku stehenní kosti svým límcem, potom se endoprotéza chová jako rigidní dvouramenná páka a namáhání ohybovým momentem se projeví pouze na krčku endoprotézy. Na dřívku se ohybový moment projeví jenom jako výsledná tlaková síla, která působí na opačném konci páky, tj. na konci dřívku, tlakem na vnitřní povrch kostního kanálu. V případě, že dřík je částečně uvolněn pak se endoprotéza chová jako ukotvený štíhlý prizmatický prut. Podle našeho názoru a našich numerických výsledků ne tak přesně, neboť na uvolněné části dřívku působí coulombovské tření a takto uvolněný dřík endoprotézy je třeba chápat a studovat jako elastické těleso s částí hranice jako kontakt mezi dřívkem a femurem, tj. studovat jako kontaktní úlohu se třením.

Extrémní zatěžování umělé náhrady kyčelního kloubu ohybovým momentem po implantaci vyvolává někdy poruchy v kotvení PMMA. To souvisí s rozdílnou elasticitou stehenní kosti, PMMA a dřívku TEP. Proto se hledají nová konstrukční řešení dřívku a jejich kotvení. Cílem je nalézt taková nová řešení, která by umožnila kotvení dřívku bez PMMA při dlouhodobé funkční spolehlivosti, ale také dosáhnout takové elasticity jejího dřívku, která by byla blízká elasticitě stehenní kosti a navíc,

aby po zahřátí na teplotu těla dřík plně dolehl na stěnu vyfrézované stehenní kosti. Zde se ukazují v prvním případě jako nadějně kompozitní materiály a keramiky na bázi Al_2O_3 a ZrO_2 . Přitom hlavním aspektem pevnostní charakteristiky TEP kyčelního kloubu je rozložení napětí vyvolané ohybovým momentem. V tomto případě je účinným pomocníkem matematická simulace funkce TEP.

Při určení hodnoty makronapjatosti dříku náhrady kyčelního kloubu se v současnosti předpokládá, že síla F a neutrální osa dříku náhrady kyčelního kloubu leží v jedné rovině. Pro směr působící síly F se předpokládá vertikální směr, tj. směr shodný s polohou osy těla při chůzi. Potom na dřík působí maximální ohybový moment $M_0 = Fa$, kde a ($\sim 22mm$) je rameno působící síly F vzhledem k neutrální ose dříku. Ve skutečnosti tyto poměry jsou daleko složitější. Proto v námi předkládaném modelu předpokládáme, že zatížení dané hmotností pacienta se přenáší na pánev a z pánve na jamku a odtud na hlavici, dřík a stehenní kost (femur) ve statickém případě stoje o jedné noze. V případě dynamickém, tj. při chůzi, předpokládáme, že se zatížení dané hmotností těla a působících svalových sil přenáší v každém časovém okamžiku na pánev, z pánve na jamku a odtud na dřík a femur, přičemž absolutní hodnota a směr působících sil se v čase mění.

2 Matematické modely statického a dynamického zatěžování kyčelního a kolenního kloubu a jejich náhrad

2.1 Model kloubních systémů

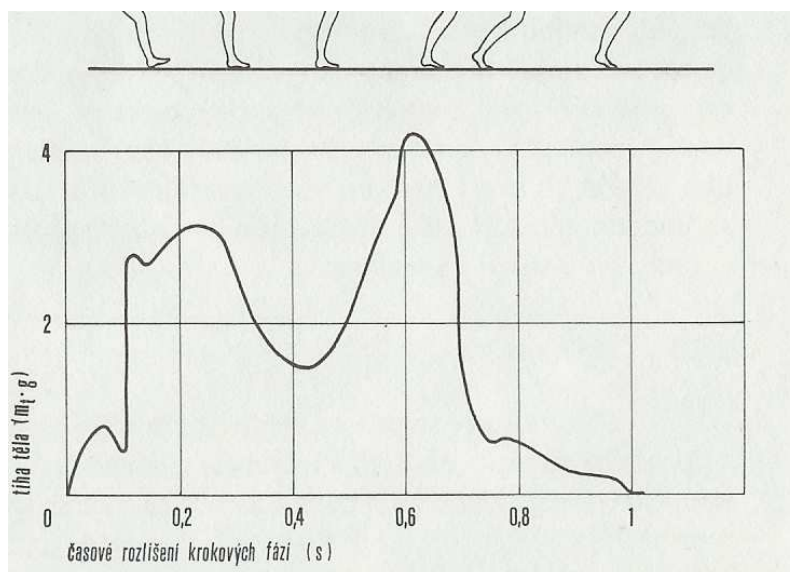
Úvod

Chování kloubu za dynamických podmínek je dáno konstitučními vlastnostmi jednotlivých komponent kloubního systému. Jejich elastické a viskózně elastické vlastnosti vytvářejí poddajnostní podmínky v kloubu, jeho nitrokloubních vztahů. Tyto podmínky jsou ještě navíc ovlivněny stavbou a mohutností okolního vazivového a svalového systému. Aplikací totálních náhrad za porušený kloub dochází k narušení těchto nitrokloubních vztahů. Požadavkem proto je, aby toto narušení nepřesáhlo únosnou mez pro pacienta a tedy, aby nepřekročilo mez biomechanické a biologické únosnosti. Biomechanické požadavky představují jednak požadavky tvarové (vyplnění prostoru v měkkých tkáních, rozložení tlakové síly na kontaktních plochách TEP), požadavky statického namáhání (pevnost, pružnost) a požadavky dynamického namáhání (únavová pevnost, odolnost proti otěru). Proto TEP musí být tvarována tak, aby zajistila jak funkci kyčelního kloubu, tak i spolehlivé její ukotvení v kloubním sektoru skeletu. Kontaktní plochy kloubních komponent jsou určující pro funkci náhrady kloubu a to jak z hlediska jeho funkce tak i z hlediska rozložení tlakového napětí, což má vliv na životnost náhrady. Konstrukce kontaktních ploch u TEP musí nahradit funkci chrupavky a synoviální tekutiny ve zdravém kyčelním kloubu a zajistit přenášení dynamických zatížení vznikajících v důsledku dynamického působení svalových sil a současně zajistit zachycení sil vznikajících při přechodu do klidového stavu.

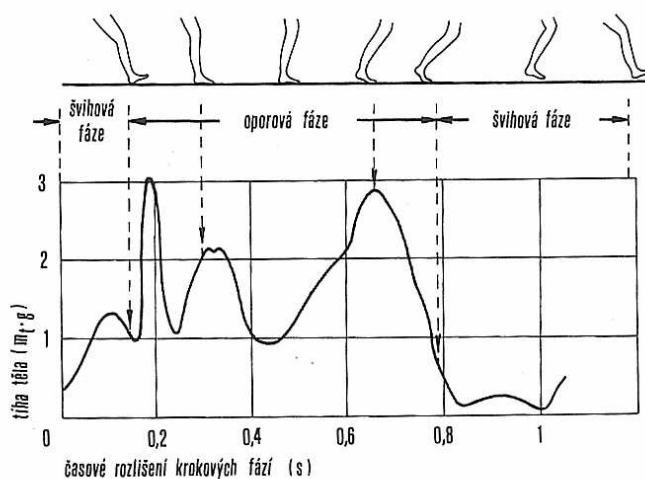
Kyčelní kloub má v těle unikátní postavení, neboť spojuje končetinu nesoucí hmotnost celého těla s relativně nepohyblivým pánevním kruhem. Velikost tlakové síly působící na hlavici stehenní kosti (femuru) lze podle klasické biomechaniky získat ze silového paralelogramu, t.j. z hmotnosti těla a výslednice svalových sil udržujících rovnováhu. Působení této výslednice svalových sil probíhá od velkého trochanteru, kde jsou všechny uvažované abduktory upnuty, směrem k horní hraně pánve.

Architektura skeletu kyčelního kloubu je proto určována kombinací statického zatížení a dynamickou složkou danou stahy svalstva a tonusem ligament. Obě složky dostávají společného jmenovatele v období, kdy kyčelní kloub začne plnit biomechanické nároky, které přináší chůze. Jak ukázala řada autorů (Rydell, Paul, Sorbie et al., Debrunner, Groh et al., Stokes et al., Carlson, Karas, Otáhal) pro kyčelní kloub jsou typické dva vrcholy působící tlakové síly během oporové fáze jednoho kroku. Průběh tlakové síly při chůzi v kyčelním kloubu v oporové fázi jednoho kroku je na obr.1 (podle Paula). Analýza křivky ukazuje, že při přenášení tělesné hmotnosti na oporovou nohu stoupá tlakové zatížení kyčelního kloubu nejvýše a při švihové fázi klesá na nulu. Kolísání během trvání oporové fáze je důsledek působení dynamických sil.

Měření na kolenním kloubu během oporové fáze kroku jsou na obr.2 (podle Morissona). Charakteristické jsou tři vrcholy síly rozložené mezi došlapem a odrazem oporové nohy. Horní konec



Obrázek 2.1: Průběh tlakové síly v kyčelním kloubu při chůzi (podle Paula)

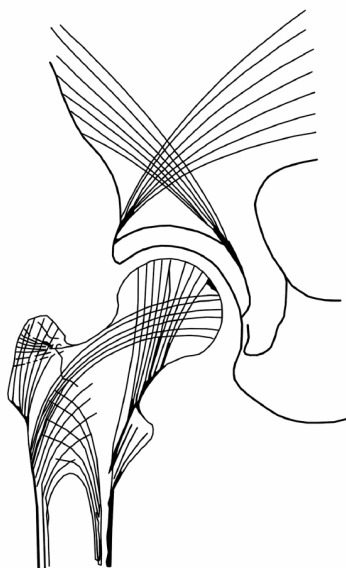


Obrázek 2.2: Průběh tlakové síly v kolenním kloubu při chůzi (podle Morissona)

stehenní kosti je tvořen spongiózní kostí potaženou tenkou vrstvou kosti kortikální. Spongiózní kost je uspořádaná do systémů trámců přenášejících síly působící na celý horní konec stehenní kosti. Tím je zabezpečena vysoká pevnost kosti při minimu kostního materiálu. Na předozadním rentge- novém snímku kyčelního kloubu lze v horní části stehenní kosti rozlišit 5 systémů kostních trámců (viz. obr.3, obr.4). Primární mediální tlakový systém probíhá z horního kvadrantu hlavice téměř kolmo dolů do oblasti mediální kortikalis proximální části diafýzy stehenní kosti. Primární laterální tahový systém probíhá z dolního kvadrantu hlavice a obloukem probíhá krčkem do laterální části horního konce diafýzy stehenní kosti v oblasti báze velkého trochanteru. Sekundární mediální tlakový systém probíhá od mediální kortikalis horní části diafýzy stehenní kosti proximálně a laterálně. Sekundární laterální tahový systém probíhá od laterální kortikalis horní části diafýzy femuru proximálně a mediálně. Trámce velkého trochanteru probíhají z laterální kortikalis velkého trochanteru proximálně a mediálně. Tento tlakový systém je následně porušen aplikací totální náhrady kyčelního kloubu. (Směry jsou následující:



Obrázek 2.3: Předozadní rtg. snímek kyčelního kloubu



Obrázek 2.4: Uspořádání trabekulárního systému proximálního femuru, modifikováno podle Bartoš (1998)

proximálně = nahoru, distálně = dolů, ventrálně = dopředu, dorzálně = dozadu, mediálně = dovnitř, laterálně = zevně.).

Kolenní kloub je velmi složitý systém. Kolenní kloub je válcovitého typu a je největším kloubem v lidském těle. V kolenním kloubu se stýkají tři kosti, totiž kost stehenní, kost holenní a česka. Mohutný dolní konec stehenní kosti (femuru) je zakončen dvěma kondyly, jež jsou oddělené mezikondylovou jámou. Kloubní plochy kondylů jsou vypouklé v rovině čelní a předozadní, vzadu odděleny a vpředu

se spojují v českovou jamku. Boky kondylů, t.zv. epikondyly, jsou vnitřní a vnější, přičemž vnitřní epikondyl je větší než vnější. Vlastní hlavice kloubu je tvořena válcovitými kloubními plochami obou kondylů s nestejným zakřivením, vpředu s menším zakřivením než v zadní části. Oba kondyly zapadají jen přibližně do oválných mělkých jamek na obou kondylech tibie. K vyrovnání nesouladu v zakřivení slouží vazivové prstence, tzv. menisky, jež oslabují vzájemné nárazy kloubních ploch, především při doskoku. Kondyly femuru jsou konvexní, zatímco kondyly tibie jsou ploché.

Kolenní kloub má velmi složitý vazivový aparát, nejsložitější ze všech velkých kloubů. Nejdůležitější jsou vazy zkřížené, postranní a tractus iliotibialis. Zkřížené vazy jsou uloženy ve fossa intercondylaris. Přední začíná na mediální ploše zevního kondylu femuru dorzálně, směřuje ventro-medio-distálně a upíná se na přední část interkondylické eminence. Zadní zkřížený vaz začíná z přední části laterální plochy mediálního kondylu, směřuje dorzo-latero-distálně a upíná se na zadní část interkondylické eminence. Zkřížené vazy jsou nejvýznamnější vazivové stabilizátory kolenního kloubu.

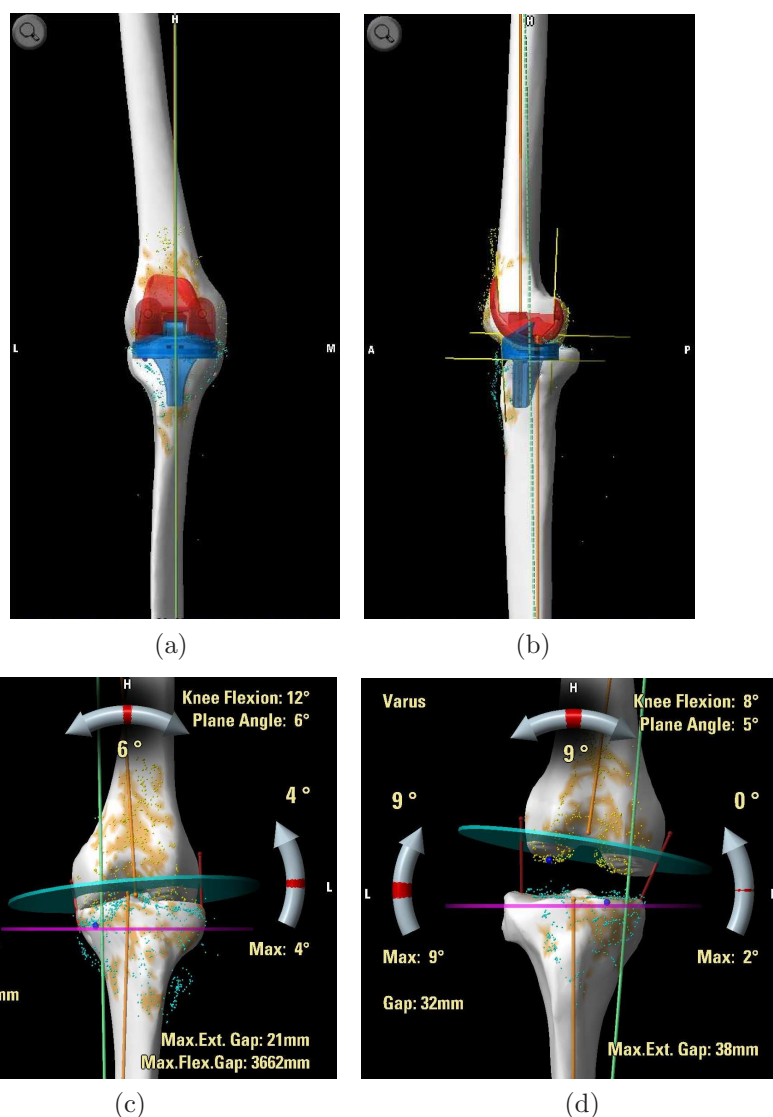
Postranní vazy jsou rovněž dva. Vnitřní je součástí kloubního pouzdra. Začíná na vnitřním epikondylu femuru, směřuje distálně a upíná se do mediální plochy proximální tibie 6 a 9 cm pod kloubní štěrbinou. Zevní postranní vaz není součástí kloubního pouzdra, ale probíhá nad ním. Začíná na zevním epikondylu femuru, směřuje distálně a upíná se do špičky hlavičky kosti lýtkové.

Chování kolenního kloubu v dynamických podmínkách je dáno vlastnostmi jednotlivých komponent kloubního systému, přičemž jejich elastické a viskózní elastické vlastnosti spolu se svalovým systémem vytvářejí podmínky poddajnosti v kloubu. K těmto vlastnostem přistupuje ještě Coulombovské tření, které je v intervalu 0.001-0.025. Ve statickém případě třecí síla roste se zatížením kloubu. Namáhání kolenního kloubu nezávisí jen na vlastním zatížení kloubu, které se přenáší přes femur, ale i na působení svalových sil. Podle Maqueta a Pelzera při zatížení vlastní hmotností (vahou) člověka cca 540N je zatížení svalovými silami při stožení na jedné noze cca 730N a tedy celkové zatížení kolenního kloubu je cca 1270N. Celkové zatížení na počátku kroku je cca 2400N a při doskoku při chůzi ze schodů 4000N. Velikost kontaktní plochy je cca 320mm².

Navigovaná operační technika

Zkvalitnění navigované operační techniky je v současné době jedním z primárních úkolů biomechanického výzkumu. Problém současné navigované operační techniky je v jejím kinematickém přístupu (viz obr. 5 a,b,c,d), kdy se určuje mechanická osa končetiny a vhodný návrh resekce femorální části kolenního kloubu, nedefinuje však vedle zatěžujících sil vliv napětí měkkých tkání na vyšetřovaný kloubní systém. O napjatostních poměrech, tlakových a tahových, v kloubním systému po aplikaci totální náhrady kloubu rozhoduje napětí měkkých částí kloubního systému v okolí náhrady, tj. kloubního pouzdra, vazů, svalových úponů a výsledné osové postavení celé končetiny. Pozorování lékařů při reoperacích náhrad kloubů nás informují, že u pacientů dochází k předčasnému opotřebení plastové vložky s produkcí velkého množství polyetylenových částic, které v organismu iniciují reakce vedoucí k uvolňování kovových komponent totální náhrady z kosti. Tomu je nutno předem zabránit ještě před samotným operačním výkonem, tím že ještě před operačním výkonem nejprve situaci předem nasimulujeme při různých situacích, např. v případě kolenního kloubního systému u pacienta reálnou situaci ověřujeme při aplikaci různých axiálních úchylek a následně v průběhu samotného operačního výkonu se ověřuje nejlepší návrh z řídicího zařízení navigované operační techniky, který se snažíme podle výsledků navrženého postupu matematické simulace dále vylepšit.

V této studii navrhovaný přístup počítá s matematickou simulací (kvazi-) staticky resp. dynamicky zatěžovaného kloubního systému - kyčelního resp. kolenního, v návaznosti na určení geometrie skeletu odvozeného na základě snímaných bodů na skeletu a virtuálního skeletu v řídicím zařízení navigované operační techniky v průběhu navigovaného operačního zákroku. Dodržení správného napětí měkkých tkání zajišťující vyváženost ve všech částech kloubu a především dodržení osových poměrů ve smyslu zachování resp. obnovení zátěže v mechanické ose dolní končetiny je pro životnost totálních náhrad kolenních kloubů zcela zásadním požadavkem, který musí zachovávat i matematický model. Podobně je tomu i u kyčelního kloubu. Navrhovaná metodika předpokládá, že po sejmutí bodů na vyšetřované části skeletu a následném vygenerování geometrie skeletu pacienta se vytvoří matematický model, pomocí kterého se analyzuje správnost navrhovaného operačního postupu navigované operační techniky. Vytvořený matematický model bude analyzován numericky, jehož algoritmus bude založen na kontaktní úloze teorie lineární pružnosti, vazko-pružnosti s krátkou resp. dlouhou pamětí, nebo nelineární



Obrázek 2.5: a),b) vymezení mechanické osy končetiny, b),c),d) vymezení resekované plochy

pružnosti a metodě konečných prvků. Přitom zatěžovací síly v modelu budou simulovat zatěžování vyšetřovaného kloubního systému v okolí 16té fáze kroku. Vhodné numerické algoritmy, řešící matematické modely kontaktních úloh, by měly být zabudovány do systému obecných algoritmů navigované operační techniky. Aplikace navrhované metodiky závisí však na umožnění přístupu k datům z řídicí jednotky navigované operační techniky, tj. ke geometrii vyšetřované části skeletu a návrhu resekované části skeletu.

Následně bude na operátovi, aby posoudil, zda návrh operačního postupu z řídicí jednotky navigované operační techniky souhlasí s jeho představami, a pokud ne, pak musí požadovat opravu navrhovaného postupu a vytvořit nový matematický model např. kolenního kloubního systému s opravenou axiální úchylnou a analyzovat napjatostní poměry ve vyšetřovaném kloubním systému. Pouze důsledná analýza napjatostních poměrů v kloubním systému umožní operátovi posoudit správnost navrhovaného operačního postupu.

Metodika popsaná v dalších částech studie umožňuje numerickou analýzu napjatosti ve studovaném kloubním systému při dynamickém resp. kvazistatickém zatěžování kloubního systému. Matematickou simulaci navigované operační techniky podstatně komplikuje změna polohy vyšetřovaného kloubního systému během operace v čase, což není náplní této studie.

Na základě platných zákonů biomechaniky, informací o geometrii studované části skeletu, stanovené reologii, stavu chování studované části skeletu v daném prostoru a počátečním čase pak můžeme odvodit matematický model, který je založen na řadě intuitivních kroků, které bohužel nikdy nemůžeme ověřit. Navíc i získaná vstupní data můžeme určit pouze s jistou nepřesností, danou možnostmi současných měření materiálových parametrů kostní, chrupavčité a vazivové tkáně a jejich geometrie. Odvodíme-li matematický model včetně okrajových a počátečních podmínek, charakterizujících vlivy okolí v prostoru a čase na vyšetřovanou část skeletu, můžeme analyzovat matematický model v jeho spojitě i diskrétní podobě a tedy dokázat existenci a případně i jednoznačnost řešení spojitě a diskrétní úlohy, konvergenci diskrétní úlohy k přesnému řešení studované úlohy, jakož i konvergenci užitých numerických metod a algoritmů. Vzhledem k nepřesným (nejistým) vstupním datům s nimiž vstupujeme do modelu musíme se ptát i na přesnost obdržných výsledků.

Obecně lze modelovat lidské klouby za použití různých reologií, počínaje lineární pružností až po vazko-pružné a nelineární reologie.

V současné době je výzkum zaměřen na hledání vhodných reologií použitelných pro vytvoření nejlepšího matematického modelu, základní matematická analýza navržených matematických modelů a hledání optimálního algoritmu řešení modelové úlohy a optimálních konečně prvkových sítí. Důležitost optimálních algoritmů je evidentní, neboť v průběhu navigovaného operačního zákroku čas je jedním z důležitých faktorů úspěšnosti operace.

