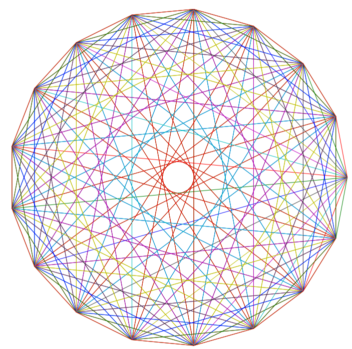
Lineární algebra a optimalizace na slidech

Rohn, Jiří
2004

Lineární algebra a optimalizace na slidech

Jiří Rohn
Ústav informatiky
Akademie věd České republiky

Technical Report 905



Obsah

1.	Matice a soustavy rovnic	3
2.	Vektorové prostory	131
3.	Vektorové prostory se skalárním součinem	183
4.	Lineární zobrazení	207
5.	Matice II	227
6.	Determinanty	285
7.	Vlastní čísla	313
8.	Lineární programování	346
	Literatura	432
	Rejstřík	437

Graf na titulní straně je vytvořen v MATLABu příkazy `plot(fft(eye(17))), axis square, axis off`

Část 1:

Matice a soustavy rovnic

Matice

Značení. Množinu reálných čísel značíme $\mathbb{R}$, komplexních $\mathbb{C}$.

Definice. Obdélníkové schéma sestavené z reálných čísel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme (reálnou) maticí typu $m \times n$. Prvek a_{ij} se nazývá ij-tý koeficient matice A. Množinu všech reálných matic typu $m \times n$ značíme $\mathbb{R}^{m \times n}$. Je-li $m = n$, říkáme, že matice je čtvercová řádu n.

Podobně definujeme množinu komplexních matic typu $m \times n$ a značíme ji $\mathbb{C}^{m \times n}$.

Poznámky

- matice je matematickou formalizací tabulky,
- vždy předpokládáme $m \geq 1$, $n \geq 1$, tj. neuvažujeme prázdné matice,
- matice značíme velkými latinskými písmeny,
- v protikladu k maticím se čísla z $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ nazývají skaláry a obvykle je značíme malými řeckými písmeny,
- koeficienty matice A značíme a_{ij} nebo A_{ij},
- v dalším se budeme většinou zabývat reálnými maticemi.

Rovnost matic

Definice. Matice A, B se rovnají, což zapisujeme $A = B$, jestliže jsou stejného typu $m \times n$ a platí

$$A_{ij} = B_{ij}$$

pro všechna $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Poznámka. $A \neq B$ tedy znamená, že buďto matice jsou různých typů, nebo jsou stejného typu a platí $A_{ij} \neq B_{ij}$ pro jisté i, j.

Sečítání matic

Definice. Nechť A, B jsou matice typu $m \times n$. Potom jejich součtem $A+B$ nazýváme matici typu $m \times n$ s koeficienty

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

pro $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Poznámka. Jsou-li A, B různých typů, potom součet $A+B$ není definován.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Násobení matice skalárem

Definice. Nechť A je matice typu $m \times n$, α skalár. Potom $\alpha \cdot A$ je matice typu $m \times n$ s koeficienty

$$(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij}$$

pro $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Příklad.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Upozornění. Nikdy nepíšeme $A \cdot \alpha$.

Poznámky

- podobně jako u násobení reálných čísel tečku většinou vynecháváme a píšeme αA místo $\alpha \cdot A$,

- definujeme nulovou matici typu $m \times n$ jako

$$0_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

- místo 0_{mn} píšeme pouze 0, je-li typ z kontextu zřejmý,

- ve výrazu typu $0 \cdot 0$ je vlevo skalár, vpravo nulová matice.