Reologie a konstitutivní vztahy

Nechť studovaná oblast lidského kloubu v nedeformovaném stavu zaujímá oblast $\Omega = \bigcup_{\iota=1}^r \Omega' \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$. Budeme předpokládat, že oblast Ω je ohraničena dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\tau \cup \Gamma_c \cup \Gamma_0$, kde $\Gamma_u = {}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u$ označuje hranici, kde část studovaného skeletu je upevněna, zatímco na druhé části této hranice je předepsáno posunutí, což se s výhodou užívá při modelování operačních postupů při osteotomii. Dále nechť $\Gamma_\tau = {}^1\Gamma_\tau \cup {}^2\Gamma_\tau$ je část hranice, kde studovaná část skeletu je zatěžována resp. je bez zatížení a dále nechť Γ_c označuje kontaktní hranici mezi oběma částmi kloubu které jsou v kontaktu. V některých studovaných případech, např. horních končetin spolu s pávní se s výhodou za předpokladu, že pánev je symetrická, může studovat pouze polovina studované oblasti. Hranici symetrie potom označíme symbolem Γ_0 . Nechť $t \in I \equiv (0, t_p)$, $t_p > 0$, označuje ještě časový interval, kde t_p je celkový čas ve kterém ve studovaném kloubu či jeho náhradě probíhají všechny biomechanické procesy. Dále ještě budeme předpokládat, že se zatěžovací síly obecně mění s časem.

Pohyb studovaného kloubního systému je popsán pohybovou rovnicí

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i, i = 1, \dots, N, N = 2, 3, \quad (2.1)$$

kde f_i jsou objemové síly, $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ jsou složky vektoru rychlosti, u_i jsou složky vektoru posunutí, τ_{ij} je tensor napětí a ρ je hustota. Jelikož lidský kloub je v konstantním tíhovém poli, potom můžeme účinek gravitačních sil zanedbat.

V případě viskoelastického materiálu s krátkodobou pamětí vztah mezi napětím a přetvořením (malou deformací) je dán vztahem

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}, t) = c_{ijkl}^{(0)} e_{kl}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + c_{ijkl}^{(1)} \frac{\partial e_{kl}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Napětí v tomto případě závisí pouze na deformaci v čase t a v čase těsně předcházejícím času t . Koeficienty $c_{ijkl}^{(0)}$ jsou koeficienty pružnosti a koeficienty $c_{ijkl}^{(1)}$ jsou koeficienty viskozity a splňují podmínky

$$c_{ijkl}^{(0)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq \alpha \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad c_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq \alpha_1 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha_1 > 0 \quad (2.3)$$

a podmínky symetrie

$$\begin{aligned} c_{ijkl}^{(0)} &= c_{jikl}^{(0)} = c_{klij}^{(0)} = c_{ijlk}^{(0)}, \\ c_{ijkl}^{(1)} &= c_{jikl}^{(1)} = c_{klij}^{(1)} = c_{ijlk}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

V případě izotropního materiálu

$$\begin{aligned} c_{ijkl}^{(0)} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \\ c_{ijkl}^{(1)} &= \nu \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \end{aligned}$$

kde λ , μ jsou Lamého parametry, ν , η - koeficienty viskozity.

V případě viskoelastických materiálů s dlouhodobou pamětí je vztah mezi napětím a přetvořením dán vztahem

$$\tau_{ij}^e(\mathbf{x}, t) = c_{ijkl}^{(0)} e_{kl}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t b_{ijkl}(t - \tau) e_{kl}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \quad (2.5)$$

kde $c_{ijkl}^{(0)}$ jsou koeficienty elasticity, $b_{ijkl}(x, t)$ charakterizují vlastnosti materiálu s pamětí - jsou “paměť materiálu”. Koeficienty $c_{ijkl}^{(0)}$ splňují podmínky symetrie (2.4) a $c_{ijkl}^{(0)} e_{ij} e_{kl} \geq c e_{ij} e_{ij}$, koeficienty viskozity b_{ijkl} splňují podmínky symetrie a podmínky regularity

$$\begin{aligned} b_{ijkl} &= b_{jikl}, \\ b_{ijkl}, \partial b_{ijkl} / \partial t, \partial^2 b_{ijkl} / \partial t^2 &\in L^\infty(\Omega \times I). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Většinou v praktických úlohách “paměť” ubývá exponenciálně k nule s časem.

A právě materiály s dlouhodobou pamětí by byly velmi výhodné pro implantáty umělých kloubů, dřívků endoprotéz bez cementování.

Tepelná napětí jsou definována vztahem

$${}^T \tau_{ij} = -\beta_{ij}(T - T_0), \quad (2.7)$$

kde β_{ij} je koeficient tepelné roztažnosti, jenž je omezený a symetrický, T, T_0 jsou skutečné a počáteční teploty.

Vztah mezi napětím a deformací ve vazko-pružné reologii je dán vztahem

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^e + {}^T \tau_{ij}. \quad (2.8)$$

Okrajové a kontaktní podmínky

Z anatomických a svalových analýz vyplývá, že lidské klouby jsou během pohybu zatěžovány a jejich části jsou ve vzájemném kontaktu. Působící zatěžovací síly jsou funkcí prostorových souřadnic a času.

Matematickým modelováním okrajových podmínek lze simulovat biomechanické procesy probíhající v lidském kloubu. Je-li kostní tkáň upevněna, potom posunutí jsou nulová, nenulovými posunutími např. simulujeme operační postup při osteotomii. O teplotě na hranicích Γ_u a Γ_τ budeme předpokládat, že je daná a rovná tělesné teplotě. Potom okrajovou podmínku vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, t) &= T_1(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) (\neq 0 \text{ nebo } = 0) \quad \text{na } ({}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u) \times I, \text{ meas } {}^i\Gamma_u \geq 0, i = 1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

V některých případech je výhodné okrajovou podmínku definovat jako podmínku popisující odvod tepla okolní krví.

Svalová tkáň vyvolává v úponech šlachové síly, které se přes úpony přenášejí na kostní tkáň. Abychom mohli správně simulovat funkci přirozeného kloubu a funkci jeho umělé náhrady, musíme přesně znát fyziologické rozmístění úponů na kostní tkáni, absolutní velikosti sil v těchto místech působících, jakož i směr jejich působení. Potom tyto svalové (šlachové) síly jsou zatěžovacími povrchovými silami. Okrajovou podmínku potom vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, t) &= T_1(\mathbf{x}, t), \\ \tau_{ij} n_j &= P_i (\neq 0 \text{ resp. } = 0) \quad \text{na } ({}^1\Gamma_\tau \cup {}^2\Gamma_\tau) \times I, \text{ meas } {}^i\Gamma_\tau > 0, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Vzniká otázka jaké podmínky platí v dynamicky zatěžovaném pohyblivém se resp. staticky zatěžovaném nepohyblivém se kloubu resp. jeho umělé totální náhradě. Zatím se počítalo zatížení jamky acetabula a femuru a jejich náhrad zvlášť zatěžovaných výslednicí sil působící ve vertikálním směru,

kteřá u kyčelního kloubu prochází středem hlavice a středem zatěžované plochy acetabula. Při sklonu zatěžované plochy od horizontály dochází k porušení biomechanické rovnováhy a podle sklonu plochy k migraci hlavice laterálně nebo mediálně. Debrunner (1975) uvažuje navíc vliv geometrických poměrů v oblasti kyčle na namáhání tohoto kloubu a poukazuje na vztah mezi počátkem abduktorového svalstva ke kyčelnímu kloubu. V r. 1986 Karas tento model ještě zlepšil, když kromě hmotnosti těla uvažoval i dynamické zatížení způsobené setrvačnými účinky těla při chůzi a vliv hlavních svalových skupin abduktorů a adduktorů. Problematika simulace funkce přirozeného i umělého kloubu je však značně složitější a musí se řešit komplexněji, neboť jednotlivé klouby na horní či dolní končetině jsou v kloubním pouzdře v kontaktu. Těmto podmínkám říkáme kontaktní podmínky.

Kontaktními podmínkami rozumíme podmínky popisující procesy na hranici kontaktu pomocí normálových napětí τ_n resp. tečných napětí τ_t a normálových posunutí u_n resp. tečných posunutí \mathbf{u}_t resp. rychlostí v_n resp. $\mathbf{v}_t = \mathbf{u}'_t$, kde $\mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$. Tyto podmínky mohou být formulovány jako nelineární rovnosti nebo nerovnosti. V jejich důsledku pak řešené úlohy vedou na variační rovnice nebo variační nerovnice.

Buď $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2) = (-n_2, n_1)$ v 2D případě a $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ v 3D případě vnější normála resp. jednotkový tečný vektor, dále označme $\tau_i = \tau_{ij}n_j$ vektor napětí, jeho normálovou a tečnou složku $\tau_n = \tau_i n_i = \tau_{ij}n_j n_i$, $\tau_t = \tau - \tau_n \mathbf{n}$ a normálové a tečné složky vektoru posunutí $u_n = u_i n_i$, $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - u_n \mathbf{n}$, resp. vektoru rychlosti $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - v_n \mathbf{n}$. Dále označme $\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^l, T^k, T^l$ (indexy k, l označují sousední komponenty kloubu resp. jeho umělé totální náhrady) jsou posunutí a teploty v sousedních komponentách kloubu resp. jejich umělých náhrad. Všechny veličiny jsou funkcemi času.

V případě, že kontaktní plochy jsou během zatěžování kloubu resp. během pohybu zatěžovaného kloubu neustále v kontaktu, potom normálové složky posunutí resp. rychlosti jsou nulové tj. $u_n = 0$ resp. $v_n = 0$ a tečná složka napětí je buď nulová nebo nenulová, tj. $\tau_n = 0$ resp. $\tau_n \neq 0$ a hovoříme o oboustranných kontaktních podmínkách. Tyto podmínky popisují normálně zatížený kloubní systém s nebo bez synoviálního mazání.

Jiným typem kontaktních podmínek jsou jednostranné kontaktní podmínky Signoriniho typu s nebo bez tření. V tomto případě během deformačního procesu komponenty lidského kloubu body kontaktu mění svoji polohu, ale komponenty kloubu se vzájemně nepronikají, tj.

$$u_n^k - u_n^l \leq 0 \text{ v posunutích resp. } v_n^k - v_n^l \leq 0 \text{ v rychlostech,} \quad (2.11)$$

kde kladný směr vnější normály k hranici kontaktu \mathbf{n} je chápán k oblasti Ω^k , tvořené k -tou složkou vyšetřovaného kloubního systému. Podmínka v rychlostech platí pouze pro krátké časové intervaly a $u_n^k - u_n^l = 0$ v čase $t = 0$ (Eck et al. (2005)).

Pro kontaktní síly z principu akce a reakce plyne

$$\tau_n^k(\mathbf{x}, t) = \tau_n^l(\mathbf{x}, t) = \tau_n(\mathbf{x}, t), \quad \tau_t^k(\mathbf{x}, t) = \tau_t^l(\mathbf{x}, t) = \tau_t(\mathbf{x}, t).$$

Jelikož normálové složky nemohou být kladné t.j. nemohou být tahovými silami, potom

$$\tau_n(\mathbf{x}, t) = \tau_n^k(\mathbf{x}, t) = \tau_n^l(\mathbf{x}, t) \leq 0 \quad \text{v čase } t. \quad (2.12)$$

Během deformačního procesu obě kolidující části kloubního systému jsou buď v kontaktu tj. $u_n^k - u_n^l = 0$ v posunutích nebo $v_n^k - v_n^l = 0$ v rychlostech nebo nejsou v kontaktu tj. $u_n^k - u_n^l < 0$ v posunutích nebo $v_n^k - v_n^l < 0$ v rychlostech. Odtud

$$(u_n^k - u_n^l)\tau_n^k \leq 0 \text{ v posunutích nebo } (v_n^k - v_n^l)\tau_n^k \leq 0 \text{ v rychlostech.} \quad (2.13)$$

Rovnice (2.11)-(2.13) jsou tzv. **Signoriniho podmínky**. V některých případech uvažujeme mezeru (gap) g mezi kolidujícími komponentami kloubního systému, měřené podél vnější normály, jehož vymezení je dáno funkcí kloubního pouzdra.

Jestliže obě kloubní komponenty jsou v kontaktu, pak nutně na kontaktní hranici Γ_c^{kl} působí tření v Coulombově smyslu a tedy na kontaktní ploše působí třecí síly $g_c = \mathcal{F}_c |\tau_n|$, jež v absolutní hodnotě jsou úměrné absolutní hodnotě působících normálových sil. Koeficientem úměrnosti je Coulombův koeficient tření \mathcal{F}_c . Vzhledem k působícím silám a třecím silám mohou nastat následující případy:

Jestliže absolutní hodnota tečných sil $\tau_t(\mathbf{x}, t)$ je menší než třecí síly $g_c = \mathcal{F}_c|\tau_n|$, potom třecí síly zabrání vzájemnému pohybu obou kloubních komponent. Jestliže však tečné síly $\tau_t(\mathbf{x}, t)$ v absolutní hodnotě jsou aspoň rovny třecím silám, potom není sil, které by zabránily vzájemnému posunutí obou kloubních komponent. Tedy body kontaktu mění svoji pozici v opačném směru než působí tečné síly. Celou situaci popisují následující podmínky:

$$\begin{aligned}
& |\tau_t(\mathbf{x}, t)| \leq g_c(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_c(\mathbf{x}, t)|\tau_n(\mathbf{x}, t)| \quad \text{v čase } t \in \langle 0, t_p \rangle \\
& \text{jestliže } u_n^k(\mathbf{x}, t) - u_n^l(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ potom} \\
& \text{jestliže } |\tau_t(\mathbf{x}, t)| < g_c(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_c(\mathbf{x}, t)|\tau_n(\mathbf{x}, t)| \text{ potom} \\
& \partial/\partial t(\mathbf{u}_t^k(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_t^l(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad \text{v čase } t \in \langle 0, t_p \rangle, \\
& \text{což znamená, že třecí síly jsou dostatečné k tomu, aby zabránily vzájemnému} \\
& \text{posunutí kloubních komponent.} \\
& \text{Jestliže } |\tau_t(\mathbf{x}, t)| = g_c(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_c(\mathbf{x}, t)|\tau_n(\mathbf{x}, t)| \text{ potom existuje taková funkce} \\
& \Theta \geq 0, \text{ že } \partial/\partial t(\mathbf{u}_t^k(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_t^l(\mathbf{x}, t)) = -\Theta\tau_t(\mathbf{x}, t) \quad \text{v čase } t \in \langle 0, t_p \rangle, \\
& \text{což znamená, že třecí síly již nemohou zabránit vzájemnému posunu} \\
& \text{obou kloubních komponent.}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Prostor mezi oběma kloubními komponentami je vyplněn synoviální kapalinou, která jednak díky svým vynikajícím viskózním vlastnostem snižuje tření na kontaktní ploše, jednak přenáší tepelné poměry v kloubu. Potom na kontaktní ploše mezi kloubními komponentami jsou teplota i tepelný tok spojitě, t.j.

$$T^k(\mathbf{x}, t) = T^l(\mathbf{x}, t), \kappa_{ij} \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} n_{j|(k)} = -\kappa_{ij} \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} n_{j|(l)}. \tag{2.15}$$

V případě nulového tření vyplývá, že tečné složky jsou nulové t.j.

$$\tau_t^k(\mathbf{x}, t) = \tau_t^l(\mathbf{x}, t) = \tau_t(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{2.16}$$

K tomu přistupují ještě počáteční podmínky

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \tag{2.17}$$

Ve stacionárním případě přejdou kontaktní podmínky do tvaru

$$\begin{aligned}
& u_n^k - u_n^l \leq 0, \quad \tau_n \equiv \tau_n^k = \tau_n^l \leq 0, \quad (u_n^k - u_n^l)\tau_n = 0, \\
& |\tau_t(\mathbf{x})| \leq g_c(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_c(\mathbf{x})|\tau_n(\mathbf{x})|, \\
& \text{jestliže } u_n^k - u_n^l = 0, \text{ v případě, že} \\
& |\tau_t(\mathbf{x})| < g_c(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_c(\mathbf{x})|\tau_n(\mathbf{x})|, \text{ potom } \mathbf{u}_t^k(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_t^l(\mathbf{x}) = 0, \\
& \text{což znamená, že třecí síly zabrání vzájemnému posunutí kloubních komponent,} \\
& \text{jestliže } |\tau_t(\mathbf{x})| = g_c(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_c(\mathbf{x})|\tau_n(\mathbf{x})|, \text{ potom existuje taková funkce} \\
& \Theta \geq 0, \text{ že } \mathbf{u}_t^k(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_t^l(\mathbf{x}) = -\Theta\tau_t(\mathbf{x}), \text{ což znamená, že třecí síly již nezabrání} \\
& \text{vzájemnému posunu obou kloubních komponent.}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Podmínky na kontaktu můžeme psát také v rychlostech se zobecněným tvarem Coulombova zákona ve tvaru

$$\begin{aligned}
& u_n^k - u_n^l \leq 0, \quad \tau_n^k(\mathbf{u}^k) = \tau_n^l(\mathbf{u}^l) \equiv \tau_n^{kl}(\mathbf{u}) \leq 0, \\
& (u_n^k - u_n^l)\tau_n^{kl}(\mathbf{u}) = 0, \\
& \mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l = 0 \implies |\tau_t^{kl}(\mathbf{u})| \leq \mathcal{F}_c^{kl}(0) |\tau_n^{kl}(\mathbf{u})|, \\
& \mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l \neq 0 \implies |\tau_t^{kl}(\mathbf{u})| = -\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_t') |\tau_n^{kl}(\mathbf{u})| \frac{\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l}{|\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l|},
\end{aligned} \quad \text{na } \Gamma_c^{kl} \times I, \tag{2.19}$$

resp. v posunutích se zobecněným tvarem Coulombova zákona ve tvaru

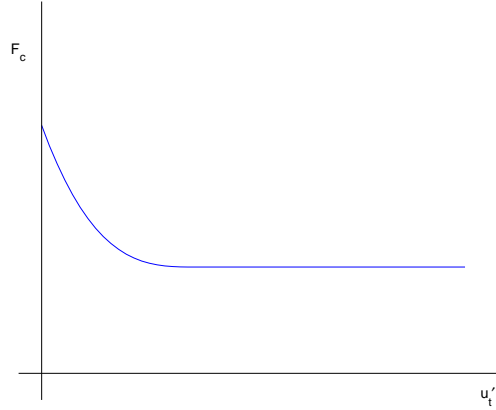
$$\begin{aligned}
u_n^k - u_n^l &\leq 0, \quad \tau_n^k(\mathbf{u}^k) = \tau_n^l(\mathbf{u}^l) \equiv \tau_n^{kl}(\mathbf{u}) \leq 0, \\
(u_n^k - u_n^l) \tau_n^{kl}(\mathbf{u}) &= 0, \\
\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l = 0 &\implies |\tau_t^{kl}(\mathbf{u})| \leq \mathcal{F}_c^{kl}(0) |\tau_n^{kl}(\mathbf{u})|, \\
\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l \neq 0 &\implies |\tau_t^{kl}(\mathbf{u})| = -\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_t) |\tau_n^{kl}(\mathbf{u})| \frac{\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l}{|\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l|},
\end{aligned}
\quad \text{na } \Gamma_c^{kl} \times I. \quad (2.20)$$

Koeficient Coulombovského tření $\mathcal{F}_c^{kl} \equiv \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{u}')$ je globálně omezený, nezáporný a splňuje Ca-rathéodoryho podmínky, tj. $\mathcal{F}_c^{kl}(\cdot, \mathbf{v})$ je měřitelná pro všechna $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$, a $\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{x}, \cdot)$ je spojitá pro s.v. $\mathbf{x} \in \Gamma_c^{kl}$ a má kompaktní nosič

$$\mathcal{SF}_c \equiv \sup_{\mathbf{x}} \text{p}(\mathcal{F}_c) = \overline{\{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_c(t) = \Gamma_c \times I \mid \exists \mathbf{u}'_t \quad \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{u}'_t) \neq 0\}}. \quad (2.21)$$

Koeficient tření může záviset na prostorové proměnné \mathbf{x} a na tečné složce rychlosti \mathbf{u}'_t (viz obr. 6). Podobný průběh je i v závislosti na tečné složce posunutí \mathbf{u}_t .

V ortopedii je však zájem, aby tření mezi kloubními komponentami přirozeného i umělého kloubu bylo co nejmenší, aby nemohlo docházet k “zadírání” kloubu nebo jeho umělé náhrady. Na tomto místě je třeba připomenout, že dojde-li k částečnému uvolnění endoprotézy, potom na uvolněné části endoprotézy jsou splněny podmínky (2.11)-(2.13), (2.14) a podmínky (2.15).



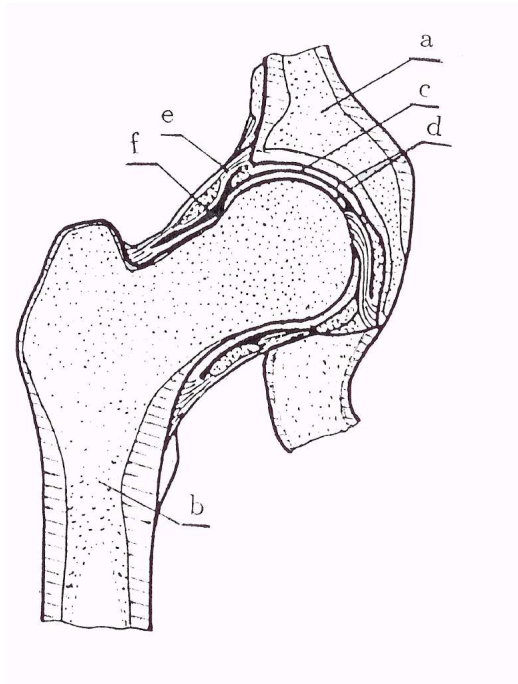
Obrázek 2.6: Závislost koeficientu Coulombovského tření \mathcal{F}_c na tečné složce rychlosti \mathbf{u}'_t

Při statickém zatížení endoprotézy, ukotvené až k límečku při tlakové síle 2500 N, která se považuje za optimální při zatěžování náhrady kyčelního kloubu, je pružná deformace krčku cca 0.2 mm ve směru působící síly. Při zatížení tlakovou silou přesahující 2500 N dochází již k trvalé deformaci (k plastické deformaci). Jiné poměry jsou u endoprotézy jen částečně ukotvené. V tomto případě k trvalé deformaci dochází při zatížení nižší tlakovou silou. Z těchto poznámek vidíme, že lepší výsledky simulace funkce přirozeného a umělého kloubu obdržíme, budeme-li kostní tkáň a materiály kloubní náhrady modelovat viskoelastickými, v případě zmíněné plastické deformace plastickými materiály.

Materiály viskoelastické jsou materiály s “pamětí” a to buď s pamětí krátkodobou nebo dlouhodobou, v tom smyslu, že stav napjatosti v čase t závisí od všech deformací, kterými prošel materiál v minulosti.

V první části studie ukážeme dva z analyzovaných matematických modelů, založený na lineární (termo-)vazko-pružnosti s krátkou a dlouhou pamětí při dynamickém resp. kvazi-statickém zatěžování. Ukážeme, že matematický model kyčelního a kolenního kloubu v lineární (termo-)pružnosti je speciálním případem studovaného modelu v (termo-)vazko-pružné reologii s dlouhou pamětí a podobně i s krátkou pamětí. V druhé části studie budeme vyšetřovat model, založený na speciální nelineární pružnosti.

Pro ujasnění studovaných modelových úloh v následujících odstavcích ukážeme geometrii matematického modelu kyčelního kloubu a kolenního kloubu (obr. 7 a 8).



Obrázek 2.7: Matematický model kyčelního kloubu a - pánev (oblast Ω^1), b - femur (oblast Ω^2), c - kontaktní plocha mezi kloubní jamkou a hlavicí kyčelního kloubu (označení Γ_c^{34}), d - chrupavky (oblasti Ω^3, Ω^4), e - kloubní pouzdro (oblast Ω^5), f - kloubní dutina (možno zanedbat)

2.2 Matematický model kyčelního a kolenního kloubu založený na modelové kontaktní úloze v lineární (termo-)vazko-pružnosti s krátkou pamětí

Úvod

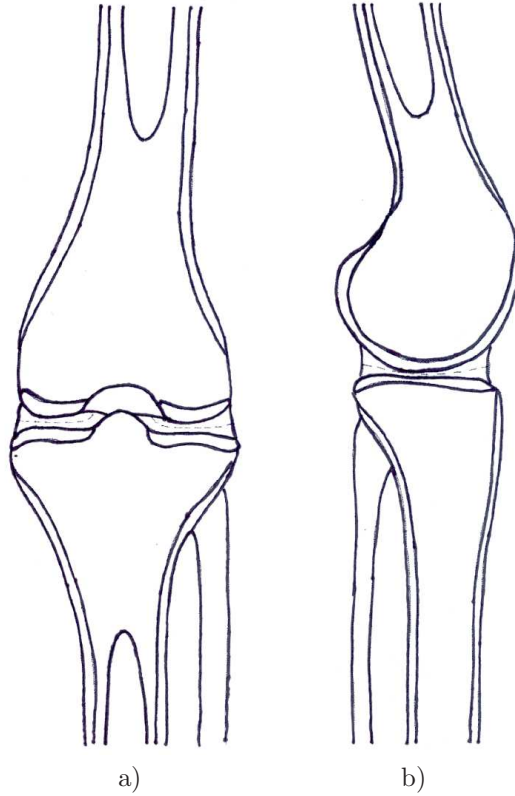
Kloubní systémy jsou tvořeny systémem elementů skeletu, jejichž funkcí je pasivní zprostředkování přenosu akčních sil na okolí. Tvoří pohyblivý a nosný základ pro uchycení svalů, vazů a povázek. Hlavní funkcí systému kosterních svalů je aktivní silové působení a produkce aktivního mechanického výkonu. Hlavní funkcí systému mezilehlých prvků, spojující segmenty těla vazivem, chrupavkou, kostí, kloubem a jež spojuje svaly se segmenty šlachou, je mechanické spojení mezi částmi systému.

V této kapitole budeme studovat dynamickou kontaktní úlohu několika N -dimensionálních těles, které jsou ve vzájemném kontaktu, s Coulombovským třením na kontaktních plochách a s útlumem, kterým modelujeme vliv svalových, šlachových a vazivových struktur. Uvažovat budeme případ, kdy na obou částech kloubního systému jsou předepsána posunutí.

Reologie, formulace úlohy

Nechť $I = (0, t_p)$ je časový interval a nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, je systém oblastí, který zaujímá systém těles libovolných tvarů Ω^l takové, že $\Omega = \cup_{l=1}^s \Omega^l$. Nechť Ω^l má Lipschitzovskou hranici $\partial\Omega^l$ a nechť $\partial\Omega = \Gamma_\tau \cup \Gamma_u \cup \Gamma_c \cup \mathcal{R}$, kde disjunktí části $\Gamma_\tau, \Gamma_u, \Gamma_c$ jsou otevřené podmnožiny a \mathcal{R} je míry nula. Nechť $\Gamma_u = {}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u$ a $\Gamma_c = \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$, $\Gamma_c^{kl} = \partial\Omega^k \cap \partial\Omega^l$, $k \neq l$, $k, l \in \{1, \dots, s\}$. Označme $Q = I \times \Omega$ časoprostorovou oblast a $\Gamma_\tau(t) = \Gamma_\tau \times I$, $\Gamma_u(t) = \Gamma_u \times I$, $\Gamma_c(t) = \Gamma_c \times I$ nechť označují části její hranice $\partial Q = \partial\Omega \times I$.

Označme \mathbf{n} vnější normálový vektor k hranici, $u_n = u_i n_i$, $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - u_n \mathbf{n}$, $\tau_n = \tau_{ij} n_j n_i$, $\tau_t = \tau - \tau_n \mathbf{n}$ normálové a tečné složky vektoru posunutí $\mathbf{u} = (u_i)$, $\tau = (\tau_i)$ a vektoru napětí $\tau_i = \tau_{ij} n_j$, $i, j = 1, \dots, N$. Buď \mathbf{F}, \mathbf{P} objemové a povrchové síly, ρ hustota, $\alpha(\mathbf{x}) \geq 0$ má fyzikálně význam útlumu. Časovou derivaci označme symbolem " ' ". Vektor rychlosti označme symbolem $\mathbf{u}' = (u'_k)$.



Obrázek 2.8: Matematický model kolenního kloubu a) řez ve frontální rovině, b) řez v sagitální rovině

Předpokládejme, že kladný směr vektoru vnější normály \mathbf{n} na Γ_c^{kl} je vztažen k oblasti Ω^k .

Vztah mezi napětím a deformací je dán Hookeovým zákonem

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \tau_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = c_{ijkl}^{(0)}(\mathbf{x})e_{kl}(\mathbf{u}) + c_{ijkl}^{(1)}(\mathbf{x})e_{kl}(\mathbf{u}'), \\ e_{ij}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j, k, l = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{2.22}$$

kde $c_{ijkl}^{(n)}(\mathbf{x})$, $n = 0, 1$, jsou elastické a vazké koeficienty a $e_{ij}(\mathbf{u})$ jsou složky tenzoru malé deformace, N je dimenze vyšetřovaného prostoru. Elastické a vazké koeficienty $c_{ijkl}^{(n)}(\mathbf{x})$, $n = 0, 1$, splňují podmínky

$$\begin{aligned}c_{ijkl}^{(n)} &\in L^\infty(\Omega), \quad n = 0, 1, \\ c_{ijkl}^{(n)} &= c_{jikl}^{(n)} = c_{klij}^{(n)} = c_{ijlk}^{(n)}, \\ c_{ijkl}^{(n)}e_{ij}e_{kl} &\geq c_0^{(n)}e_{ij}e_{ij} \quad \forall e_{ij}, \quad e_{ij} = e_{ji} \text{ a pro s.v. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad c_0^{(n)} > 0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Opakující se indexy označují Einsteinovu sumaci od 1 do N .

V dalším budeme řešit následující úlohu, ve které se omezíme pouze na elastickou část zobecněné úlohy:

Úloha (\mathcal{P}): Necht $N = 2, 3$, $s \geq 2$. Hledáme vektorovou funkci $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times I \rightarrow \mathbb{R}$, splňující

$$\rho^\ell \frac{\partial^2 u_i^\ell}{\partial t^2} + \alpha^\ell \frac{\partial u_i^\ell}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell)}{\partial x_j} + F_i^\ell, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad \ell = 1, \dots, s, \quad (t, \mathbf{x}) \in Q^\ell = I \times \Omega^\ell,\tag{2.24}$$

$$\tau_{ij}^\ell = \tau_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{u}^{\ell'}) = c_{ijkl}^{(0)\ell}(\mathbf{x})e_{kl}(\mathbf{u}^\ell) + c_{ijkl}^{(1)\ell}(\mathbf{x})e_{kl}(\mathbf{u}^{\ell'}), \quad i, j, k, l = 1, \dots, N, \quad \ell = 1, \dots, s,\tag{2.25}$$

$$\tau_{ij}n_j = P_i, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in \Gamma_\tau(t) = I \times \cup_{\ell=1}^s (\Gamma_\tau \cap \partial\Omega^\ell),\tag{2.26}$$

$$u_i = u_{2i}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in {}^1\Gamma_u(t) = I \times \cup_{i=1}^s ({}^1\Gamma_u \cap \partial\Omega^i), \quad (2.27)$$

$$u_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad \text{on } {}^2\Gamma_u(t) = I \times \cup_{i=1}^s ({}^2\Gamma_u \cap \partial\Omega^i), \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} u_n^{ik} - u_n^{il} &\leq 0, \quad \tau_n^k = \tau_n^l \equiv \tau_n^{kl} \leq 0, \quad (u_n^{ik} - u_n^{il}) \tau_n^{kl} = 0, \\ \mathbf{u}_t^{ik} - \mathbf{u}_t^{il} &= 0 \implies |\tau_t^{kl}| \leq \mathcal{F}_c^{kl}(0) |\tau_n^{kl}|, \\ \mathbf{u}_t^{ik} - \mathbf{u}_t^{il} &\neq 0 \implies |\tau_t^{kl}| = -\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_t^{ik} - \mathbf{u}_t^{il}) \left| \tau_n^{kl} \right| \frac{\mathbf{u}_t^{ik} - \mathbf{u}_t^{il}}{|\mathbf{u}_t^{ik} - \mathbf{u}_t^{il}|}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$(t, \mathbf{x}) \in \Gamma_c(t) = I \times \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl},$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.30)$$

kde $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou dané funkce, \mathbf{u}_2 má časové derivace \mathbf{u}_2' , a $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$ splňují např. statickou kontaktní úlohu v lineární pružnosti s nebo bez Coulombovského tření \mathcal{F}_c^{kl} (viz např. Nečas, Hlaváček (1981), Nedoma (1983), (1987), (1998), Hlaváček et al. (1988), Haslinger et al. (1996)).

Koeficient Coulombovského tření $\mathcal{F}_c^{kl} \equiv \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{u}')$ je globálně omezený, nezáporný a splňuje Carathéodoryho podmínky a má kompaktní nosič $\mathcal{SF}_c \equiv \sup_{\mathbf{x}} p(\mathcal{F}_c)$ definovaný vztahem (2.21).

Variační formulace úlohy, aproximace pomocí penalty

Nechť $\Omega = \cup_{i=1}^s \Omega^i \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, je otevřená omezená podmnožina Euclidova prostoru \mathbb{R}^N , $N = 2, 3$, s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega = \cup_r \Gamma_r$ ($\in C^{1,1}$), $r = \tau, u, c$, $\mathbf{x} = (x_i)$, $i = 1, \dots, N$. Nechť $I = (0, t_p)$ je časový interval.

Prostory $L^2(M)$, $L^{2,N}(M) = [L^2(M)]^N$, $M = \Omega$ resp. Γ_r , $r = u, \tau, c$, $N = 2, 3$, Sobolevovy prostory $W^{k,2}(M)$, $M = \Omega$ resp. Γ_r , definujeme standardním způsobem, navíc položíme $W^{k,2}(M) \equiv H^k(M)$ a definujeme $[H^k(M)]^N \equiv H^{k,N}(M)$, $H^{0,N}(M) = L^{2,N}(M)$, a odpovídající normy označíme $\|\cdot\|_{k,N}$, skalární součin a duální součin symboly $(\cdot, \cdot)_{k,M}$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,M}$ (pro každé celé N). Duální prostor prostoru $H^{k,N}(M)$ označíme symbolem $(H^{k,N}(M))' = H^{-k,N}(M)$ a odpovídající normy $\|\cdot\|_{H^{-k,N}(M)} \equiv \|\cdot\|_{-k,N}$. Hodnoty na Γ_r pro funkce v $H^1(\Omega)$ mohou být interpretovány jako hodnoty jejich $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$ obrazu prostřednictvím lineárního, spojitého zobrazení stop. Norma topologického duálního prostoru $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$ je $\|u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r)} = \sup_{v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r)} \frac{\langle u, v \rangle_{-1/2, 1/2, \Gamma_r}}{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_r)}}$, kde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1/2, 1/2, \Gamma_r}$ označují duální

párování (“dual pairing”) mezi $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$ a $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$. Duální prostory označujeme symbolem “'”. Pro $\rho \neq 1, \alpha \neq 1$, $\rho, \alpha \in L^\infty(M)$ s $\rho \geq \rho_0 > 0$, $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ s.v. $\mathbf{x} \in M$, symbolem $(\cdot, \cdot)_{k,M}$ označujeme také skalární součin v prostorech $L^{2,N}(M)$ a symbolem $\|\cdot\|_{k,M}$ odpovídající normy.

Dále standardním způsobem zavedeme Bochnerovy prostory $L^2(I; X)$, $W^{k,2}(I; X)$, kde X jsou Hilbertovy prostory a Sobolevovy-Slobodetského prostory (viz Besov et al. (1975), Nečas (1967), Adams (1975)), pro které index k , $k > 0$, kde $k = [k] + \lambda$, $0 < \lambda < 1$, $[k]$ označuje celou část k a λ zbytek a kde norma je definována

$$\|u\|_{W^{k,2}(\Omega)}^2 = \|u\|_{W^{[k],2}(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=[k]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(\mathbf{x}) - D^\alpha u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N+2\lambda}} dx dy.$$

Zavedeme prostor $B(I; X)$ jako prostor omezených funkcí z I do X s normou $\|v\|_{B(I; X)} = \|v\|_{L^\infty(I; X)} = \sup_{t \in I} \|v(t)\|_X$.

Je-li $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$, $k_i > 0$ a $k_i = [k_i] + \lambda_i$, $0 \leq \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, N$, potom hovoříme o anisotropních prostorech. Je-li $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ potom první komponenta definuje hladkost s ohledem na časovou proměnnou a druhá komponenta pak regularitu s ohledem na prostorové proměnné.

Označme $H^{\gamma, 1, 1, N}(I \times \Omega)$, $0 < \gamma < 1$, anisotropní Sobolevův prostor odpovídající prostoru $I \times \Omega$ (dim N) s normou

$$\|v\|_{\gamma,1,1,Q}^2 = \|v\|_{L^2(Q)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|v(t_1, \cdot) - v(t_2, \cdot)\|_{0,N}^2}{|t_1 - t_2|^{1+2\gamma}} dt_2 dt_1,$$

kde označíme $L^2(Q) = L^2(I \times \Omega) = L^2(I; L^2(\Omega))$ Pro $\gamma, \beta \geq 0$ a interval I , zavedeme označení $H^{\gamma,\beta}(I \times M) = H^\gamma(I; L^2(M)) \cap L^2(I; H^\beta(M))$.

Pro analýzu úlohy budeme předpokládat:

Předpoklad 1: Nechť $N \geq 2$ a nechť $\Omega = \cup_{i=1}^s \Omega^i$ je omezená a spojitá množina s Lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_\tau \cup \Gamma_u \cup \Gamma_c \cup \mathcal{R}$, kde disjunktí části $\Gamma_\tau, \Gamma_u, \Gamma_c$ jsou otevřené podmnožiny a \mathcal{R} je množina míry nula. Nechť $\Gamma_u = {}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u$ a $\Gamma_c = \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$, $\Gamma_c^{kl} = \partial\Omega^k \cap \partial\Omega^l, k \neq l, k, l \in \{1, \dots, s\}$.

Nechť $I \in (0, t_p), t_p$ malé, je časový interval. Nechť $\Omega(t) = \Omega \times I$ a $\Gamma_\tau(t) = \Gamma_\tau \times I, \Gamma_u(t) = \Gamma_u \times I, \Gamma_c(t) = \Gamma_c \times I$ označují části její hranice $\partial\Omega(t) = \partial\Omega \times I$. Koeficienty $c_{ijkl}^{(n)}(\mathbf{u}), n = 0, 1$, splňují (2.23). Daná vstupní data splňují $\rho, \alpha \in C(\Omega), \mathbf{F}, \mathbf{F}' \in L^2(I; L^{2,N}(\Omega)), \mathbf{P}, \mathbf{P}' \in L^2(I; L^{2,N}(\Gamma_\tau)), \mathbf{u}_1 \in H^{1,N}(\Omega), u_{1n}^k - u_{1n}^l = 0$ na $\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}, \mathbf{u}_0 \in H^{1,N}(\Omega)$, koeficient tření $\mathcal{F}_c^{kl} \equiv \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_t^k)$ je omezený, nezáporný a splňuje Carathéodory podmínky.

Definujme množinu virtuálních posunutí a množinu přípustných posunutí

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in L^2(I; \prod_{i=1}^s H^{1,N}(\Omega^i)), \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_u(t), \\ &\quad v_n^k - v_n^l = 0 \text{ s.v. na } I \times \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}\}, \\ \mathcal{V} &= \mathbf{u}'_2 + \mathcal{V}_0, \\ \mathcal{K} &= \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in L^2(I; \prod_{i=1}^s H^{1,N}(\Omega^i)), \mathbf{v} = \mathbf{u}'_2 \text{ na } \Gamma_u(t), \\ &\quad v_n^k - v_n^l \leq 0 \text{ s.v. na } I \times \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}\}. \end{aligned}$$

Rovnici (2.24) vynásobme $\mathbf{v} - \mathbf{u}'$, kde \mathbf{v} jsou libovolné testovací funkce, integrujme přes $I \times \Omega$, potom užitím Greenovy věty, okrajových a kontaktních podmínek, dostáváme

Úloha $(\mathcal{P})_v$: hledáme vektorovou funkci \mathbf{u} s $\mathbf{u}' \in \mathcal{K} \cap B(I; L^{2,N}(\Omega))$ a $\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}'(0, \cdot) = \mathbf{u}_1$, takovou, že

$$\int_I \{(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + (\alpha \mathbf{u}'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + a^{(0)}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + a^{(1)}(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}'(t))\} dt \geq \int_I (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) dt \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \quad (2.31)$$

kde předpokládáme, že vstupní data $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$ splňují statickou lineární kontaktní úlohu (viz Nedoma (1983),(1987), Hlaváček, Nedoma (2002)) a kde jsme označili

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}'', \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^s (\mathbf{u}''^i, \mathbf{v}^i) = \int_\Omega \rho u_i'' v_i d\mathbf{x}, \\ (\alpha \mathbf{u}', \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^s (\alpha^i \mathbf{u}'^i, \mathbf{v}^i) = \int_\Omega \alpha u_i' v_i d\mathbf{x}, \\ a^{(n)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^s a^{(n)i}(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i) = \int_\Omega c_{ijkl}^{(n)} e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, n = 0, 1, \\ (\mathbf{f}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^s (\mathbf{f}^i, \mathbf{v}^i) = \int_\Omega F_i v_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\tau} P_i v_i ds, \\ j(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^s j^i(\mathbf{v}^i) = \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l) |\tau_n^{kl}(\mathbf{u}, \mathbf{u}')| |\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l| ds \equiv \\ &\equiv \langle \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l) | \tau_n^{kl}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') |, |\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l| \rangle_{\Gamma_c}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

a kde bilineární formy $a^{(n)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), n = 0, 1$, jsou symetrické v \mathbf{u}, \mathbf{v} a splňují $a^{(n)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_0^{(n)} \|\mathbf{u}\|_{1,N}^2, c_0^{(n)} = const. > 0, |a^{(n)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c_1^{(n)} \|\mathbf{u}\|_{1,N} \|\mathbf{v}\|_{1,N}, c_1^{(n)} = const. > 0, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0 = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \prod_{i=1}^s H^{1,N}(\Omega^i), \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_u = {}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u \text{ a } v_n^k - v_n^l = 0 \text{ s.v. na } \Gamma_c\}$.

Každé řešení $\mathbf{u} \in C^{2,N}(I \times \bar{\Omega})$ úlohy (2.24)-(2.30) je řešením úlohy (2.31) a naopak každé dostatečně hladké řešení $\mathbf{u} \in C^{2,N}(I \times \bar{\Omega})$ úlohy (2.31) je také řešením (2.24)-(2.30).

Existence řešení

Důkaz existence řešení je založen na technice penalizace a regularizace. Aplikace techniky penalizace vede na řešení kontaktní úlohy s bilaterální kontaktní podmínkou (normal compliance type). Kontaktní

podmínku (2.29a) nahradíme nelineární hraniční podmínkou $\tau_n^{kl}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = -\frac{1}{\delta} [u_n^k - u_n^l]_+$, $[\cdot]_+ := \max\{\cdot, 0\}$, $\delta > 0$. Potom řešíme následující úlohu:

Úloha $(\mathcal{P})_{vp}$: nalézt funkci \mathbf{u}_δ s $\mathbf{u}'_\delta \in (\mathbf{u}'_2 + \mathcal{V}_0) \cap B(I; L^{2,N}(\Omega))$ a $\mathbf{u}_\delta(0, \cdot) = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}'_\delta(0, \cdot) = \mathbf{u}_1$, takovou, že pro všechna $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ platí

$$\begin{aligned} & \int_I \{ (\mathbf{u}''_\delta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_\delta(t)) + (\alpha \mathbf{u}'_\delta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_\delta(t)) + a^{(0)}(\mathbf{u}_\delta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_\delta(t)) + \\ & + a^{(1)}(\mathbf{u}'_\delta(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_\delta(t)) + \left\langle \frac{1}{\delta} [u_{\delta n}^k - u_{\delta n}^l]_+, v_n^k - v_n^l - u_{\delta n}^k + u_{\delta n}^l \right\rangle_{I \times \Gamma_c} + \\ & + \left\langle \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_\delta^k - \mathbf{u}_\delta^l) [u_{\delta n}^k - u_{\delta n}^l]_+, |\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l| - |\mathbf{u}'_{\delta t}^k - \mathbf{u}'_{\delta t}^l| \right\rangle_{I \times \Gamma_c} \} dt \geq \\ & \geq \int_I (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_\delta(t)) dt, \end{aligned} \quad (2.33)$$

kde předpokládáme, že \mathbf{u}'_2 je možno rozšířit na celou oblast Ω .