Vlastnosti sečítání matic a násobení matice skalárem

Věta 1. *Nechť* A, B, C *jsou matice typu* $m \times n$ *a* α, β *skaláry. Potom platí:*

1) $A + B = B + A$ *(komutativnost)*
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(asociativnost)*
3) $A + 0 = A$ *(existence nulového prvku)*
4) $A + (-1) \cdot A = 0$ *(existence opačného prvku)*
5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6) $1 \cdot A = A$
7) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(distributivnost)*
8) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(distributivnost).*

Důkaz

Ve všech osmi případech se jedná o rovnost matic, musíme proto podle definice rovnosti dokázat, že pro každé $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ se ij-tý koeficient matice na levé straně rovná ij-tému koeficientu matice na pravé straně.

1) Pro každé $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ je $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ podle definice součtu matic; $A_{ij} + B_{ij} = B_{ij} + A_{ij}$ podle komutativnosti součtu reálných (komplexních) čísel; nakonec $B_{ij} + A_{ij} = (B + A)_{ij}$ podle definice součtu matic. Spojením všech tří rovností dostáváme $(A+B)_{ij} = (B+A)_{ij}$ pro každé i, j, tedy $A + B = B + A$ podle definice rovnosti matic. V dalším vypisujeme vždy celý řetězec rovností aniž bychom zdůvodňovali jednotlivé kroky.

2) Pro každé i, j (míníme tím ovšem $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) je $((A + B) + C)_{ij} = (A + B)_{ij} + C_{ij} = (A_{ij} + B_{ij}) + C_{ij} = A_{ij} + (B_{ij} + C_{ij}) = A_{ij} + (B + C)_{ij} = (A + (B + C))_{ij}$, tedy $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(Pokračování důkazu)

3) Pro každé i, j je $(A+0)_{ij} = A_{ij} + 0_{ij} = A_{ij} + 0 = A_{ij}$, takže $A + 0 = A$.

4) Pro každé i, j je $(A + (-1) \cdot A)_{ij} = A_{ij} + ((-1) \cdot A)_{ij} = A_{ij} + (-1) \cdot A_{ij} = 0 = 0_{ij}$, což dává $A + (-1) \cdot A = 0$.

5) Pro každé i, j je $(\alpha(\beta A))_{ij} = \alpha(\beta A)_{ij} = \alpha(\beta A_{ij}) = (\alpha\beta)A_{ij} = ((\alpha\beta)A)_{ij}$, což znamená, že $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

6) Pro každé i, j je $(1 \cdot A)_{ij} = 1 \cdot A_{ij} = A_{ij}$, čímž dostáváme $1 \cdot A = A$.

7) Pro každé i, j je $(\alpha(A + B))_{ij} = \alpha(A + B)_{ij} = \alpha(A_{ij} + B_{ij}) = \alpha A_{ij} + \alpha B_{ij} = (\alpha A)_{ij} + (\alpha B)_{ij} = (\alpha A + \alpha B)_{ij}$, což dokazuje, že $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

8) Nakonec, pro každé i, j je $((\alpha + \beta)A)_{ij} = (\alpha + \beta)A_{ij} = \alpha A_{ij} + \beta A_{ij} = (\alpha A)_{ij} + (\beta A)_{ij} = (\alpha A + \beta A)_{ij}$, z čehož plyne poslední rovnost $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$. $\square$

Násobení matic

Definice. Je-li A matice typu $m \times p$ a B matice typu $p \times n$, potom $A \cdot B$ je matice typu $m \times n$ definovaná předpisem

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$$

pro $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Poznámka. Nemůže-li dojít k nedorozumění, píšeme AB místo $A \cdot B$.

Upozornění. Maticovému součinu vzhledem k jeho důležitosti je třeba věnovat zvláštní pozornost.

Poznámky k maticovému součinu

- k proveditelnosti výrazu

$$\sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$$

  je třeba, aby počet sloupců matice A se rovnal počtu řádků matice B; z toho plyne předpoklad, že A je typu $m \times p$, B typu $p \times n$,

- je-li A typu $m \times p$, B typu $r \times n$, kde $p \neq r$, potom součin $A \cdot B$ není definován,

- **Příklady:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 27 \\ 47 & 54 & 61 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ není def.}$$

Jednotková matice

Čtvercová matice řádu n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(s jedničkami na diagonále a nulami mimo ni) se nazývá jednotková matice. Je-li řád zřejmý z kontextu, píšeme místo I_n pouze I.