V dalším kroku užijeme techniku regularizace. Funkcionál $j(\mathbf{v})$ není diferencovatelný v Gâteauxově smyslu, proto zavedeme funkci $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon,$$

kteřá regularizuje funkci $x \rightarrow |x|$. Funkce φ_ε je dvakrát diferencovatelná a splňuje následující nerovnost

$$||x| - \varphi_\varepsilon(|x|)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon \geq 0.$$

Potom budeme řešit následující penalizovanou a regularizovanou úlohu:

Úloha $(\mathcal{P}')_{vpr}$: nalézt $\mathbf{u}_{\delta\varepsilon}$ s $\mathbf{u}'_{\delta\varepsilon} \in \mathcal{V} \cap B(I; L^{2,N}(\Omega))$ a $\mathbf{u}_{\delta\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}'_{\delta\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x})$, takovou, že pro všechna $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, platí

$$\begin{aligned} & \int_I \{ (\mathbf{u}''_{\delta\varepsilon}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_{\delta\varepsilon}(t)) + (\alpha \mathbf{u}'_{\delta\varepsilon}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_{\delta\varepsilon}(t)) + a^{(0)}(\mathbf{u}_{\delta\varepsilon}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_{\delta\varepsilon}(t)) + \\ & + a^{(1)}(\mathbf{u}'_{\delta\varepsilon}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_{\delta\varepsilon}(t)) + \\ & + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} [u_{\delta\varepsilon n}^k(t) - u_{\delta\varepsilon n}^l(t)]_+ (v_n^k - v_n^l - (u_{\delta\varepsilon n}^k(t) - u_{\delta\varepsilon n}^l(t))) ds + \\ & + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_{\delta\varepsilon t}^k - \mathbf{u}_{\delta\varepsilon t}^l) [u_{\delta\varepsilon n}^k(t) - u_{\delta\varepsilon n}^l(t)]_+ \cdot \\ & \cdot (\varphi_\varepsilon(\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l) - \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}'_{\delta\varepsilon t}^k - \mathbf{u}'_{\delta\varepsilon t}^l)) ds \} dt \geq \int_I (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_{\delta\varepsilon}(t)) dt. \end{aligned}$$

A jelikož $\nabla \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l)(\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l - (\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l)) \leq \varphi_\varepsilon(\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l) - \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l)$ potom budeme řešit následující penalizovanou a regularizovanou úlohu:

Úloha $(\mathcal{P})_{vpr}$: nalézt $\mathbf{u}_{\delta\varepsilon}$ s $\mathbf{u}'_{\delta\varepsilon} \in \mathcal{V} \cap B(I; L^{2,N}(\Omega))$ a $\mathbf{u}_{\delta\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}'_{\delta\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x})$, takovou, že pro všechna $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_0$, platí

$$\begin{aligned} & \int_I \{ (\mathbf{u}''_{\delta\varepsilon}(t), \mathbf{v}) + (\alpha \mathbf{u}'_{\delta\varepsilon}(t), \mathbf{v}) + a^{(0)}(\mathbf{u}_{\delta\varepsilon}(t), \mathbf{v}) + a^{(1)}(\mathbf{u}'_{\delta\varepsilon}(t), \mathbf{v}) + \\ & + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} [u_{\delta\varepsilon n}^k(t) - u_{\delta\varepsilon n}^l(t)]_+ (v_n^k - v_n^l) ds + \\ & + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_{\delta\varepsilon t}^k - \mathbf{u}_{\delta\varepsilon t}^l) [u_{\delta\varepsilon n}^k(t) - u_{\delta\varepsilon n}^l(t)]_+ \cdot \\ & \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta\varepsilon t}^k - \mathbf{u}_{\delta\varepsilon t}^l)(\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l) ds \} dt = \\ & = \int_I (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}) dt. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Existence $\mathbf{u}_{\delta\varepsilon}$ se dokáže pomocí Faedo-Galerkinovy metody standardním postupem. Pro jednoduchost položme $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\delta\varepsilon}$. Sestrojíme Galerkinovu bázi $\{\mathbf{v}_i\}$ prostoru V_0 , takovou, že $V_m = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$, $\cup_{m=1}^\infty V_m$ je husté v V_0 . Položme

$$\mathbf{u}_m(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_2(t, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) \mathbf{v}_j(\mathbf{x}), \quad t \in I, \mathbf{x} \in \Omega, m \in \mathbb{N}.$$

Potom přibližné řešení řádu m splňuje systém obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{u}_m''(t), \mathbf{v}_j) + (\alpha \mathbf{u}_m'(t), \mathbf{v}_j) + a^{(0)}(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_j) + a^{(1)}(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{v}_j) + \\
& + \left\langle \frac{1}{\delta} [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+, v_{jn}^k - v_{jn}^l \right\rangle_{\cup \Gamma_c^{kl}} + \\
& + \int_{\cup \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_{mt}^k(t) - \mathbf{u}_{mt}^l(t)) [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+ \cdot \\
& \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}_{mt}^k(t) - \mathbf{u}_{mt}^l(t)) (\mathbf{v}_{jt}^k - \mathbf{v}_{jt}^l) ds = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_j) \quad j = 1, \dots, m, \text{ s.v. } t \in I,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

s počátečními podmínkami

$$\langle \mathbf{u}_m(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{v}_j \rangle_\Omega = 0, \langle \mathbf{u}_m'(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}_j \rangle_\Omega = 0. \tag{2.36}$$

Řešitelnost tohoto systému plyne z teorie systémů obyčejných diferenciálních rovnic. Globální existence plyne z apriorních odhadů.

Apriorní odhady:

Platí

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\cup \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_{mt}^k(t) - \mathbf{u}_{mt}^l(t)) [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+ \cdot \\
& \nabla \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}_{mt}^k(t) - \mathbf{u}_{mt}^l(t)) (\mathbf{v}_{jt}^k - \mathbf{v}_{jt}^l) ds dt \geq 0.
\end{aligned}$$

Pro limitní proces $m \rightarrow \infty$ Faedo-Galerkinova parametru potřebujeme vhodné apriorní odhady. Vynásobme (2.35) $c'_{mj}(t)$, sečteme přes j , integrujme přes $[0, t]$, $t \in I$, a položíme

$$\mathbf{u}'_m(t) - \mathbf{u}'_2(t) = \sum_{j=1}^m c'_{mj}(t) \mathbf{v}_j,$$

potom dostáváme

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \{ (\mathbf{u}_m''(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau)) + (\alpha \mathbf{u}_m'(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau)) + a^{(0)}(\mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau)) + \\
& + a^{(1)}(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{u}'_m(\tau)) + \left\langle \frac{1}{\delta} [u_{mn}^k(\tau) - u_{mn}^l(\tau)]_+, u_{mn}^k(\tau) - u_{mn}^l(\tau) \right\rangle_{\cup \Gamma_c^{kl}} + \\
& + \int_{\cup \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_{mt}^k(\tau) - \mathbf{u}_{mt}^l(\tau)) [u_{mn}^k(\tau) - u_{mn}^l(\tau)]_+ \cdot \\
& \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}_{mt}^k(\tau) - \mathbf{u}_{mt}^l(\tau)) (\mathbf{u}_{mt}^k(\tau) - \mathbf{u}_{mt}^l(\tau)) ds \} d\tau = \int_0^t \{ (\mathbf{f}(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau) - \mathbf{u}'_2(\tau)) + \\
& + (\mathbf{u}_m''(\tau), \mathbf{u}'_2(\tau)) + a^{(0)}(\mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_2(\tau)) + a^{(1)}(\mathbf{u}_m'(\tau), \mathbf{u}'_2(\tau)) \} d\tau.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Vzhledem k definici prostoru \mathcal{V} je $u_{2n}^k - u_{2n}^l = 0$ na $\cup \Gamma_c^{kl}$, a dále je $\mathbf{u}'_m(0) = \mathbf{u}_1$.

Jelikož $\nabla \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}_{mt}^k - \mathbf{u}_{mt}^l)(\mathbf{u}_{mt}^k - \mathbf{u}_{mt}^l) \geq 0$ (φ_ε je konvexní a má své minimum v 0) poslední člen na levé straně je ≥ 0 . Dále platí odhady:

$$\int_0^t (\mathbf{u}_m''(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau)) d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{1}{2} \|\mathbf{u}'_m(\tau)\|_{0,N}^2 d\tau = \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{u}'_m(t)\|_{0,N}^2 - \|\mathbf{u}_1\|_{0,N}^2 \right],$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t a^{(0)}(\mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau)) d\tau & \geq \frac{1}{2} c_0^{(0)} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{1,N}^2 - \frac{1}{2} c_0^{(0)} \|\mathbf{u}_0\|_{1,N}^2, \quad c_0^{(0)} = \text{const.} > 0, \\
\int_0^t a^{(1)}(\mathbf{u}_m'(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau)) d\tau & \geq c_0^{(1)} \int_0^t \|\mathbf{u}'_m(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau, \quad c_0^{(1)} = \text{const.} > 0,
\end{aligned}$$

jelikož $a^{(n)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_0^{(n)} \|\mathbf{u}\|_{1,N}^2$, $c_0^{(n)} = \text{const.} > 0$, $n = 0, 1$,

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (\alpha \mathbf{u}_m'(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau)) d\tau = \int_0^t \|\mathbf{u}'_m(\tau)\|_{0,N}^2 d\tau, \\
& \int_0^t \left\langle \frac{1}{\delta} [u_{mn}^k(\tau) - u_{mn}^l(\tau)]_+, u_{mn}^k(\tau) - u_{mn}^l(\tau) \right\rangle_{\cup \Gamma_c^{kl}} d\tau = \\
& = \int_0^t \frac{1}{\delta} \left\| [u_{mn}^k(\tau) - u_{mn}^l(\tau)]_+ \right\|_{0, \cup \Gamma_c^{kl}}^2 d\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (\alpha \mathbf{u}'_m(\tau), \mathbf{u}'_2(\tau)) d\tau \leq \left(\int_0^t \|\mathbf{u}'_m(\tau)\|_{0,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}'_2(\tau)\|_{0,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \left(\int_0^t \|\mathbf{u}'_m(\tau)\|_{0,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}'_2(t)\|_{0,1,Q}, \\
& \int_0^t (\mathbf{f}(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau) - \mathbf{u}'_2(\tau)) d\tau \leq \|\mathbf{f}(t)\|_{V'_0} \left[\left(\int_0^t \|\mathbf{u}'_m(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{u}'_2(t)\|_{0,1,Q} \right], \\
& \int_0^t (\mathbf{u}''_m(\tau), \mathbf{u}'_2(\tau)) d\tau = (\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}'_2(t)) - \int_0^t (\mathbf{u}'_m(\tau), \mathbf{u}''_2(\tau)) d\tau \leq \\
& \leq \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{0,N} \|\mathbf{u}'_2(t)\|_{0,N} + \|\mathbf{u}''_2(t)\|_{0,Q} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}'_m(\tau)\|_{0,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \\
& \int_0^t a^{(0)}(\mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_2(\tau)) d\tau \leq c_0^{(0)} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}'_2(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq c_1 (t_p)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^\infty(I; H^{1,N}(\Omega))} \|\mathbf{u}'_2(t)\|_{0,1,Q}. \\
& \int_0^t a^{(1)}(\mathbf{u}'_m(\tau), \mathbf{u}'_2(\tau)) d\tau \leq c_0^{(1)} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}'_2(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq c_0^{(1)} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_m(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}'_2(t)\|_{0,1,Q}.
\end{aligned}$$

Užitím dílčích výsledků, Kornovy nerovnosti a Gronwallova lematu, potom existuje konstanta C , nezávislá na Faedo-Galerkinově indexu m a parametrech δ a ε , taková, že platí

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^\infty(I; L^2, N(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^\infty(I; H^{1,N}(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{0,1,Q}^2 \\
& + \frac{1}{\delta} \left\| [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+ \right\|_{0, \Gamma_c(t)}^2 \leq C,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

což dokazuje existenci řešení $\mathbf{u}_m(t)$ pro všechna $t \in I$.

Dále platí

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|_{0,1,Q}^2 = \int_0^{t_p} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{1,N}^2 dt \leq t_p \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^\infty(I; H^{1,N}(\Omega))}^2 \leq t_p C_0 = C. \tag{2.39}$$

Při limitním procesu $m \rightarrow \infty$ Faedo-Galerkinova parametru m , kde ε, δ jsou pevná, kromě podposloupnosti $\{\mathbf{u}_{m_j}\}$, řešení Faedo-Galerkinovy rovnice, je třeba silné konvergence $\{\mathbf{u}'_{m_j}\}$ v $L^2(\Gamma_c(t))$ (resp. $L^2(\mathcal{S}\mathcal{F}_c)$). Existence takové podposloupnosti může být dosaženo pomocí věty o kompaktním vnoření pro Sobolevovy prostory (compact imbedding theorem) a také a priori odhady pro \mathbf{u}'_m .

Položme v (2.35) za testovací funkci $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)$ pro s.v. t , integrujme přes t v mezích od t_1 do t_2 , výsledek vynásobme výrazem $|t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)}$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ a potom integrujme přes t_1 a t_2 , $t_1 < t_2$, $0 < t_1 < t_p$, $0 < t_2 < t_p$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} \{ (\mathbf{u}''_m(t), \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} + \\
& + (\alpha \mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} + \\
& + a^{(0)}(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} + \\
& + a^{(1)}(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} + \\
& + \left\langle \frac{1}{\delta} [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+, u_{mn}^k(t_2) - u_{mn}^l(t_2) - u_{mn}^k(t_1) + u_{mn}^l(t_1) \right\rangle_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} + \\
& + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl} (\mathbf{u}_{mt}^k(t) - \mathbf{u}_{mt}^l(t)) [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+ \nabla \varphi_\varepsilon((\mathbf{u}_{mt}^k(t) - \mathbf{u}_{mt}^l(t))) \cdot \\
& \cdot (\mathbf{u}_{mt}^k(t_2) - \mathbf{u}_{mt}^l(t_2) - \mathbf{u}_{mt}^k(t_1) + \mathbf{u}_{mt}^l(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} ds) dt dt_2 dt_1 = \\
& = \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Podle Eck (1996), Eck et al. (2005) platí:

je-li $h(t) \in L^2(I; V)$, $w(t) \in L^2(I; W)$, kde V, W jsou Banachovy prostory a $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$ odpovídající normy, potom

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} \|h(t)\|_V \|w(t_2) - w(t_1)\|_W \cdot |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1 \leq \\
& \leq C(t_p, \gamma) \|h\|_{L^2(I; V)}^2 \|w\|_{L^2(I; W)}^2
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Bud' $H^{\frac{1}{2}-\gamma}$ -seminorma definovaná

$$|\mathbf{u}'_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))}^2 = \int_0^{t_p} \int_0^{t_p} \|\mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1)\|_{0,N}^2 |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt_2 dt_1. \quad (2.42)$$

Jelikož

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{u}''(t) dt = \mathbf{u}'(t_2) - \mathbf{u}'(t_1), \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{u}'(t) dt = \mathbf{u}(t_2) - \mathbf{u}(t_1), \quad (2.43)$$

potom

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} \{(\mathbf{u}''_m(t), \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1 = \\ & = \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \left\{ \|\mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1)\|_{0,N}^2 - (\mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1), \mathbf{u}'_2(t_2) - \mathbf{u}'_2(t_1)) \right\} \cdot \\ & \cdot |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt_2 dt_1, \\ & \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} \{(\alpha \mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1 = \\ & = \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \frac{1}{2} \left\{ \|\mathbf{u}_m(t_2) - \mathbf{u}_m(t_1)\|_{0,N}^2 - (\mathbf{u}_m(t_2) - \mathbf{u}_m(t_1), \mathbf{u}'_2(t_2) - \mathbf{u}'_2(t_1)) \right\} \\ & \cdot |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt_2 dt_1, \end{aligned} \quad (2.44)$$

Podle (2.41) s užitím Hölderovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} (\mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1), \mathbf{u}'_2(t_2) - \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt_2 dt_1 \right| \leq \\ & \leq \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \left| (\mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1), \mathbf{u}'_2(t_2) - \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} \right| dt_2 dt_1 \leq \\ & \leq \frac{1}{2} |\mathbf{u}'_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))} |\mathbf{u}'_2|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))}, \\ & \left| \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} (\mathbf{u}_m(t_2) - \mathbf{u}_m(t_1), \mathbf{u}'_2(t_2) - \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt_2 dt_1 \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} |\mathbf{u}_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))} |\mathbf{u}'_2|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dále

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} a^{(0)}(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1 \leq \\ & \leq - \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} c_0^{(0)} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{1,N} \left(\|\mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1)\|_{1,N} + \|\mathbf{u}'_2(t_2) - \mathbf{u}'_2(t_1)\|_{1,N} \right) \cdot \\ & \cdot |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} a^{(1)}(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1 \leq \\ & \leq - \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} c_0^{(1)} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{1,N} \left(\|\mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1)\|_{1,N} + \|\mathbf{u}'_2(t_2) - \mathbf{u}'_2(t_1)\|_{1,N} \right) \cdot \\ & \cdot |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1. \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{1}{\delta} [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+, u_{mn}^k(t_2) - u_{mn}^l(t_2) - u_{mn}^k(t_1) + u_{mn}^l(t_1) \right\rangle_{\Gamma_c} \cdot \\ & \cdot |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1 \leq - \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\delta} \left\| [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+ \right\|_{0,\Gamma_c} \cdot \\ & \cdot \|u_{mn}^k(t_2) - u_{mn}^l(t_2) - u_{mn}^k(t_1) + u_{mn}^l(t_1)\|_{0,\Gamma_c} |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_{mt}^k(t) - \mathbf{u}_{mt}^l(t)) [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+ \nabla \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}_{mt}^k(t) - \mathbf{u}_{mt}^l(t)) \cdot \\ & (\mathbf{u}_{mt}^k(t_2) - \mathbf{u}_{mt}^l(t_2) - \mathbf{u}_{mt}^k(t_1) + \mathbf{u}_{mt}^l(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} ds dt dt_2 dt_1 \leq \\ & \leq - \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\delta} \left\| \mathcal{F}_c^{kl} \right\|_\infty \left\| [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+ \right\|_{0,\Gamma_c} \cdot \\ & \cdot \|u_{mn}^k(t_2) - u_{mn}^l(t_2) - u_{mn}^k(t_1) + u_{mn}^l(t_1)\|_{0,\Gamma_c} |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)) |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1 \leq \\ & \leq \int_0^{t_p} \int_{t_1}^{t_p} \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{f}(t)\|_{-1,N} \|\mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)\|_{1,N} |t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)} dt dt_2 dt_1. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Z (2.40) plyne

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}'_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))}^2 + |\mathbf{u}_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))}^2 \leq |\mathbf{u}'_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))} |\mathbf{u}'_2|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))} + \\ & + |\mathbf{u}_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))} |\mathbf{u}'_2|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))} + \\ & + 2C(t_p, \gamma) \{c_0^{(0)} \|\mathbf{u}_m\|_{0,1,Q}^2 + c_0^{(1)} \|\mathbf{u}'_m\|_{0,1,Q}^2\} \left(\|\mathbf{u}'_m\|_{0,1,Q} + \|\mathbf{u}'_2\|_{0,1,Q} \right) + \\ & + \frac{1 + \|\mathcal{F}_c^{kl}\|_\infty}{\delta} \left\| [u_{mn}^k - u_{mn}^l]_+ \right\|_{0,\Gamma_c(t)} \left(\|\mathbf{u}'_m\|_{0,\Gamma_c(t)} + \|\mathbf{u}'_2\|_{0,\Gamma_c(t)} \right) + \\ & + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{V}'_0} \left(\|\mathbf{u}'_m\|_{0,1,Q} + \|\mathbf{u}'_2\|_{0,1,Q} \right), \end{aligned} \quad (2.51)$$

odtud

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}'_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))}^2 + |\mathbf{u}_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))}^2 \leq \\ & \leq C_1 |\mathbf{u}'_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))} + C_2 |\mathbf{u}_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))}^2 + C_3(t_p, \gamma, \delta), \end{aligned} \quad (2.52)$$

kde C_1, C_2, C_3 jsou konstanty nezávislé na ε a m .

Podle věty o interpolaci (Besov et al. (1975), Jarušek, Eck (1999), Eck et al. (2005)) plyne, že prostor $H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega)) \cap L^2(I;H^{1,N}(\Omega))$ je spojitě vnořen v $H^{(\frac{1}{2}-\gamma)^2}(I;H^{\frac{1}{2}+\gamma,N}(\Omega))$. Jelikož $H^{\frac{1}{2}+\gamma,N}(\Omega(t))$ je spojitě vnořen v $L^{2,N}(\Gamma_c(t))$, potom

$$|\mathbf{u}'_m|_{H^{(\frac{1}{2}-\gamma)^2}(\Gamma_c(t))}^2 + |\mathbf{u}_m|_{H^{(\frac{1}{2}-\gamma)^2}(\Gamma_c(t))}^2 \leq C(t_p, \gamma, \delta), \quad (2.53)$$

kde konstanta $C(t_p, \gamma, \delta) > 0$ je nezávislá na m a ε .

Na základě odhadů (2.38), (2.39) a (2.53) existuje podposloupnost $\{\mathbf{u}_j\} \equiv \{\mathbf{u}_{m_j}\}$, $\lim_{j \rightarrow \infty} m_j = 0$, taková, že

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_j \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{v } L^2(I;H^{1,N}(\Omega)), \\ & \mathbf{u}'_j \rightharpoonup \mathbf{u}' \quad \text{slabě v } L^2(I;H^{1,N}(\Omega)) \text{ a silně v } L^2\left(\bigcup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right), \text{ (resp. } L^2(\mathcal{SF}_c)), \\ & \frac{1}{\delta} [u_{jn}^k - u_{jn}^l]_+ \rightharpoonup \frac{1}{\delta} [u_n^k - u_n^l]_+ \quad \text{v } L^2\left(\bigcup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right), \\ & \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}'_{jt}) \rightharpoonup \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}'_t) \quad \text{slabě-* v } L^\infty\left(\bigcup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right) \text{ (resp. } L^\infty(\mathcal{SF}_c)). \end{aligned}$$

Položme za \mathbf{v}_j testovací funkci $\mathbf{v}(t) \in C_0^1(I;V_m)$ v (2.35) pro $m = m_j$. Potom integrujme výsledek přes t v intervalu od 0 do t_p a necht' $j \rightarrow \infty$. Dostáváme

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{t_p} (\mathbf{u}'_j, \mathbf{v}) dt = - \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{t_p} (\mathbf{u}'_j, \mathbf{v}') dt = - \int_0^{t_p} (\mathbf{u}', \mathbf{v}') dt = \int_0^{t_p} (\mathbf{u}'', \mathbf{v}) dt, \\ & \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{t_p} a^{(0)}(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}) dt = \int_0^{t_p} a^{(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt, \\ & \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{t_p} a^{(1)}(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}) dt = \int_0^{t_p} a^{(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt, \\ & \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{t_p} \left\langle \frac{1}{\delta} [u_{jn}^k - u_{jn}^l]_+, v_n^k - v_n^l \right\rangle_{\bigcup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} dt = \int_0^{t_p} \left\langle \frac{1}{\delta} [u_n^k - u_n^l]_+, v_n^k - v_n^l \right\rangle_{\bigcup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} dt. \end{aligned}$$

Jelikož $\mathbf{u}'_j \rightharpoonup \mathbf{u}'$ v $L^2\left(\bigcup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right)$ (resp. $L^\infty(\mathcal{SF}_c)$), potom $[u_{jn}^k - u_{jn}^l]_+ \rightarrow [u_n^k - u_n^l]_+$

a $\text{grad} \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}'_{jt} - \mathbf{u}'_{jt}) \rightarrow \text{grad} \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}'_t - \mathbf{u}'_t)$ také v $L^2\left(\bigcup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right)$ (resp. $L^2(\mathcal{SF}_c)$), a jelikož \mathbf{v} , $\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}'_{jt} - \mathbf{u}'_{jt})$, $\text{grad} \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}'_{jt} - \mathbf{u}'_{jt})$ jsou omezené, potom

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{t_p} \left\langle \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl} (\mathbf{u}_{jt}^{lk} - \mathbf{u}_{jt}^{ll}) [u_{jn}^{lk} - u_{jn}^{ll}]_+ \text{grad } \varphi_\varepsilon (\mathbf{u}_{jt}^{lk} - \mathbf{u}_{jt}^{ll}), v_n^k - v_n^l \right\rangle_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} dt \rightarrow \\ & \rightarrow \int_0^{t_p} \left\langle \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl} (\mathbf{u}_t^{lk} - \mathbf{u}_t^{ll}) [u_n^{lk} - u_n^{ll}]_+ \text{grad } \varphi_\varepsilon (\mathbf{u}_t^{lk} - \mathbf{u}_t^{ll}), v_n^k - v_n^l \right\rangle_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} dt. \end{aligned}$$

S ohledem na (2.34) pro všechny testovací funkce $\mathbf{v} \in \bigcup_{m=1}^{\infty} C_0^1(I; V_m)$ plyne

$$\begin{aligned} & \int_I (\mathbf{u}'', \mathbf{v}) dt \leq \\ & \leq C \left[\|\mathbf{u}'\|_{0,1,Q} + \|\mathbf{u}\|_{0,1,Q} + \frac{1 + \|\mathcal{F}_c^{kl}\|_{\infty}}{\delta} \|u_n^{lk} - u_n^{ll}\|_{0, \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{V}'_0} \right] \|\mathbf{v}\|_{0,1,Q}, \end{aligned}$$

tak, že $\|\mathbf{u}''\|_{\mathcal{V}'_0} \leq C(\delta)$. Tím jsme dokázali

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}'\|_{0,1,\Omega \times I} \leq C_1, \quad \|\mathbf{u}\|_{0,1,\Omega \times I} \leq C_2, \\ & \|\mathbf{u}''\|_{\mathcal{V}'_0} \leq C_3(\delta), \quad |\mathbf{u}_m|_{H^{(\frac{1}{2}-\gamma)}(\Gamma_c(t))} \leq C_4(t_p, \gamma, \delta), \end{aligned} \quad (2.54)$$

kde jsme užili označení $\mathbf{u}_{\delta,\varepsilon} \equiv \mathbf{u}$.

Nyní dokážeme limitní proces přes ε , tedy, že (2.34) konverguje k (2.33) pro $\varepsilon \rightarrow 0$. Potom podle (2.54) pro každé $\delta > 0$ existuje podposloupnost $\{\mathbf{u}_j\} \equiv \{\mathbf{u}_{\delta,\varepsilon_j}\}$ posloupnosti $\{\mathbf{u}_{\delta,\varepsilon}\}$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$, taková, že

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_j \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{v } L^2(I; H^{1,N}(\Omega)), \\ & \mathbf{u}'_j \rightharpoonup \mathbf{u}' \quad \text{slabě v } L^2(I; H^{1,N}(\Omega)), \\ & \mathbf{u}'_j \rightarrow \mathbf{u}' \quad \text{silně v } L^2\left(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right), \quad (\text{resp. } L^2(\mathcal{S}\mathcal{F}_c)), \\ & \mathbf{u}''_j \rightharpoonup \mathbf{u}'' \quad \text{slabě-* v } \mathcal{V}'_0, \\ & \frac{1}{\delta} [u_{jn}^{lk} - u_{jn}^{ll}]_+ \rightharpoonup \frac{1}{\delta} [u_n^{lk} - u_n^{ll}]_+ \quad \text{v } L^2\left(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right). \end{aligned}$$

Jelikož $\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_j) \rightarrow \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u})$ slabě-* v $L^\infty\left(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right)$ (resp. $L^\infty(\mathcal{S}\mathcal{F}_c)$), tedy též $\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}'_j) \rightharpoonup \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}')$ slabě-* v $L^\infty\left(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right)$ (resp. $L^\infty(\mathcal{S}\mathcal{F}_c)$), potom

$$\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}'_{jt} - \mathbf{u}'_{jt}) \rightharpoonup \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}'_t - \mathbf{u}'_t) \quad \text{slabě-* v } L^\infty\left(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right) \quad (\text{resp. } L^\infty(\mathcal{S}\mathcal{F}_c)).$$

Nechť $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_\delta$ je řešení (2.33) a $\mathbf{u}_j \equiv \mathbf{u}_{\delta,\varepsilon_j}$ je řešení (2.34). Potom z (2.34), položíme-li $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_0 \cap B(I; L^{2,N}(\Omega))$, plyne

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{t_p} \left[(\mathbf{u}''_j, \mathbf{v}) + a^{(0)}(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}) + a^{(1)}(\mathbf{u}'_j, \mathbf{v}) + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} [u_{jn}^{lk} - u_{jn}^{ll}]_+ (v_n^k - v_n^l) ds \right] dt = \\ & = \int_0^{t_p} \left[(\mathbf{u}'', \mathbf{v}) + a^{(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a^{(1)}(\mathbf{u}', \mathbf{v}) + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} [u_n^{lk} - u_n^{ll}]_+ (v_n^k - v_n^l) ds \right] dt. \end{aligned}$$

Pro $j \rightarrow \infty$ máme

$$\begin{aligned} 0 & \leq \int_0^{t_p} (\mathbf{u}''_j - \mathbf{u}'', \mathbf{u}'_j - \mathbf{u}') dt = \int_0^{t_p} (\mathbf{u}''_j, \mathbf{u}'_j) dt + \\ & + \int_0^{t_p} [(\mathbf{u}'', \mathbf{u}') - (\mathbf{u}''_j, \mathbf{u}') - (\mathbf{u}'', \mathbf{u}'_j)] dt. \end{aligned}$$

Dále z (2.34) plyne

$$\begin{aligned}
& \lim_{j \rightarrow \infty} \inf \int_0^{t_p} (\mathbf{u}'_j, \mathbf{u}'_j) dt \geq \int_0^{t_p} (\mathbf{u}'', \mathbf{u}') dt, \\
& \lim_{j \rightarrow \infty} \inf \int_0^{t_p} (\alpha \mathbf{u}'_j, \mathbf{u}'_j) dt \geq \int_0^{t_p} (\alpha \mathbf{u}', \mathbf{u}') dt, \\
& \lim_{j \rightarrow \infty} \inf \int_0^{t_p} a^{(0)}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}'_j) dt \geq \int_0^{t_p} a^{(0)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') dt, \\
& \lim_{j \rightarrow \infty} \inf \int_0^{t_p} a^{(1)}(\mathbf{u}'_j, \mathbf{u}'_j) dt \geq \int_0^{t_p} a^{(1)}(\mathbf{u}', \mathbf{u}') dt, \\
& \lim_{j \rightarrow \infty} \inf \int_0^{t_p} \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} [u'_{jn} - u''_{jn}]_+ (u'^k_{jn} - u''_{jn}) ds dt \geq \\
& \geq \int_0^{t_p} \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} [u'_n - u''_n]_+ (u'^k_n - u''_n) ds dt.
\end{aligned}$$

Jelikož $\nabla \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}'^k - \mathbf{u}'^l)(\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l - (\mathbf{u}'^k - \mathbf{u}'^l)) \leq \varphi_\varepsilon(\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l) - \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}'^k - \mathbf{u}'^l)$, potom

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{t_p} \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \left\{ \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}'_{jt}^k - \mathbf{u}'_{jt}^l) [u'_{jn} - u''_{jn}]_+ [\varphi_{\varepsilon_j}(\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l) - \varphi_{\varepsilon_j}(\mathbf{u}'_t^k - \mathbf{u}'_t^l)] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}'_t^k - \mathbf{u}'_t^l) [u'_n - u''_n]_+ [|\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l| - |\mathbf{u}'_t^k - \mathbf{u}'_t^l|] \right\} ds dt \right| \leq \\
& \leq \int_0^{t_p} \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \|\mathcal{F}_c^{kl}\|_\infty [u'_{jn} - u''_{jn}]_+ \{ |\varphi_{\varepsilon_j}(\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l) - |\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l|| + \\
& + |\varphi_{\varepsilon_j}(\mathbf{u}'_{jt}^k - \mathbf{u}'_{jt}^l) - |\mathbf{u}'_{jt}^k - \mathbf{u}'_{jt}^l|| \} ds dt + \int_0^{t_p} \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \|\mathcal{F}_c^{kl}\|_\infty \cdot \\
& \cdot |u'_{jn} - u''_{jn} - (u'_n - u''_n)| (|\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l| + |\mathbf{u}'_{jt}^k - \mathbf{u}'_{jt}^l|) ds dt + \\
& + \int_0^{t_p} \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \|\mathcal{F}_c^{kl}\|_\infty [u'_n - u''_n]_+ |\mathbf{u}'_{jt}^k - \mathbf{u}'_{jt}^l - (\mathbf{u}'_t^k - \mathbf{u}'_t^l)| ds dt + \\
& + \left| \int_0^{t_p} \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} [\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}'_{jt}^k - \mathbf{u}'_{jt}^l) - \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}'_t^k - \mathbf{u}'_t^l)] [u'_n - u''_n]_+ \cdot \right. \\
& \left. \cdot (|\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l| - |\mathbf{u}'_t^k - \mathbf{u}'_t^l|) ds dt \right| \rightarrow 0 \quad \text{pro } j \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Takže jsme také dokázali, že

$$\|\mathbf{u}'_\delta\|_{0,1,Q} \leq c, \quad \|\mathbf{u}_\delta\|_{0,1,Q} \leq c. \quad (2.55)$$

Závěrem se dokáže konvergence $\mathbf{u}_\delta \rightarrow \mathbf{u}$, kde \mathbf{u} je řešení (2.31). Postup konvergence může být opakován pro parametr penalty $\delta \rightarrow 0$. Z (2.55) plyne existence posloupnosti $\{\delta_j\}$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta_j = 0$ a odpovídající posloupnosti $\{\mathbf{u}_j\}$ takové, že platí

$$\begin{aligned}
& \delta_j \rightarrow 0, \mathbf{u}'_j \rightharpoonup \mathbf{u}' \text{ slabě v } L^2(I; H^{1,N}(\Omega)) \text{ a silně v } L^2\left(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right) \text{ (resp. } L^2(\mathcal{SF}_c)), \\
& -\frac{1}{\delta} [u'_{jn} - u''_{jn}]_+ = \tau_n(\mathbf{u}_j) \rightharpoonup \tau_n(\mathbf{u}) \text{ v } L^2\left(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I\right).
\end{aligned}$$

V limitě $j \rightarrow 0$ úlohy (2.33) plyne, že limita \mathbf{u} je řešením původní úlohy se třením.

Tím jsme dokázali (Nedoma (2005a)):

Věta 1: Nechť jsou splněny předpoklady o $\Omega, \Gamma_r, r = \tau, u, c$ a vstupních fyzikálních datech z Předpokladu 1. Potom existuje alespoň jedno slabé řešení dynamické kontaktní úlohy se třením a útlumem ve vazko-pružnosti s krátkou pamětí.

Numerické řešení

V této části budeme předpokládat, že setrvačné síly, útlum a tření je možno zanedbat. Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady o fyzikálních parametrech jako v předchozí části. Potom budeme řešit následující úlohu:

Úloha (\mathcal{P})₀: Nechť $N = 2, 3, s \geq 2$. Hledáme vektorovou funkci $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times I \rightarrow \mathbb{R}$, splňující

$$\frac{\partial \tau_{ij}(\mathbf{u}^\iota)}{\partial x_j} + F_i^\iota = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \iota = 1, \dots, s, \quad (t, \mathbf{x}) \in Q^\iota = I \times \Omega^\iota, \quad (2.56)$$

$$\tau_{ij}^l = \tau_{ij}^l(\mathbf{u}^l, \mathbf{u}^l) = c_{ijkl}^{(0)l}(\mathbf{x})e_{kl}(\mathbf{u}^l) + c_{ijkl}^{(1)l}(\mathbf{x})e_{kl}(\mathbf{u}^l), \quad i, j, k, l = 1, \dots, N, \quad l = 1, \dots, s, \quad (2.57)$$

$$\tau_{ij}n_j = P_i, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in \Gamma_\tau(t) = I \times \cup_{l=1}^s (\Gamma_\tau \cap \partial\Omega^l), \quad (2.58)$$

$$u_i = u_{2i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in {}^1\Gamma_u(t) = I \times \cup_{l=1}^s ({}^1\Gamma_u \cap \partial\Omega^l), \quad (2.59)$$

$$u_i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (t, \mathbf{x}) \in {}^2\Gamma_u(t) = I \times \cup_{l=1}^s ({}^2\Gamma_u \cap \partial\Omega^l), \quad (2.60)$$

$$meas {}^2\Gamma_u \cap \partial\Omega^l > 0 \quad \forall l = 1, \dots, s.$$

$$u_n^k - u_n^l \leq 0, \quad \tau_n^k = \tau_n^l \equiv \tau_n^{kl} \leq 0, \quad (u_n^k - u_n^l) \tau_n^{kl} = 0, \quad (2.61)$$

$$(t, \mathbf{x}) \in \Gamma_c(t) = I \times \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl},$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.62)$$

Definujeme množinu virtuálních posunutí $V_0 = \{\mathbf{v} \in H^{1,N}(\Omega) \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_u\}$, $V = \mathbf{u}_2 + V_0$ a množinu přípustných posunutí $\mathcal{K} = \{\mathbf{v} \in V, v_n^k - v_n^l \leq 0 \text{ na } \Gamma_c\}$.

Variacní formulace úlohy pak vede na řešení následující úlohy:

Úloha $(\mathcal{P})_{0v}$: Hledáme vektorovou funkci $\mathbf{u}: \bar{I} \rightarrow V$ takovou, že $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{K}$ pro s.v. $t \in I$, a

$$a^{(0)}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) + a^{(1)}(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \geq \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \text{ s.v. } t \in I, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.64)$$

Oblast Ω , kterou zaujímá studovaný kloubní systém, aproximujeme polygonální pro $N = 2$, resp. polyhedrální pro $N = 3$, oblastí Ω_h . Nechť $\{\mathcal{T}_h\}$ je regulární třída konečně prvkového pokrytí oblasti $\bar{\Omega}$. Nechť $V_h \subset V$ je konečně prvkový prostor lineárních prvků odpovídající pokrytí \mathcal{T}_h . Potom $\mathcal{K}_h = V_h \cap \mathcal{K}$ je tvořen počástech lineárními funkcemi, které jsou nulové v uzlech na $\bar{\Gamma}_u$ a jejichž normálové složky jsou nekladné v uzlech na $\bar{\Gamma}_c^{kl}$. Množina \mathcal{K}_h je neprázdná, uzavřená, konvexní podmnožina V_h . Nechť $\mathbf{u}_{0h} \in \mathcal{K}_h$ je aproximace \mathbf{u}_0 .

Potom budeme řešit úlohu:

Úloha $(\mathcal{P})_{0h}$: Hledáme vektorovou funkci $\mathbf{u}_h: \bar{I} \rightarrow V_h$ takovou, že $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_{0h}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, a pro s.v. $t \in I$, $\mathbf{u}_h(t) \in \mathcal{K}_h$ a

$$a^{(0)}(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_h(t)) + a^{(1)}(\mathbf{u}'_h(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_h(t)) \geq \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_h(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}_h, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_{0h}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_h, \quad (2.66)$$

Existenci a jednoznačnost přibližného konečně prvkového řešení dává následující věta:

Věta 2: Za výše uvedených předpokladů o vstupních datech existuje jediné řešení $\mathbf{u}_h \in W^{1,\infty}(I; V_h)$. Důkaz je důsledkem obecné věty, kterou lze najít např. v Barbu (1984), Kapitola 1.

V dalším odhadněme chybu řešení $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$.

Položme v (2.63) $\mathbf{v} = \mathbf{u}_h(t)$ a v (2.65) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h(t) \in \mathcal{K}_h$ a sečtěme. Po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau)\|_1^2 &\leq a^{(1)}(\mathbf{u}'_h(\tau) - \mathbf{u}'(\tau), \mathbf{v}_h) + a^{(1)}(\mathbf{u}'_h(\tau) - \mathbf{u}'(\tau), \mathbf{u}(\tau)) + \\ &+ a^{(0)}(\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau), \mathbf{u}_h(\tau)) - a^{(0)}(\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau), \mathbf{u}(\tau)) + \\ &+ a^{(0)}(\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau), \mathbf{u}_h(\tau)) - a^{(0)}(\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau), \mathbf{u}(\tau)) + R(t; \mathbf{v}_h - \mathbf{u}(\tau)) \text{ s.v. } \tau \in I, \end{aligned} \quad (2.67)$$

kde $R(\tau; \mathbf{v}) = a^{(1)}(\mathbf{u}'_h(\tau), \mathbf{v}) + a^{(0)}(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ s.v. } \tau \in I$.

Buď $t \in \bar{I}$. Integrací (2.67) přes t v mezích od 0 do t , užitím počátečních podmínek (2.64) a (2.66), integrací per partes, užitím předpokladů o elastických a vazkových koeficientech a vztahů

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_h(t) &= \mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h} + \int_0^t (\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{v}'_h(\tau)) d\tau, \\ \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_h(t)\|_1^2 &\leq c \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_1^2 + c \int_0^t \|\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{v}'_h(\tau)\|_1^2 d\tau,\end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau)\|_1^2 &\leq c \left(\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_1^2 + \|\mathbf{u}' - \mathbf{v}'_h\|_1^2 \right) + c \int_0^\tau \|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_h(\tau)\|_1^2 d\tau + \\ &+ c \int_0^\tau \|\mathbf{u}'(\tau) - \mathbf{v}'_h(\tau)\|_1^2 d\tau + c \int_0^\tau |R(\tau; \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau))| d\tau.\end{aligned}$$

Užitím Gronwallova lematu dostáváme

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I;V)}^2 &\leq c \left(\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_1^2 + \|\mathbf{u}' - \mathbf{v}'_h\|_{L^2(I;V)}^2 \right) + \\ &+ c \int_0^t |R(\tau; \mathbf{v}_h(\tau) - \mathbf{u}(\tau))| d\tau.\end{aligned}$$

Jelikož $\mathbf{v}_h \in H^1(I; \mathcal{K}_h)$ je libovolné, potom

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I;V)}^2 &\leq c \inf_{\mathbf{v}_h \in H^1(I; \mathcal{K}_h)} \left[\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_{0h}\|_1^2 + \|\mathbf{u}' - \mathbf{v}'_h\|_{L^2(I;V)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \|R(\cdot; \mathbf{v}_h - \mathbf{u})\|_{L^1(I)}^{1/2} \right] + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_1.\end{aligned}\tag{2.68}$$

Z poslední nerovnosti a z hustoty $\bigcup_h \mathcal{K}_h$ v \mathcal{K} plyne konvergence metody a odhad chyby řešení (podle Han, Sofonea (2002)):

Věta 3: Nechť oblast Ω je mnohoúhelník pro $N = 2$, a mnohostěn pro $N = 3$. Předpokládejme, že $\mathbf{u}_{0h} \in \mathcal{K}_h$ takové, že $\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{0h}\|_1 \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0$. Potom numerická metoda konverguje a platí

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I;V)} \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0.\tag{2.69}$$

Je-li navíc $\tau_n \in L^\infty(I; L^2(\Gamma_\tau))$, $\mathbf{u} \in H^1(I; H^{2,N}(\Omega))$, $u_n|_{\cup \Gamma_c^{kl}} \in L^1(I; H^2(\cup \Gamma_c^{kl}))$ a položíme-li $\mathbf{u}_{0h} = r_h \mathbf{u}_0$, kde $r_h \mathbf{u}_0$ je konečně prvkový interpolant \mathbf{u}_0 , potom chyba řešení je

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^\infty(I;V)} = O(h).\tag{2.70}$$

2.3 Matematický model kyčelního a kolenního kloubu založený na modelové kontaktní úloze v lineární (termo-)vazko-pružnosti s dlouhou pamětí

V této studii budeme uvažovat model kyčelního resp. kolenního kloubu s kloubním pouzdrům (viz obr.7 resp. obr.8) a jejich totální náhrady. Model umožňuje studovat případy přirozených kloubů i jejich neuvolněných a uvolněných totálních náhrad (Nedoma (2005b)). Omezíme se na případ, kdy na obou částech kloubního systému jsou předepsána posunutí.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, $\Omega = \cup_{l=1}^r \Omega^l$, kde Ω^l jsou oblasti s Lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega^l$ a nechť $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\tau \cup \Gamma_c$ je definována jako výše. Nechť $t \in I = (0, t_p)$, $t_p > 0$. Potom budeme řešit následující úlohu:

Úloha (\mathcal{P}_{lm}): Hledejme dvojici funkcí $(T, u) : \Omega \times I \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \times I$, $N = 2, 3$, a tenzor napětí $\tau_{ij} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N} \times I$ splňující

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + f_i \quad \text{na } \Omega \times I;\tag{2.71}$$

$$\rho c_e \frac{\partial T}{\partial t} - \rho \beta_{ij} T_0 e_{ij}(\mathbf{u}') = \frac{\partial}{\partial x_j} (\kappa_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i}) + W \quad \text{na } \Omega \times I;\tag{2.72}$$

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t b_{ijkl}(t - \tau) e_{kl}(\mathbf{u}(\tau)) d\tau - \beta_{ij} (T - T_0) = {}^e \tau_{ij} + {}^T \tau_{ij};\tag{2.73}$$

s okrajovými a kontaktními podmínkami

$$T(\mathbf{x}, t) = T_1(\mathbf{x}, t) (\neq 0 \text{ resp. } = 0), \quad \tau_{ij}n_j = P_i (\neq 0 \text{ resp. } = 0) \\ \text{na } ({}^1\Gamma_\tau \cup {}^2\Gamma_\tau) \times I, \text{ meas } {}^i\Gamma_\tau > 0, i = 1, 2, \quad (2.74)$$

$$\kappa_{ij} \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} n_j = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) (\neq 0 \text{ resp. } = 0) \\ \text{na } ({}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u) \times I, \text{ meas } {}^i\Gamma_u \geq 0, i = 1, 2, \quad (2.75)$$

$$T^k(\mathbf{x}, t) = T^l(\mathbf{x}, t), \quad \kappa_{ij} \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} n_{j|(k)} = -\kappa_{ij} \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} n_{j|(l)} \quad \text{na } \Gamma_c^{kl} \times I, \quad (2.76)$$

a oboustranné kontaktní podmínky s třením Trescova typu na $\Gamma_c^{kl} \times I$ tvaru

$$\left. \begin{array}{l} u_n^k - u_n^l = 0 \text{ a } |\tau_t^k| \leq \mathcal{F}_c^{kl} \mid \tau_n^k \mid \equiv g_c^{kl}(\mathbf{x}, t), \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{jestliže } |\tau_t^k| < g_c^{kl}(\mathbf{x}, t) \text{ potom } \mathbf{u}_t^{lk} - \mathbf{u}_t^{ll} = 0, \\ \text{jestliže } |\tau_t^k| = g_c^{kl}(\mathbf{x}, t) \text{ potom existuje } \lambda \geq 0, \\ \text{takové, že } \mathbf{u}_t^{lk} - \mathbf{u}_t^{ll} = -\lambda \tau_t^k, \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \text{na } \Gamma_c^{kl} \times I, \quad (2.77)$$

a počáteční podmínky

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \quad (2.78)$$

kde $\rho(\mathbf{x})$ je hustota, $c_e(\mathbf{x})$ je specifické teplo, $c(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})c_e(\mathbf{x})$ je tepelná kapacita, $\kappa_{ij}(\mathbf{x})$ koeficient tepelné vodivosti splňující podmínky

$$\kappa_{ij}(\mathbf{x}) = \kappa_{ji}(\mathbf{x}), \quad \kappa_{ij}(\mathbf{x})\zeta_i\zeta_j \geq \kappa_0 \mid \zeta \mid^2, \quad \kappa_0 = \text{const.} > 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}^N, \quad N = 2, 3, \quad (2.79)$$

$\beta_{ij}(\mathbf{x})$ je koeficient lineární tepelné roztažnosti, W tepelné zdroje, \mathbf{f}, \mathbf{P} objemové a povrchové síly, $c_{ijkl}(\mathbf{x})$ elastické koeficienty splňující podmínky symetrie a elipticity

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}, \quad c_{ijkl}e_{kl}e_{ij} \geq c_0e_{ij}e_{ij}, \quad c_0 > 0, \quad (2.80)$$

$b_{ijkl} = b_{jikl}(\mathbf{x}, t)$ charakterizující paměť materiálu, závisí na t a \mathbf{x} , jsou omezené v \mathbf{x}, t a splňují podmínky symetrie a regularity tvaru

$$b_{ijkl} = b_{jikl}, \quad b_{ijkl}, \partial b_{ijkl}/\partial t, \partial^2 b_{ijkl}/\partial t^2 \in L^\infty(\Omega \times I), \quad (2.81)$$

$T_0(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}, t)$ jsou počáteční a aktuální teploty, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \tau(\mathbf{x}, t)$ vektor posunutí a vektor napětí, τ_{ij} tenzor napětí, $u_n, \mathbf{u}_t, \tau_n, \tau_t$ normálové a tečné složky vektoru posunutí a napětí, \mathbf{n} vnější normála k hranici $\partial\Omega$, \mathbf{u}_2 daná funkce a \mathcal{F}_c^{kl} je koeficient Coulombova tření, $g_c^{kl}(\mathbf{x}, t)$ je mez skluzu (slip limits).

V dalším uvedeme pouze hlavní myšlenky matematické analýzy.

Variační či slabé řešení dané úlohy

Nechť $(v, w)_0$ označuje skalární součin v $[L^2(\Omega)]^N$, $\|\cdot\|_k, k \in \mathbb{R}^1$, normu v $H^{k,N}(\Omega)$, $H^{k,N}(\Omega) = \prod_{i=1}^N [H^k(\Omega^i)]^N$, kde $H^k(\Omega)$ označuje Sobolevův prostor, $H^{0,N}(\Omega) = [L^2(\Omega)]^N$, a $|\cdot|_0$ normu odpovídající skalárnímu součinu $(v, w) = \int_\Omega svwdx$, $s \in C(\bar{\Omega})$, $s \geq s_0$, $v, w \in H^{1,N}(\Omega)$, $N = 1, 2, 3$.

Nechť $\rho^\iota, c_e^\iota \in C(\bar{\Omega}^\iota)$, $\rho^\iota \geq \rho_0^\iota > 0, c_e^\iota \geq c_1^\iota > 0, \kappa_{ij}^\iota \in L^\infty(\Omega^\iota)$, $c_{ijkl}^\iota \in L^\infty(\Omega^\iota)$, $\beta_{ij}^\iota \in C^1(\Omega^\iota)$, $W^\iota \in L^2(I; L^2(\Omega^\iota))$, $\mathbf{f}^\iota \in L^2(I; [L^2(\Omega^\iota)]^N)$, $\mathbf{P}^\iota \in L^2(I; [L^2(\Gamma_\tau)]^N)$, $b_{ijkl}^\iota \in L^\infty(\Omega^\iota \times I)$, $g_c^{kl} \in L^\infty(\Gamma_c^{kl})$, $g_c^{kl} \geq 0$ na $\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$, $T_0^\iota \in H^1(\Omega^\iota)$, $\mathbf{u}_0^\iota, \mathbf{u}_1^\iota \in H^{1,N}(\Omega^\iota)$.

Pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^{1,N}(\Omega), T, z \in H^{1,1}(\Omega)$ definujeme

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^r a^i(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i) = \int_{\Omega} c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\
a_1(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^r a_1^i(t; \mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i) = \int_{\Omega} b_{ijkl}(t) e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\
(\mathbf{u}'', \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^r (\mathbf{u}''^i, \mathbf{v}^i) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}'' \mathbf{v} d\mathbf{x}, \\
(T', z) &= \sum_{i=1}^r (T'^i, z^i) = \int_{\Omega} \rho c_e T' z d\mathbf{x}, \\
a_T(T, z) &= \sum_{i=1}^r a_T^i(T^i, z^i) = \int_{\Omega} \kappa_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} d\mathbf{x}, \\
(\mathbf{F}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^r (\mathbf{F}^i, \mathbf{v}^i) = \int_{\Omega} f_i v_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds, \\
(W, z) &= \sum_{i=1}^r (W^i, z^i) = \int_{\Omega} W z d\mathbf{x}, \\
j_g(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^r j_g^i(\mathbf{v}^i) = \int_{\cup_{kl} \Gamma_c^{kl}} g_c^{kl} |\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l| ds \equiv \langle g_c^{kl}, |\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l| \rangle_{\cup_{kl} \Gamma_c^{kl}}, \\
b_s(T, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^r b_s^i(T^i, \mathbf{v}^i) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\beta_{ij} T) v_i d\mathbf{x}, \\
b_p(\mathbf{v}, z) &= \sum_{i=1}^r b_p^i(\mathbf{v}^i, z^i) = \int_{\Omega} \rho T_0 \beta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} z d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Jelikož $\beta_{ij}^i \in C^1(\Omega)$, $T^i, T_0^i \in H^{1,1}(\Omega^i)$, potom $\beta_{ij}^i(T^i - T_0^i) \in H^{1,1}(\Omega^i)$ a tedy $\frac{\partial}{\partial x_j} (\beta_{ij}^i(T^i - T_0^i)) \in L^2(\Omega^i)$.

Nechť

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{ad}(t) &= \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in H^{1,N}(\Omega), \mathbf{v} = \mathbf{u}'_2(\mathbf{x}, t) \text{ na } \Gamma_u\}, \\
\mathcal{U}_{Tad}(t) &= \{z \mid z \in H^{1,1}(\Omega), z = T_1(\mathbf{x}, t) \text{ na } \Gamma_{\tau}\}.
\end{aligned}$$

Vynásobme (2.71) výrazem $\mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)$ a (2.72) výrazem $z - T(t)$, integrujme přes Ω , užitím okrajových a kontaktních podmínek (2.74) – (2.77) a Greenovy věty potom dostáváme následující úlohu: Problem $(\mathcal{P}_{lm})_v$: nalézt dvojici funkcí $(T(t), \mathbf{u}(t))$ splňující

$$\begin{aligned}
T(t) &\in \mathcal{U}_{Tad}(t), \mathbf{u}'(t) \in \mathcal{U}_{ad}, \forall t, \\
(T'(t), z - T(t)) + a_T(T(t), z - T(t)) + b_p(\mathbf{u}(t), z - T(t)) &\geq \\
\geq (W(t), z - T(t)) dt \quad \forall z \in \mathcal{U}_{Tad}(t), &
\end{aligned} \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + \int_0^t a_1(t - \tau; \mathbf{u}(\tau), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) d\tau + \\
&+ b_s(T(t) - T_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + j_g(\mathbf{v}) - j_g(\mathbf{u}'(t)) \geq \\
&\geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}(t),
\end{aligned} \tag{2.84}$$

a počáteční podmínky (2.78).

Zavedeme funkce $\psi(t), \varphi(t)$ splňující $\psi(t) \in H^{1,1}(\Omega)$, $\psi(t) = T_1(t)$ na Γ_{τ} , $\varphi(t) \in H^{1,N}(\Omega)$, $\varphi(t) = \mathbf{u}'_2(t)$ na Γ_u , nahradíme $T - \psi$ za T a $\mathbf{u} - \varphi$ za \mathbf{u} , uijíme stejné značení T a \mathbf{u} a definujeme prostory

$$V_0 = \{z \mid z \in H^{1,1}(\Omega), z = 0 \text{ na } \Gamma_{\tau}\},$$

$$V = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in H^{1,N}(\Omega), \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_u\},$$

potom budeme řešit následující úlohu:

Problem $(\mathcal{P}_{lm})_0$: najít dvojici funkcí (T, \mathbf{u}) takové, že pro s.v. $t \in I$

$$\begin{aligned}
T(t) &\in V_0, \mathbf{u}(t) \in V, \\
(T'(t), z) + a_T(T(t), z) + b_p(\mathbf{u}(t), z) &= (Q_0(t), z) \quad \forall z \in V_0, \\
(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + \int_0^t a_1(t - \tau; \mathbf{u}(\tau), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) d\tau + \\
+ b_s(T(t) - T_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + j_g(\mathbf{v} + \varphi'(t)) - j_g(\mathbf{u}'(t) + \varphi'(t)) &\geq \\
\geq (\mathbf{F}_0(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in V, &
\end{aligned} \tag{2.85}$$

kde

$$\begin{aligned}
(Q_0(t), z) &= (W(t), z) - (\psi'(t), z) - a_T(\psi(t), z) - b_p(\varphi'(t), z), \\
(\mathbf{F}_0(t), \mathbf{v}) &= (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}) - (\varphi''(t), \mathbf{v}) - a(\varphi(t), \mathbf{v}) - \\
&- \int_0^t a_1(t - \tau; \varphi(\tau), \mathbf{v}) d\tau - b_s(\psi(t), \mathbf{v}),
\end{aligned} \tag{2.86}$$

s počátečními podmínkami tvaru

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}, 0) &= T_0(\mathbf{x}) \quad (\text{přesněji } T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}, 0)), \\
\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{přesněji } \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}, 0)), \\
\mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \quad (\text{přesněji } \mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{x}, 0)).
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Hlavní výsledek základní matematické analýzy této úlohy dává následující věta:

Věta 4: Necht'

$$\begin{aligned}
&\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'' \in L^2(I; [L^2(\Omega)]^N), \mathbf{P}, \mathbf{P}', \mathbf{P}'' \in L^2(I; [L^2(L_\tau)]^N), W, W', W'' \in L^2(I; L^2(\Omega)), \\
&\rho, c_e \in C(\bar{\Omega}), \rho \geq \rho_0 > 0, c_e \geq c_1 > 0, \\
&\beta_{ij}(\mathbf{x}) \in C^1(\Omega) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\
&\kappa_{ij} \in L^\infty(\Omega) \text{ splňuje podmínky (2.79)}, \\
&c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega) \text{ splňuje podmínky (2.80)}, \\
&b_{ijkl} \text{ splňuje podmínky symetrie a regularity (2.81)}, \\
&g_c^{kl} \text{ nezávisí na } t, \\
&\psi, \psi', \psi'' \in L^2(I; H^{1,1}(\Omega)), \psi(0) \in H^2(\Omega), \\
&\varphi, \varphi', \varphi'' \in L^2(I; H^{1,N}(\Omega)), \varphi''', \varphi^{(iv)} \in L^2(I; [L^2(\Omega)]^N), \varphi(0) \in [H^2(\Omega)]^N, \\
&g_c^{kl} \in L^\infty(\Gamma_c^{kl}), g_c^{kl} \geq 0 \text{ na } \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}, \\
&\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) \in L^2(I; V), T_1(\mathbf{x}, t) \in L^2(I; V_0), \\
&T_0 \in V_0, (Q_0(0), z) - a_T(T_0, z) - b_p(\mathbf{u}_1, z) = (T_p, z), \quad T_p \in L^2(\Omega), \\
&\mathbf{u}_0 \in V, (\mathbf{F}_0(0), \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_p, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}_p \in [L^2(\Omega)]^N, \\
&\mathbf{u}_1 \in V, \mathbf{u}_{1t} + \varphi'_t(0) = 0 \text{ na } \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Potom existuje právě jedno řešení - dvojice funkcí (T, \mathbf{u}) takové, že

$$\begin{aligned}
T, T' &\in L^\infty(I; V_0), \\
\mathbf{u}, \mathbf{u}' &\in L^\infty(I; V), \mathbf{u}'' \in L^2(I; V')
\end{aligned} \tag{2.89}$$

a které splňuje (2.85)-(2.87).

Důkaz: Postup důkazu je následující:

- (i) jednoznačnost řešení (2.85)-(2.87),
- (ii) řeší se regularizovaná úloha (2.85)-(2.87),
- (iii) dokazuje se existence regularizované úlohy za pomoci Galerkinovy aproximace,
- (iv) hledají se a priori odhady I a II nezávislé na ε ,
- (v) limitní procesy přes m (Galerkin) a ε (regularizace).

Jednoznačnost úlohy se dokazuje standardním způsobem. Po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned}
&|T^*(t)|_0^2 + \left\{ |\mathbf{u}^{*'}(t)|_0^2 + a(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \right\} + 2 \int_0^t a_T(T^*(\tau), T^*(\tau)) d\tau \leq \\
&-2 \int_0^t \int_0^\tau a_1(\tau - \tau_1; \mathbf{u}^*(\tau_1), \mathbf{u}^{*'}(\tau_1)) d\tau_1 d\tau - 2 \int_0^t [b_s(T^*(\tau), \mathbf{u}^{*'}(\tau)) + b_p(\mathbf{u}^{*'}(\tau), T^*(\tau))] d\tau.
\end{aligned}$$

Jelikož forma $\mathbf{v} \rightarrow a_1(t; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ je spojitá na V , potom

$$a_1(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (B(t)\mathbf{u}, \mathbf{v}), B(t)\mathbf{u} \in V, B(t) \in \mathcal{L}(V; V') \tag{2.90}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_0^\tau a_1(\tau - \tau_1; \varphi(\tau_1), \varphi'(\tau_1)) d\tau_1 d\tau \right| = \\
&= \left| \int_0^t \left(\int_0^\tau B(\tau - \tau_1) \varphi(\tau_1) d\tau_1, \varphi'(\tau) \right) d\tau \right| = \left| \int_0^t \int_\tau^t (B(\tau - \tau_1) \varphi(\tau_1), \varphi'(\tau)) d\tau d\tau_1 \right| = \\
&= \left| \int_0^t (B(t - \tau_1) \varphi(\tau_1), \varphi(t)) d\tau_1 - \int_0^t (B(0) \varphi(\tau_1), \varphi(\tau_1)) d\tau_1 - \int_0^t \int_\tau^t (B'(\tau - \tau_1) \varphi(\tau_1), \varphi(\tau)) d\tau d\tau_1 \right| \\
&\leq c \left[\int_0^t \|\varphi(\tau)\|_1^2 d\tau + \|\varphi(t)\|_1 \int_0^t \|\varphi(\tau)\|_1 d\tau \right].
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Odtud užitím vlastností bilineárních forem $a_T(z, z)$, $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ a odhadu

$$|b_s(T^*(t), \mathbf{u}^{*'}(t)) + b_p(\mathbf{u}^{*'}(t), T^*(t))| \leq c(\|\mathbf{u}^{*'}(t)\|_0 \|T^*(t)\|_1 + \|\mathbf{u}^{*'}(t)\|_1 \|T^*(t)\|_0),$$

plyne

$$\begin{aligned} & |T^*(t)|_0^2 + \int_0^t \|T^*(\tau)\|_1^2 d\tau + |\mathbf{u}^{*'}(t)|_0^2 + \|\mathbf{u}^*(t)\|_1^2 \leq \\ & \leq c \int_0^t \left[|T^*(\tau)|_0^2 + \|T^*(\tau)\|_1^2 + |\mathbf{u}^{*'}(\tau)|_0^2 + \|\mathbf{u}^*(\tau)\|_1^2 \right] d\tau. \end{aligned}$$

Užitím Gronwallova lematu plyne $T^*(t) = 0$, $\mathbf{u}^*(t) = 0$, což dokazuje jednoznačnost.

Existence úlohy se dokáže pomocí dvojí regularizace původní úlohy. Definujme konvexní funkci $\psi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$\psi_\varepsilon(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon, \quad (2.92)$$

která regularizuje funkci $x \rightarrow |x|$, a která je derivovatelná a splňuje nerovnost

$$\|x| - \psi_\varepsilon(|x|)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon \geq 0. \quad (2.93)$$

Jelikož funkcionál $j_g(\mathbf{v})$ není diferencovatelný, zavedeme jeho regularizaci $j_{g\varepsilon} : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$,

$$j_{g\varepsilon}(\mathbf{v}) = \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_c^{kl}(\mathbf{x}, t) \psi_\varepsilon(|\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l|) ds \equiv \langle g_c^{kl}, \psi_\varepsilon(|\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l|) \rangle_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}}, \quad (2.94)$$

požadovaných vlastností, pro něž

$$(j'_{g\varepsilon}(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \langle g_c^{kl} \chi_\varepsilon(\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l), \mathbf{w}_t^k - \mathbf{w}_t^l \rangle_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}}, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \quad (2.95)$$

kde jsme položili $\chi_\varepsilon(\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l) = \psi'_\varepsilon(|\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l|) (\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l)$.

Potom se řeší již regularizovaná úloha:

$$(T'_\varepsilon(t), z) + a_T(T_\varepsilon(t), z) + b_p(\mathbf{u}'_\varepsilon(t), z) = (Q_0(t), z) \quad \forall z \in V_0, \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}''_\varepsilon(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{v}) + \int_0^t a_1(t - \tau; \mathbf{u}_\varepsilon(\tau), \mathbf{v}) d\tau + b_s(T_\varepsilon(t) - T_0, \mathbf{v}) + \\ & + (j'_{g\varepsilon}(\mathbf{u}'_\varepsilon(t) + \varphi'(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{F}_0(t), \mathbf{v}) \quad \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (2.97)$$

s počátečními podmínkami

$$T_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{u}'_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}). \quad (2.98)$$

Existence $(T_\varepsilon(t), \mathbf{u}_\varepsilon(t))$ se dokáže pomocí Galerkinovy aproximace.

Apriorní odhady I nalezneme z (2.96) položíme-li $z = T_\varepsilon(t)$ a z (2.97) položíme-li $\mathbf{v} = \mathbf{u}'_\varepsilon(t) + \varphi'(t)$. Potom po úpravách za použití spojitosti formy $a_1(t; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ na V a $(j'_{g\varepsilon}(\mathbf{w}), \mathbf{w}) \geq 0, \forall \mathbf{w} \in V$,

$$\begin{aligned} & |b_s(T_\varepsilon(t) - T_0, \mathbf{u}'_\varepsilon(t) + \varphi'(t)) + b_p(\mathbf{u}'_\varepsilon(t), T_\varepsilon(t))| \leq \\ & \leq c(1 + \|T_\varepsilon(t)\|_1 \|\mathbf{u}'_\varepsilon(t)\|_0 + \|T_\varepsilon(t)\|_1 \|\varphi'(t)\|_0 + \|T_\varepsilon(t)\|_0 \|\mathbf{u}'_\varepsilon(t)\|_1), \end{aligned} \quad (2.99)$$

$|a_1(t - \tau; \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C(t, \tau) \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, kde $C(t, \tau) \in L^\infty(I \times I)$, a vzhledem k (2.91)

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_0^\tau a_1(\tau - \tau_1; \mathbf{u}_\varepsilon(\tau_1), \mathbf{u}'_\varepsilon(\tau)) d\tau_1 d\tau \right| \leq \\ & \leq c \left[\int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(\tau)\|_1^2 d\tau + \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_1 \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(\tau)\|_1 d\tau \right], \\ & \left| \int_0^t a_1(t - \tau; \mathbf{u}(\tau), \mathbf{v}) d\tau \right| \leq \int_0^t C(t, \tau) \|\mathbf{u}(\tau)\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 d\tau \leq \\ & \leq \|\mathbf{v}\|_1 \int_0^t C(t, \tau) \|\mathbf{u}(\tau)\|_1 d\tau \leq \|C(t, \cdot)\|_{L^1(0,t)} \|\mathbf{v}\|_1 \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_1 d\tau, \end{aligned} \quad (2.100)$$

a po dalších úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} & |T_\varepsilon(t)|_0^2 + \int_0^t \|T_\varepsilon(\tau)\|_1^2 d\tau + |\mathbf{u}'_\varepsilon(t)|_0^2 + \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_1^2 \leq \\ & \leq c \left(1 + \int_0^t \left[|T_\varepsilon(\tau)|_0^2 + \|T_\varepsilon(\tau)\|_1^2 + |\mathbf{u}'_\varepsilon(\tau)|_0^2 + \|\mathbf{u}_\varepsilon(\tau)\|_1^2 \right] d\tau \right). \end{aligned}$$

Užitím Gronwallova lematu dostáváme odhady

$$|T_\varepsilon(t)|_0 \leq c, \int_0^t \|T_\varepsilon(\tau)\|_1^2 d\tau \leq c, |\mathbf{u}'_\varepsilon(t)|_0 \leq c, \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_1 \leq c, t \in I, \quad (2.101)$$

kde $c = \text{const.} > 0$ označují konstanty nezávislé na ε .

Z (2.96) a (2.97) pro $t = 0$ dostáváme, že $T'_\varepsilon(0) = T_p$, $\mathbf{u}''_\varepsilon(0) = \mathbf{u}_p$, $T'_\varepsilon(0) \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{u}''_\varepsilon(0) \in [L^2(\Omega)]^N$.

A priori odhady II dostáváme derivováním (2.96),(2.97) podle t , a položíme-li $z = T'_\varepsilon(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t)$, po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |T'_\varepsilon(t)|_0^2 + a_T(T'_\varepsilon(t), T'_\varepsilon(t)) + b_p(\mathbf{u}''_\varepsilon(t), T'_\varepsilon(t)) = (Q'_0(t), T'_\varepsilon(t)), \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[|\mathbf{u}''_\varepsilon(t)|_0^2 + a(\mathbf{u}'_\varepsilon(t), \mathbf{u}'_\varepsilon(t)) \right] + (B(0)\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t)) + \\ & + \left(\int_0^t B'(t-\tau)\mathbf{u}_\varepsilon(\tau) d\tau, \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t) \right) + b_s(T'_\varepsilon(t), \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t)) + \\ & + \left(\frac{d}{dt} j'_{g_\varepsilon}(\mathbf{u}'_\varepsilon(t) + \varphi'(t)), \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t) \right) = (\mathbf{F}'_0(t), \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t)) - \\ & - (\mathbf{u}'''_\varepsilon(t), \varphi''(t)) - a(\mathbf{u}'_\varepsilon(t), \varphi''(t)), \end{aligned} \quad (2.103)$$

kde

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} j'_{g_\varepsilon}(\mathbf{u}'_\varepsilon(t) + \varphi'(t)), \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t) \right) = \\ & = \left\langle \frac{d}{dt} g_c^{kl}(\mathbf{x}, t) \psi'_\varepsilon(|\mathbf{u}'_{\varepsilon t}(t) + \varphi'_t(t)|) (\mathbf{u}'_{\varepsilon t}(t) + \varphi'_t(t)), \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t) \right\rangle_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}}. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} j'_{g_\varepsilon}(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}) \right) &= \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{\partial g_c^{kl}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \chi_\varepsilon(\mathbf{w}_t(t)) \mathbf{v}_t ds + \\ &+ \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_c^{kl}(\mathbf{x}, t) \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\chi_\varepsilon(\mathbf{w}_t(t+k)) - \chi_\varepsilon(\mathbf{w}_t(t))}{k} \mathbf{v}_t ds, \end{aligned}$$

potom

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} j'_{g_\varepsilon}(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}'(t)) \right) &= \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{\partial g_c^{kl}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \chi_\varepsilon(\mathbf{w}_t(t)) \mathbf{w}'_t(t) ds + \\ &+ \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} g_c^{kl}(\mathbf{x}, t) \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\chi_\varepsilon(\mathbf{w}_t(t+k)) - \chi_\varepsilon(\mathbf{w}_t(t))}{k} \frac{\mathbf{w}_t(t+k) - \mathbf{w}_t(t)}{k} ds = I_1 + I_2 \geq \\ &\geq \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{\partial g_c^{kl}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \chi_\varepsilon(\mathbf{w}_t(t)) \mathbf{w}'_t(t) ds = \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{\partial g_c^{kl}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \chi_\varepsilon(\mathbf{w}_t(t)) ds, \end{aligned}$$

kde $I_2 \geq 0$ vzhledem k vlastnosti monotonie. Odtud a (2.102),(2.103)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |T'_\varepsilon(t)|_0^2 + a_T(T'_\varepsilon(t), T'_\varepsilon(t)) + b_p(\mathbf{u}''_\varepsilon(t), T'_\varepsilon(t)) = (Q'_0(t), T'_\varepsilon(t)) \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[|\mathbf{u}''_\varepsilon(t)|_0^2 + a(\mathbf{u}'_\varepsilon(t), \mathbf{u}'_\varepsilon(t)) \right] + (B(0)\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t)) + \\ & + \left(\int_0^t B'(t-\tau)\mathbf{u}_\varepsilon(\tau) d\tau, \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t) \right) + b_s(T'_\varepsilon(t), \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t)) + \\ & + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{\partial g_c^{kl}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \chi_\varepsilon(\mathbf{u}'_{\varepsilon t}(t) - \mathbf{u}'_{\varepsilon t}(t) + \varphi'_t(t) - \varphi'_t(t)) ds \leq \\ & \leq (\mathbf{F}'_0(t), \mathbf{u}''_\varepsilon(t) + \varphi''(t)) - (\mathbf{u}'''_\varepsilon(t), \varphi''(t)) - a(\mathbf{u}'_\varepsilon(t), \varphi''(t)). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Integrací (2.104), (2.105) v mezích 0 do t , potom po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \int_0^t \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{\partial g_c^{kl}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \chi_\varepsilon(\mathbf{u}'_{\varepsilon t}(\tau) - \mathbf{u}'_{\varepsilon t}(\tau) + \varphi'_t(\tau) - \varphi'_t(\tau))}{\partial \tau} ds d\tau \right| = \\ &= \left| \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{\partial g_c^{kl}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \chi_\varepsilon(\mathbf{u}'_{\varepsilon t}(t) - \mathbf{u}'_{\varepsilon t}(t) + \varphi'_t(t) - \varphi'_t(t)) ds - \right. \\ & \left. - \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{\partial g_c^{kl}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \chi_\varepsilon(\mathbf{u}'_{\varepsilon t}(0) - \mathbf{u}'_{\varepsilon t}(0) + \varphi'_t(0) - \varphi'_t(0)) ds - \right. \\ & \left. - \int_0^t \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{\partial^2 g_c^{kl}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} \chi_\varepsilon(\mathbf{u}'_{\varepsilon t}(\tau) - \mathbf{u}'_{\varepsilon t}(\tau) + \varphi'_t(\tau) - \varphi'_t(\tau)) ds d\tau \right|, \end{aligned}$$

a předpokládáme-li, že $\frac{\partial g_c^{kl}}{\partial t} = 0$, tj. g_c^{kl} nezávisí na t , a tedy $|I| = 0$.

Odhady $\|T'_\varepsilon(0)\|_1$, $|\mathbf{u}''_\varepsilon(0)|$ plynou z (2.96), (2.97) pro $t = 0$ a po úpravách nalezneme

$$\|T'_\varepsilon(0)\|_1 \leq c, \|\mathbf{u}''_\varepsilon(0)\|_1 \leq c.$$

Z (2.104) a (2.105) užitím předchozích výsledků a užitím Gronwallova lematu dostáváme

$$|T'_\varepsilon(t)|_0^2 \leq c, \int_0^t \|T'_\varepsilon(\tau)\|_1^2 d\tau \leq c, |\mathbf{u}''_\varepsilon(t)|_0^2 \leq c, \|\mathbf{u}'_\varepsilon(t)\|_1^2 \leq c. \quad (2.106)$$

Závěrem se dokáží limitní procesy přes m a ε .

Poznámka: V případě, že lze setrvačné síly zanedbat, potom úloha vede na úlohu kvazi-statickou. V případě, že vektor posunutí a teplota nezávisí na čase t , potom řešíme úlohu statickou.

Kontaktní úloha v lineární pružnosti

Dá se ukázat, že kontaktní úloha v lineární (termo-)pružnosti je speciální případ kontaktní úlohy v lineární (termo-)vazko-pružnosti.

Bud' $\mathbf{u}_\lambda(t), T_\lambda(t)$ a $\mathbf{u}(t), T(t)$ řešení úlohy (\mathcal{P}_{lm}) s

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{u}(t)) + \lambda \int_0^t b_{ijkl}(t - \tau)e_{kl}(\mathbf{u}(\tau))d\tau - \beta_{ij}(T - T_0), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (2.107)$$

a

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{u}(t)) - \beta_{ij}(T - T_0). \quad (2.108)$$

Potom, za platnosti podmínek věty 4, budeme řešit úlohu

$$\begin{aligned} T_\lambda(t) &\in V_0, \mathbf{u}_\lambda(t) \in V, \\ (T'_\lambda(t), z) + a_T(T_\lambda(t), z) + b_p(\mathbf{u}'_\lambda(t), z) &= (Q_0(t), z) \quad \forall z \in V_0, \\ (\mathbf{u}''_\lambda(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_\lambda(t)) + a(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{v} - \mathbf{u}'_\lambda(t)) + \lambda \int_0^t a_1(t - \tau; \mathbf{u}_\lambda(\tau), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_\lambda(t))d\tau \\ + b_s(T_\lambda(t) - T_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}'_\lambda(t)) + j_g(\mathbf{v} + \varphi'(t)) - j_g(\mathbf{u}'_\lambda(t) + \varphi'(t)) &\geq \\ (\mathbf{F}_0(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'_\lambda(t)) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\ T_\lambda(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{u}'_\lambda(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.109)$$

Užitím regularizace nediferencovatelného funkcionálu $j_g(\mathbf{v})$ (tj. $j_g(\mathbf{v}) \rightarrow j_{g\varepsilon}(\mathbf{v}) = \langle g_c^{kl}, \psi_\varepsilon(|\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l|) \rangle_{\cup_{k,l} \Gamma_\varepsilon^{kl}}$), dostáváme

$$\begin{aligned} T_{\lambda\varepsilon}(t) &\in V_0, \mathbf{u}_{\lambda\varepsilon}(t) \in V, \\ (T'_{\lambda\varepsilon}(t), z) + a_T(T_{\lambda\varepsilon}(t), z) + b_p(\mathbf{u}'_{\lambda\varepsilon}(t), z) &= (Q_0(t), z) \quad \forall z \in V_0, \\ (\mathbf{u}''_{\lambda\varepsilon}(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}_{\lambda\varepsilon}, \mathbf{v}) + \lambda \int_0^t a_1(t - \tau; \mathbf{u}_{\lambda\varepsilon}(\tau), \mathbf{v})d\tau + \\ + b_s(T_{\lambda\varepsilon}(t) - T_0, \mathbf{v}) + (j'_{g\varepsilon}(\mathbf{u}'_{\lambda\varepsilon} + \varphi'(t)), \mathbf{v}) &= (\mathbf{F}_0(t), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\ T_{\lambda\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \mathbf{u}_{\lambda\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{u}'_{\lambda\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Aplikací postupu jako při důkazu věty 4, tj. užitím Galerkinovy metody, nalezneme odhady nezávislé na ε a λ , tj.

$$|T'_{\lambda\varepsilon}(t)|_0 \leq c, \int_0^t \|T_{\lambda\varepsilon}(\tau)\|_1^2 d\tau \leq c, |\mathbf{u}''_{\lambda\varepsilon}(t)|_0 \leq c, \|\mathbf{u}'_{\lambda\varepsilon}(t)\|_1 \leq c, \|\mathbf{u}_{\lambda\varepsilon}(t)\|_1 \leq c. \quad (2.111)$$

V limitních procesech přes ε , podobně jako výše, a λ dostáváme

$$\begin{aligned} T_\lambda &\rightarrow T \quad \text{slabě-* v } L^\infty(I; V_0), \\ T'_\lambda &\rightarrow T' \quad \text{slabě-* v } L^2(I; V_0), \\ \mathbf{u}_\lambda &\rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{u}'_\lambda \rightarrow \mathbf{u}' \quad \text{slabě-* v } L^\infty(I; V), \\ \mathbf{u}''_\lambda &\rightarrow \mathbf{u}'' \quad \text{slabě-* v } L^\infty(I; V'), \end{aligned} \quad (2.112)$$

kde \mathbf{u} je řešení úlohy (\mathcal{P}_{lm}) s $\tau_{ij} = c_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{u}) - \beta_{ij}(T - T_0)$ a T je odpovídající řešení rovnice vedení tepla.

2.4 Matematický model kyčelního a kolenního kloubu založený na modelové kontaktní úloze v nelineární (termo-)pružnosti

Úvod

V odstavci 2.1 o modelech lidských kloubů bylo ukázáno, jakým způsobem probíhají tlakové a tahové systémy ve stehenní kosti - femuru. Tento tlakový systém je však porušen aplikací totální náhrady kyčelního kloubu. Z klinických pozorování i ze studií, založených na matematickém modelování vidíme, že oblast velkého trochanteru je po aplikaci TEP silně odlehčena, takže po odlehčení dochází k řídnutí kostní tkáně. Tím se mění i fyzikální vlastnosti kostní tkáně. Je proto naším úkolem najít vhodnou reologii, která umožní studovat zatěžování skeletu kloubních systémů v závislosti na rozložení skutečného pole napjatosti ve studované části skeletu včetně vazivového systému a stanovit i jejich odpovídající fyzikální vlastnosti a fyzikální parametry. Jako vhodná reologie se ukazuje nelineární pružnost speciálního typu, která v závislosti na skutečných hodnotách napětí ve skeletu dovede popsat materiály se zpevněním v důsledku většího zatěžování, resp změkčení v důsledku jejich nižšího zatěžování, jak pozorujeme v oblasti velkého trochanteru po aplikaci TEP. Závisí-li koeficienty elasticity na posunutí \mathbf{u} , potom je tato reologie speciálním typem plasticity deformačního typu.

V následující části této kapitoly budeme vyšetřovat dynamickou modelovou úlohu s Coulombovským třením v nelineární (termo-)pružnosti, která bude s dostatečnou přesností popisovat chování zatěžovaného kyčelního nebo kolenního kloubu. V dalším se omezíme pouze na elastickou část úlohy a případ, kdy na obou částech kloubního systému jsou předepsána posunutí.

Reologie a formulace úlohy

Při odvození vztahu mezi napětím a deformací v N - dimenzích ($N = 2, 3$) vyjdeme z funkce hustoty deformační energie (the strain energy density function) $E(e_{ij})$. Označme A skalární funkci deformací e_{ij} definovanou vztahem

$$A = c_{ijkl}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{u})e_{kl}(\mathbf{u}), \quad e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j, k, l = 1, \dots, N, \quad (2.113)$$

kde $c_{ijkl}(\mathbf{u})$ jsou elastické koeficienty obecně závislé na vektoru posunutí $\mathbf{u} = (u_i)$ a $e_{ij}(\mathbf{u})$ jsou složky tenzoru malé deformace. Tenzor $c_{ijkl}(\mathbf{u})$ je symetrický, tj.

$$c_{ijkl}(\mathbf{u}) = c_{jikl}(\mathbf{u}) = c_{klij}(\mathbf{u}) = c_{ijlk}(\mathbf{u}). \quad (2.114)$$

kde Einsteinova sumační konvence je rovněž uvažována.

Vztah mezi napětím a deformací odvodíme z funkce hustoty deformační energie E ,

$$E = A^\lambda(e_{ij}(\mathbf{u})), \quad (2.115)$$

kde λ je kladný parametr, tj. ze vztahu

$$\tau_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{\partial E(e_{ij}(\mathbf{u}))}{\partial e_{ij}}. \quad (2.116)$$

Potom z (2.113), (2.115), (2.116) dostáváme

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(\mathbf{u}) &= \lambda [A(e_{ij}(\mathbf{u}))]^{\lambda-1} \frac{\partial A(e_{ij}(\mathbf{u}))}{\partial e_{ij}} = 2\lambda [A(e_{ij}(\mathbf{u}))]^{\lambda-1} c_{ijkl}(\mathbf{u})e_{kl}(\mathbf{u}) = \\ &= c_{ijkl}^*(\mathbf{u})e_{kl}(\mathbf{u}), \quad c_{ijkl}^*(\mathbf{u}) = 2\lambda [A(e_{ij}(\mathbf{u}))]^{\lambda-1} c_{ijkl}(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (2.117)$$

kde $c_{ijkl}^*(\mathbf{u})$ jsou nelineární elastické koeficienty. Skalární koeficient $2\lambda [A(e_{ij}(\mathbf{u}))]^{\lambda-1}$ závisí na tenzoru malé deformace $e_{ij}(\mathbf{u})$. Parametr λ simuluje stupeň nelinearity biomateriálu. Jestliže $0 < \lambda < 1$, potom parameter λ má vlastnost produkce změkčení biomateriálu, jestliže $\lambda = 1$ potom biomateriál má vlastnosti lineárního pružného materiálu (kde nelinearita biomateriálu závisí pouze na nelinearitě elastických koeficientů závisících na posunutí \mathbf{u}), a jestliže $\lambda > 1$, potom charakterizuje biomateriály se zpevněním.

Nechť $I = (0, t_p)$ je časový interval ve kterém probíhají biomechanické procesy. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, je oblast zahrnující studovaný kloubní systém, jehož části, libovolného tvaru okupují oblasti Ω^ℓ takové, že $\Omega = \cup_{\ell=1}^s \Omega^\ell$. Nechť Ω^ℓ mají dostatečně hladké (lipschitzovské) hranice $\partial\Omega^\ell$ a nechť $\partial\Omega = \Gamma_\tau \cup \Gamma_u \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_c \cup \mathcal{R}$, kde disjunktní části hranice $\Gamma_\tau, \Gamma_u, \Gamma_0, \Gamma_c$ jsou otevřené množiny a \mathcal{R} je míry nula. Nechť $\Gamma_u = {}^1\Gamma_u \cup {}^2\Gamma_u$ a $\Gamma_c = \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$, $\Gamma_c^{kl} = \partial\Omega^k \cap \partial\Omega^l$, $k \neq l$, $k, l \in \{1, \dots, s\}$. Nechť $\Omega(t) = \Omega \times I$, $\Gamma_\tau(t) = \Gamma_\tau \times I$, $\Gamma_u(t) = \Gamma_u \times I$, $\Gamma_0(t) = \Gamma_0 \times I$, $\Gamma_c(t) = \Gamma_c \times I$ označují části hranice $\partial\Omega(t) = \partial\Omega \times I$. Označme \mathbf{n} vnější normálu k hranici, $u_n = u_i n_i$, $\mathbf{u}_t = \mathbf{u} - u_n \mathbf{n}$, $\tau_n = \tau_{ij} n_j n_i$, $\tau_t = \tau - \tau_n \mathbf{n}$ jsou normálové a tečné složky vektorů posunutí a napětí $\mathbf{u} = (u_i)$, $\tau = (\tau_i)$, $\tau_i = \tau_{ij} n_j$, $i, j = 1, \dots, N$.

Předpokládejme, že objemové síly $\mathbf{F} \in W^{1,\infty}(I; [L^2(\Omega)]^N)$, povrchové síly $\mathbf{P} \in W^{1,\infty}(I; [L^2(\Gamma_\tau)]^N)$ a koeficienty elasticity $c_{ijkl} = c_{ijkl}(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$. Derivaci podle času označme symbolem " ' ". Předpokládejme, že na kontaktu Γ_c^{kl} kladný směr vnější normály $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}^k$ je orientován k oblasti Ω^k .

Úloha vede na řešení dynamické kontaktní úlohy s Coulombovským třením v nelineární reologii (Nedoma (2005c)):

Úloha (\mathcal{P}): Nechť $N = 2, 3, s \geq 2$. Hledáme vektorovou funkci $\mathbf{u} : \Omega \times \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$, splňující

$$\rho^\ell \left(\frac{\partial^2 u_i^\ell}{\partial t^2} + v_k^\ell \frac{\partial u_i^\ell}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \tau_{ij}(\mathbf{u}^\ell)}{\partial x_j} + F_i^\ell, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad \ell = 1, \dots, s, \quad \text{v } \Omega^\ell \times I, \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell) &= c_{ijkl}^*(\mathbf{u}^\ell) e_{kl}(\mathbf{u}^\ell), \\ c_{ijkl}^*(\mathbf{u}) &= 2\lambda [A(e_{ij}(\mathbf{u}^\ell))]^{\lambda-1} c_{ijkl}(\mathbf{x}), \quad i, j, k, l = 1, \dots, N, \quad \ell = 1, \dots, s, \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\tau_{ij} n_j = P_i, \quad i, j = 1, \dots, N \quad \text{na } \cup_{\ell=1}^s (\Gamma_\tau \cap \partial\Omega^\ell) \times I, \quad (2.120)$$

$$u_i = u_{2i}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad \text{na } \cup_{\ell=1}^s ({}^1\Gamma_u \cap \partial\Omega^\ell) \times I, \quad (2.121)$$

$$u_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad \text{na } \cup_{\ell=1}^s ({}^2\Gamma_u \cap \partial\Omega^\ell) \times I, \quad (2.122)$$

$$u_n = 0, \quad \tau_t = 0, \quad i, j = 1, \dots, N \quad \text{na } \cup_{\ell=1}^s (\Gamma_0 \cap \partial\Omega^\ell) \times I, \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} u_n^{lk} - u_n^{ll} &\leq 0, \quad \tau_n^k(\mathbf{u}^k) = \tau_n^l(\mathbf{u}^l) \equiv \tau_n^{kl}(\mathbf{u}) \leq 0, \\ (u_n^{lk} - u_n^{ll}) \tau_n^{kl}(\mathbf{u}) &= 0, \\ \mathbf{u}_t^{lk} - \mathbf{u}_t^{ll} = 0 &\implies \left| \tau_t^{kl}(\mathbf{u}) \right| \leq \mathcal{F}_c^{kl}(0) \left| \tau_n^{kl}(\mathbf{u}) \right|, \quad \text{na } \Gamma_c^{kl} \times I, \\ \mathbf{u}_t^{lk} - \mathbf{u}_t^{ll} \neq 0 &\implies \left| \tau_t^{kl}(\mathbf{u}) \right| = \\ &= -\mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_t') \left| \tau_n^{kl}(\mathbf{u}) \right| \frac{\mathbf{u}_t^{lk} - \mathbf{u}_t^{ll}}{|\mathbf{u}_t^{lk} - \mathbf{u}_t^{ll}|}, \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.125)$$

kde $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou dané funkce a $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$ např. nalezneme tak, že jsou řešením statické lineární kontaktní úlohy v lineární pružnosti s nebo bez tření charakterizované koeficientem tření \mathcal{F}_c^{kl} , $\rho = \rho(\mathbf{x})$ je hustota. Koeficient tření $\mathcal{F}_c^{kl} \equiv \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{u}')$ je globálně omezený, nezáporný a splňuje Carathéodoryho vlastnosti a má kompaktní nosič $\mathcal{S}\mathcal{F}_c \equiv \sup_{\mathbf{x}} (\mathcal{F}_c)$ definovaný vztahem (2.21).

Závislost koeficientu tření na \mathbf{u}' je znázorněn na obr.6. Označme ještě vektor rychlosti $\mathbf{v} = (v_k) \equiv (u_k')$, $(y)_+ \equiv \max\{y, 0\}$ označuje kladnou část veličiny y .

Variační řešení nelineární úlohy

Označení funkcionálních prostorů zavedeme standardním způsobem. Pro řešení úlohy (\mathcal{P}) budeme předpokládat, že koeficienty $C^* = (c_{ijkl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$ splňují podmínky

- (i) $\mathcal{C}^* : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{S}^N$,
- (ii) existuje $m_1 > 0$ taková, že
 $\|\mathcal{C}^*(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - \mathcal{C}^*(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2)\| \leq m_1 \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\| \quad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{S}^N, \text{ s.v. } \mathbf{x} \in \Omega$,
- (iii) existuje $m_2 > 0$ taková, že
 $(\mathcal{C}^*(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - \mathcal{C}^*(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2)) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \geq m_2 \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\| \quad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{S}^N, \text{ s.v. } \mathbf{x} \in \Omega$,
- (iv) pro $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^N$, $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{C}^*(\mathbf{x}, \mathbf{e})$ je měřitelná v Ω ,
- (v) zobrazení $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{C}^*(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in [L^2(\Omega)]^{N \times N}$,

kde \mathbb{S}^N je prostor symetrických tenzorů čtvrtého řádu, objemové a povrchové síly $\mathbf{F} \in W^{1,\infty}(I; [L^2(\Omega)]^N)$, $\mathbf{P} \in W^{1,\infty}(I; [L^2(\Gamma_\tau)]^N)$, funkce $\mathbf{u}_1 \in [H^1(\Omega)]^N$, $u_{1n}^k - u_{1n}^l = 0$ na $\bigcup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$, $\mathbf{u}_0 \in [H^1(\Omega)]^N$, hus-tota $\rho \in C(\Omega)$.

Definujme množiny skutečných a přípustných posunutí

$$\begin{aligned} V_0 &= \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega^1)]^N \times \dots \times [H^1(\Omega^s)]^N, \mathbf{v} = 0 \text{ na } \bigcup_{i=1}^s (\Gamma_u \cap \partial\Omega^i), \\ &\quad v_n = 0 \text{ na } \bigcup_{i=1}^s (\Gamma_0 \cap \partial\Omega^i), v_n^k - v_n^l = 0 \text{ s.v. na } \bigcup_{k,l} \Gamma_c^{kl}\}, \quad V = \mathbf{u}_2 + V_0, \\ K &= \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V_0, v_n^k - v_n^l \leq 0 \text{ s.v. na } \bigcup_{k,l} \Gamma_c^{kl}\}, \\ \mathcal{V}_0 &= L^2(I; V_0), \quad \mathcal{V} = \mathbf{u}'_2 + \mathcal{V}_0, \quad \mathcal{K} = L^2(I; K). \end{aligned}$$

V případech, kdy jednotlivé části kloubního systému mají možnost vedle posunu i možnost rotace, potom zavedeme množinu všech posunutí a rotací

$$\begin{aligned} R &= \bigcap_{i=1}^s R^i, \quad R^i = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega^i)]^N, e_{ij}(\mathbf{v}) = 0 \text{ s.v.}\}, \\ R^i &= \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega^i)]^3, \mathbf{v} = \mathbf{a}^i + \mathbf{b}^i \times \mathbf{x}\} \quad \text{pro } N = 3, \\ R^i &= \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega^i)]^2, v_1 = a_1^i - b^i x_2, v_2 = a_2^i + b^i x_1\} \quad \text{pro } N = 2, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^i$ jsou libovolné reálné vektory pro $N = 3$ a a_1^i, a_2^i, b^i jsou libovolné reálné skaláry pro $N = 2$. Množina K je konvexní kužel a je uzavřená podmnožina V_0 . Necht' $P_V = V_0 \cap R$ a necht' $V_0 = P_V \oplus Q_0$ je ortogonální rozklad V_0 .

Vynásobením (2.118) výrazem $\mathbf{v} - \mathbf{u}'$, kde \mathbf{v} jsou libovolné testovací funkce, integrací přes oblast Ω , užitím Greenovy věty a okrajových a kontaktních podmínek, dostáváme systém variačních nerovnic:

Úloha (\mathcal{P})_v : nalézt vektorovou funkci \mathbf{u} s $\mathbf{u}' \in \mathcal{K} \cap B(I; L^{2,N}(\Omega))$, takovou, že

$$\int_I \{(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + a(\mathbf{u}(t); \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + b(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}'(t))\} dt \geq \int_I (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) dt \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \quad (2.126)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.127)$$

kde předpokládáme, že vstupní data nelineární úlohy splňují

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &\in K, \\ a(\mathbf{u}_r; \mathbf{u}_r, \mathbf{v} - \mathbf{u}_r) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_r) &\geq (\mathbf{f}(rk), \mathbf{v} - \mathbf{u}_r) \quad r = 0, 1, \forall \mathbf{v} \in K, \end{aligned} \quad (2.128)$$

kde $k = t_p/m$, m celé číslo, je krok v čase a kde

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}'', \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^s (\mathbf{u}''^i, \mathbf{v}^i) = \int_\Omega \rho u_i'' v_i d\mathbf{x}, \\ a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^s a^i(\mathbf{w}^i; \mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i) = \\ &= 2 \int_\Omega \lambda [A(e_{ij}(\mathbf{w}))]^{\lambda-1} c_{ijkl}(\mathbf{w}) e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^s b^i(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i) = \int_\Omega \rho u_k \frac{\partial v_l}{\partial x_k} w_l d\mathbf{x}, \\ (\mathbf{f}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^s (\mathbf{f}^i, \mathbf{v}^i) = \int_\Omega F_i v_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\tau} P_i v_i ds, \\ j(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^s j^i(\mathbf{v}^i) = \int_{\bigcup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \mathcal{F}_c^{kl}(\mathbf{u}_t^i) |\tau_n^{kl}(\mathbf{u})| |\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l| ds, \end{aligned}$$

kde bilineární forma $a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ je symetrická v \mathbf{u}, \mathbf{v} a splňuje $a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_0^* \|\mathbf{u}\|_{1,N}^2$, $c_0^* = \text{const.} > 0$, $|a(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c_1^* \|\mathbf{u}\|_{1,N} \|\mathbf{v}\|_{1,N}$, $c_1^* = \text{const.} > 0$.

Hlavní výsledek je dán následující větou:

Věta 5: Necht' $N \geq 2$ a necht' jsou splněny výše uvedené předpoklady: objemové síly $\mathbf{F} \in W^{1,\infty}(I; [L^2(\Omega)]^N)$, povrchové síly $\mathbf{P} \in W^{1,\infty}(I; [L^2(\Gamma_\tau)]^N)$ a koeficienty elasticity $c_{ijkl} = c_{ijkl}(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$. Potom existuje funkce \mathbf{u} taková, že

$$\mathbf{u} \in L^\infty(I; K), \mathbf{u}' \in \mathcal{K} \cap B(I; L^{2,N}(\Omega)), \mathbf{u}'' \in L^2(I; V_0'),$$

a splňující počáteční podmínky $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ a

$$\int_I \{(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + a(\mathbf{u}(t); \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + b(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}'(t))\} dt \geq \int_I (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}'(t)) dt \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \quad (2.129)$$

Důkaz je založen na užití techniky penalizace a regularizace, čímž se původní úloha řešení variačních nerovnic převede na řešení úlohy založené na řešení variačních rovnic.

Kontaktní podmínku (2.124a) nahradíme nelineární okrajovou podmínkou $\tau_n^{kl}(\mathbf{u}') = -\frac{1}{\delta} [u_n^k - u_n^l]_+$, kde $[\cdot]_+ := \max\{\cdot, 0\}$, $\delta > 0$, jež je kombinována s jistým zhlazením členu se třením. Jelikož funkcionál $j(\mathbf{v})$ není diferencovatelný ve smyslu Gâteauxově, nahradíme jej jeho regularizací $j_\varepsilon(\mathbf{v})$. Proto zavedeme funkci $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon, \quad (2.130)$$

kteřá regularizuje funkci $x \rightarrow |x|$. Potom φ_ε je diferencovatelná a splňuje nerovnost

$$||x| - \varphi_\varepsilon(|x|)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon \geq 0.$$

Funkce φ_ε definovaná vztahem (2.130) je konvexní a dvakrát spojitě diferencovatelná.

Potom budeme řešit následující úlohu:

Úloha (\mathcal{P})_{vpr}: hledáme vektorovou funkci \mathbf{u} s $\mathbf{u}' \in \mathcal{V} \cap B(I; L^{2,N}(\Omega))$ a $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ takovou, že pro všechna $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ platí

$$\begin{aligned} & \int_I \{(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}(t); \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \\ & + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} [u_n^k(t) - u_n^l(t)]_+ (v_n^k - v_n^l) ds + \\ & + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl} [u_n^k(t) - u_n^l(t)]_+ \nabla \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}_t^k - \mathbf{u}_t^l) (\mathbf{v}_t^k - \mathbf{v}_t^l) ds\} dt = \\ & = \int_I (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}) dt \quad \text{a.e. } t \in I. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Existenci $\mathbf{u}_\varepsilon \cong \mathbf{u}$ dokážeme užitím konečně-dimensionální aproximace (Galerkin). Sestrojíme separabilní bázi $\{\mathbf{v}_i\}$ prostoru V_0 , a jelikož prvky báze jsou lineárně nezávislé, potom jejich lineární kombinace jsou husté ve V_0 , $V_m = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$, $\cup_{m=1}^\infty V_m$ je husté v V_0 . Položme

$$\mathbf{u}_m(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_2(t, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) \mathbf{v}_j(\mathbf{x}), \quad t \in I, \mathbf{x} \in \Omega, m \in \mathbb{N}.$$

Potom přibližné řešení řádu m splňuje systém obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}_m''(t), \mathbf{v}_k) + a(\mathbf{u}_m(t); \mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_k) + b(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{v}_k) + \\ & + \left\langle \frac{1}{\delta} [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+, v_{kn}^k - v_{kn}^l \right\rangle_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} + \\ & + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl} (\mathbf{u}_{mt}^k(t) - \mathbf{u}_{mt}^l(t)) [u_{mn}^k(t) - u_{mn}^l(t)]_+ \cdot \\ & \nabla \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}_{mt}^k(t) - \mathbf{u}_{mt}^l(t)) \cdot (\mathbf{v}_{kt}^k - \mathbf{v}_{kt}^l) ds = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_k), \quad k = 1, \dots, m, \text{ a.e. } t \in I, \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\langle \mathbf{u}_m(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{v}_k \rangle_\Omega = 0, \langle \mathbf{u}_m'(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}_k \rangle_\Omega = 0. \quad (2.133)$$

Řešitelnost tohoto systému plyne z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

A priorní odhady:

Vynásobme (2.132) $c'_{mj}(t)$, sečteme přes j , integrujme přes $[0, t]$, $t \in I$ a položme

$$\mathbf{u}'_m(t) - \mathbf{u}'_2(t) = \sum_{j=1}^m c'_{mj}(t) \mathbf{v}_j,$$

potom

$$\begin{aligned} & \int_0^t \{ (\mathbf{u}''_m(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau)) + a(\mathbf{u}_m(\tau); \mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau)) + b(\mathbf{u}'_m(\tau), \mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau)) + \\ & + \left\langle \frac{1}{\delta} [u''_{mn}(\tau) - u'_{mn}(\tau)]_+, u''_{mn}(\tau) - u'_{mn}(\tau) \right\rangle_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} + \\ & + \int_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}} \frac{1}{\delta} \mathcal{F}_c^{kl} (\mathbf{u}'_{mt}(\tau) - \mathbf{u}''_{mt}(\tau)) [u''_{mn}(\tau) - u'_{mn}(\tau)]_+ \nabla \varphi_\varepsilon (\mathbf{u}'_{mt}(\tau) - \mathbf{u}''_{mt}(\tau)) \cdot \\ & \cdot (\mathbf{u}'_{mt}(\tau) - \mathbf{u}''_{mt}(\tau)) ds \} d\tau = \int_0^t \{ (\mathbf{f}(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau) - \mathbf{u}'_2(\tau)) + (\mathbf{u}''_m(\tau), \mathbf{u}'_2(\tau)) + \\ & + a(\mathbf{u}_m(\tau); \mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_2(\tau)) - b(\mathbf{u}'_m(\tau), \mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_2(\tau)) \} d\tau. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Podle definice prostoru \mathcal{V} je $u''_{2n} - u'_{2n} = 0$ na $\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}$, dále je $\mathbf{u}'_m(0) = \mathbf{u}'_2(0)$.

Jelikož $\nabla \varphi_\varepsilon (\mathbf{u}'_{mt} - \mathbf{u}''_{mt}) (\mathbf{u}'_{mt} - \mathbf{u}''_{mt}) \geq 0$ (φ_ε je konvexní a má minimum v 0) potom poslední člen na levé straně je ≥ 0 . Dále platí odhady analogické jako v odstavci 2.2.4 a

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= 0, \quad \forall \mathbf{u} \in V_0, \mathbf{v} \in V_0, \mathbf{v} \in V_0 \cap L^{2,N}(\Omega) \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) &= 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \end{aligned}$$

$$\int_0^t b(\mathbf{u}'_m(\tau), \mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_m(\tau)) d\tau = b(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) - b(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) = 0$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t b(\mathbf{u}'_m(\tau), \mathbf{u}_m(\tau), \mathbf{u}'_2(\tau)) d\tau \leq \\ & \leq c_3 (t_p)^{\frac{3}{2}} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^\infty(I; H^{1,N}(\Omega))}^2 \|\mathbf{u}'_2(t)\|_{0,1,\Omega \times I}. \end{aligned}$$

Užitím všech výše uvedených výsledků a odhadů analogických odstavci 2.2.4 dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{0,N}^2 + c_0^* \|\mathbf{u}_m(t)\|_{1,N}^2 + \int_0^t \frac{1}{\delta} \left\| [u''_{mn}(\tau) - u'_{mn}(\tau)]_+ \right\|_{\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl}}^2 d\tau \leq \\ & \leq \|\mathbf{f}(t)\|_{\mathcal{V}'_0} \left[\left(\int_0^t \|\mathbf{u}'_m(\tau)\|_{1,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{u}'_2(t)\|_{0,1,\Omega \times I} \right] + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_1\|_{0,N}^2 + \\ & + c_{01}^* \|\mathbf{u}_0\|_{1,N}^2 + \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{0,N} \|\mathbf{u}'_2(t)\|_{0,N} + \\ & + \|\mathbf{u}'_2(t)\|_{0,\Omega \times I} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}'_m(\tau)\|_{0,N}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + c_1 (t_p)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^\infty(I; H^{1,N}(\Omega))} \|\mathbf{u}'_2(t)\|_{0,1,\Omega \times I} + \\ & + c_3 (t_p)^{\frac{3}{2}} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^\infty(I; H^{1,N}(\Omega))}^2 \|\mathbf{u}'_2(t)\|_{0,1,\Omega \times I}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Potom existuje konstanta C , nezávislá na Faedo-Galerkinově indexu m a parametrech δ a ε , tak, že máme

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^\infty(I; L^{2,N}(\Omega))}^2 + c_0 \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^\infty(I; H^{1,N}(\Omega))}^2 + \\ & + \frac{1}{\delta} \left\| [u''_{mn}(t) - u'_{mn}(t)]_+ \right\|_{0, \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I} \leq C, \quad C = \text{const.} \end{aligned} \quad (2.136)$$

což dokazuje existenci řešení $\mathbf{u}_m(t)$ pro všechna $t \in I$.

Dále platí

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|_{0,1,\Omega \times I}^2 = \int_0^{t_p} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{1,N}^2 dt \leq t_p \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^\infty(I; H^{1,N}(\Omega))}^2 \leq t_p C_0 = C. \quad (2.137)$$

Položme v (2.132) jako testovací funkci $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}'_m(t_2) - \mathbf{u}'_m(t_1) - \mathbf{u}'_2(t_2) + \mathbf{u}'_2(t_1)$, integrujme přes t v mezích od t_1 do t_2 , vynásobme výsledek členem $|t_2 - t_1|^{-2(1-\gamma)}$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ a integrujme přes t_1 a t_2 , $0 < t_1 < t_p$ a $t_1 < t_2 < t_p$. Potom analogickým postupem jako v odstavci 2.2.4 dostáváme

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}'_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))}^2 &\leq |\mathbf{u}'_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))} |\mathbf{u}'_2|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))} + \\
&+ 2C(t_p, \gamma) [C_0^* \|\mathbf{u}_m\|_{0,1,\Omega \times I} \left(\|\mathbf{u}'_m\|_{0,1,\Omega \times I} + \|\mathbf{u}'_2\|_{0,1,\Omega \times I} \right) + \\
&+ C_3 \|\mathbf{u}_m\|_{0,1,\Omega \times I}^2 \left(\|\mathbf{u}'_m\|_{0,1,\Omega \times I} + \|\mathbf{u}'_2\|_{0,1,\Omega \times I} \right) + \\
&+ \frac{1+\|\mathcal{F}_c^{kl}\|_\infty}{\delta} \left\| [u'_{mn} - u''_{mn}]_+ \right\|_{0, \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I} \|\mathbf{u}'_m\|_{0, \cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I} + \\
&+ \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{V}'_0} \left(\|\mathbf{u}'_m\|_{0,1,\Omega \times I} + \|\mathbf{u}'_2\|_{0,1,\Omega \times I} \right),
\end{aligned} \tag{2.138}$$

odtud

$$|\mathbf{u}'_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))}^2 \leq C_1 |\mathbf{u}'_m|_{H^{\frac{1}{2}-\gamma}(I;L^2,N(\Omega))} + C_2(t_p, \gamma, \delta), \tag{2.139}$$

kde C_1, C_2 jsou konstanty nezávislé na ε a m a jelikož $H^{\frac{1}{2}+\gamma,N}(\Omega)$ je spojitě vnořen v $L^{2,N}(\Gamma_c^{kl})$, potom

$$\|\mathbf{u}'_m\|_{H^{(\frac{1}{2}-\gamma)^2}(\cup_{k,l} \Gamma_c^{kl} \times I)} \leq C(t_p, \gamma, \delta), \tag{2.140}$$

kde konstanta $C(t_p, \gamma, \delta) > 0$ je nezávislá na m a ε .

Následně dokážeme limitní procesy přes m, ε, δ analogicky jako v odstavci 2.2.4.

Poznámka: V případě, že lze setrvačné síly zanedbat, potom úloha vede na úlohu kvazi-statickou. V případě, že vektor posunutí a teplota nezávisí na čase t (řešíme-li úlohu v termo-pružnosti), potom řešíme úlohu statickou, jež byla řešena v Nedoma et al. (1999a,b), Nedoma, Hlaváček (2002).

3 Shrnutí

Studie je výzkumnou zprávou Projektu MPO ČR č. FT-TA/087 - “Komplexní výzkum biomechanických podmínek aplikace umělých skeletálních náhrad, interakce náhrad s organismem, vyhodnocení příčin selhání a návrh podmínek pro zvýšení jejich stability” za rok 2005 a úkol:

B.2. Formulace 2D a 3D matematických modelů v nelineární oblasti (termo-pružnosti a (termo-) vazko-pružnosti).

Ve studii je diskutován problém navigované operační techniky ve vazbě na využití matematických modelů kloubních systémů. Jsou formulovány matematické 2D a 3D modely náhrad lidských kloubů založené na kontaktních úlohách lineární a nelineární teorie pružnosti, termo-pružnosti a (termo-) vazko-pružnosti. Je provedena jejich základní matematická analýza pro statické a dynamické zatěžování lidských kloubů a jejich totálních náhrad. Je diskutováno numerické řešení úlohy založené na vazkopružnosti s krátkou pamětí a na metodě konečných prvků. Je nalezen odhad chyby přibližného řešení úlohy. Informace o některých dílčích problémech, diskutovaných v této studii, lze nalézt např. v Nečas (1967), Duvaut, Lions (1976), Charnley (1979), Nečas, Hlaváček (1981), Nedoma (1987), Hlaváček, Haslinger, Nečas, Lovíšek (1988), Nedoma (1993), Ionescu, Sofonea (1993), Rabinowitz (1995), Jarušek, Eck (1999), Nedoma et al. (1999a,b), Hlaváček, Nedoma (2002), Han, Sofonea (2002), Wriggers (2002), Daněk et al. (2004), Nedoma et al. (2003), případně v zde uvedených citacích. Předložené modelové úlohy jsou formulovány pro analýzu pole napětí a deformací vyvolané statickým resp. dynamickým zatížením kyčelního resp. kolenního kloubu v souvislosti s navigovanou operační technikou a v souvislosti s užitím počítačové tomografie - CT a nukleární magnetické rezonance - MRI, nedovolují však studovat analýzu chůze, neboť v tomto případě se geometrie systému v každém časovém okamžiku s časem mění.

Literatura

- [1] Adams, R.A. (1975). Sobolev Spaces, Academic Press, New York.
- [2] Barbu, V. (1984). Optimal Control of Variational Inequalities, Pitman, Boston.
- [3] Besov, O.V., Il'in, V.P., Nikolskij, S.M. (1975). Integral Transformations of Functions and Imbedding Theorems. Nauka, Moscow (in Russian).
- [4] Bombeli, R. (1983). Osteoarthritis of the Hip. Springer Vlg., Berlin, 2nd Edition.
- [5] Bartoš, M. (1998). Využití matematického modelu k posouzení některých artroplastických operací kyčle. Habilitační práce, ÚVN, Praha, 1998.
- [6] Daněk, J., Denk, F., Hlaváček, I., Nedoma, J., Stehlík, J., Vavřík, P. (2004). On the stress-strain analysis of the knee replacement. In: Lagana et al. (Eds). ICCSA 2004, LNCS 3044, Springer Vlg., 456-466.
- [7] Debrunner, H.V. (1975). Studien zur Biomechanik des Hüftgelenkes I. Z. Orthop., 377-388.
- [8] Duvaut, G., Lions, J.L. (1976). Inequalities in Mechanics and Physics, Springer, Berlin.
- [9] Eck, Ch. (1996). Existenz und Regularität der Lösungen für Kontaktprobleme mit Reibung, PhD Thesis, University of Stuttgart.
- [10] Eck, Ch., Jarušek, J., Krbec, M. (2005). Unilateral Contact Problems. Variational Methods and Existence Theorems. Taylor and Francis Group, Section Chapman/CRC, Pure and Appl. Math. 270, New York.
- [11] Han, W., Sofonea, M. (2002). Quasistatic Contact in Viscoelasticity and Viscoplasticity. AMS, Intern. Press, Providence, NJ.
- [12] Haslinger, J., Hlaváček, I., Nečas, J. (1996). Numerical Methods for Unilateral Problems in Solid Mechanics. In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L., Handbook of Numerical Analysis, vol.IV, Elsevier, Amsterdam, 313-486.
- [13] Hlaváček, I., Haslinger, J., Nečas, J., Lovíšek, J. (1988). Solution of Variational Inequalities in Mechanics. Springer Vlg., New York.
- [14] Hlaváček, I., Nedoma, J. (2002). On a solution of a generalized semi-coercive contact problem in thermo-elasticity. Mathematics and Computers in Simulation, 60, 1-17.
- [15] Charnley, J. (1979). Low Friction Arthroplasty. Springer Vlg., New York.
- [16] Jarušek, J., Eck, C. (1999). Dynamic contact problems with small Coulomb friction for viscoelastic bodies. Existence of solutions. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 9(1999), 11-34.
- [17] Nečas, J. (1967). Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Praha, Academia.
- [18] Nečas, J., Hlaváček, I. (1981). Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies. An Introduction. Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York.

- [19] Nedoma, J. (1983). On one type of Signorini problem without friction in linear thermo-elasticity. *Appl. Math.* 28(6),393-407.
- [20] Nedoma, J. (1987). On the Signorini problem with friction in linear thermoelasticity: The quasi-coupled 2D-case. *Apl. Mat.* 32, 3, 186-199.
- [21] Nedoma, J. (1993). *Mathematical Modelling in Biomechanics. Bone- and Vascular-Implant Systems.* Habilitation thesis. ICS AS CR, Prague.
- [22] Nedoma, J. (1998). *Numerical Modelling in Applied Geodynamics*, John Wiley&Sons, Chichester, New York, pp. 966.
- [23] Nedoma, J. (2005a). Solvability of Dynamic Multibody Contact Problems with Coulomb Friction and Damping in Visco-Elasticity With Short Memory. *Přípravuje se do tisku.*
- [24] Nedoma, J. (2005b). Solution method for the weight-bearing human joint replacements. *Přípravuje se do tisku.*
- [25] Nedoma, J. (2005c). On the dynamic contact problem with Coulomb friction in nonlinear elasticity. *MODELLING'2005*, Pilsen, July 4-8,2005, *přípravuje se do tisku.*
- [26] Nedoma, J., Bartoš, M., Kestřánek sen, Z., Kestřánek jr, Z., Stehlík, J. (1999a). Numerical methods for constrained optimization in 2D and 3D biomechanics. *Numer. Linear Algebra Appl.* 6, 557-586.
- [27] Nedoma, J. et al. (1999b). Numerical analysis of the loosened total hip replacements (THR). *Mathematics and Computers in Simulation*, 50, 285-304.
- [28] Nedoma, J. and Hlaváček, I. (2002). On a solution of a semi-coercive contact problem in a non-linear thermo-elastic rheology. *Math. Comput. in Simulation* 60, 117-127.
- [29] Nedoma, J., Hlaváček, I., Daněk, J., Vavřík, P., Stehlík, J., Denk, F. (2003). Some recent result on a domain decomposition method in biomechanics of human joints. *LNCS I-III*, vol. 2667-2669, Springer Vlg.
- [30] Rabinowitz, E. (1995). *Friction and Wear of Materials.* Wiley, New York, 2nd edition.
- [31] Wriggers, P.(2002). *Computational Contact Mechanics.* John Willey&Sons, Chichester.