Poznámka. Jak uvidíme, hraje jednotková matice u maticového součinu podobnou roli jako jednička u reálných čísel (věta 2, tvrzení 5)).

Vlastnosti součinu matic

Věta 2. *Nechť A, B, C jsou matice, α skalár. Potom:*

1) *Jestliže součin $(AB)C$ je definován, potom i součin $A(BC)$ je definován a platí $(AB)C = A(BC)$,*
2) *jestliže $A(B+C)$ je definován, potom i $AB+AC$ je definován a platí $A(B+C) = AB+AC$,*
3) *jestliže $(A+B)C$ je definován, potom i $AC+BC$ je definován a platí $(A+B)C = AC+BC$,*
4) *je-li AB definován, je $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,*
5) *je-li A typu $m \times n$, potom $I_m A = A I_n = A$.*

Důkaz

1) Jestliže součin $(AB)C$ je definován, potom A je typu $m\times p$, B typu $p\times r$ a C typu $r\times n$ pro jistá m, p, r, n. Potom součin BC je definován a je typu $p\times n$, takže $A(BC)$ je definován a je typu $m\times n$ stejně jako $(AB)C$. Pro každé $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$ potom platí $((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{r}(AB)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell}B_{\ell k}C_{kj} = \sum_{\ell=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} A_{i\ell}B_{\ell k}C_{kj} = \sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell}\sum_{k=1}^{r} B_{\ell k}C_{kj} = \sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell}(BC)_{\ell j} = (A(BC))_{ij}$, takže $(AB)C = A(BC)$.

2) Jestliže $A(B+C)$ je definován, potom A je typu $m\times p$ a $B+C$ typu $p\times n$ pro jistá m, p, n, z čehož plyne, že B i C jsou typu $p\times n$, takže součiny AB i AC jsou definované a jsou oba typu $m\times n$ stejně tak jako matice $A(B+C)$. Pro každé $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$ je potom $(A(B+C))_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}(B_{kj}+C_{kj}) = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj}+\sum_{k=1}^{p} A_{ik}C_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB + AC)_{ij}$, takže $A(B+C) = AB + AC$.

3) Rozborem typů bychom dokázali tak jako v části 2) že je-li $(A+B)C$ definován, je i $AC+BC$ definován a je stejného typu. Je-li p počet sloupců

(Pokračování důkazu)

matice A, potom pro každé $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ platí $((A+B)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}(A+B)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(A_{ik}+B_{ik})C_{kj} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}C_{kj} + \sum_{k=1}^{p} B_{ik}C_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = (AC+BC)_{ij}$, takže $(A+B)C = AC + BC$.

4) Je-li součin AB definován, potom A je typu $m \times p$ a B typu $p \times n$ pro jistá m, p, n. Potom αA je stejného typu jako A a αB stejného typu jako B, takže součiny $(\alpha A)B$ i $A(\alpha B)$ jsou definované a příslušná matice je typu $m \times n$ tak jako AB. Pro každé $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ potom dostáváme $(\alpha(AB))_{ij} = \alpha(AB)_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(\alpha A)_{ik}B_{kj} = ((\alpha A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}(\alpha B)_{kj} = (A(\alpha B))_{ij}$, což dokazuje, že $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

5) Pro každé $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ je $(I_m A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(I_m)_{ik}A_{kj} = \sum_{k \neq i} 0 \cdot A_{kj} + 1 \cdot A_{ij} = A_{ij}$, takže $I_m A = A$. Podobně $(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(I_n)_{kj} = \sum_{k \neq j} A_{ik} \cdot 0 + A_{ij} \cdot 1 = A_{ij}$, tedy $AI_n = A$. $\square$

Nekomutativnost součinu matic

Násobení matic není komutativní, tj. obecně neplatí $AB = BA$. Jsou k tomu tyto důvody:

- je-li A typu $m \times p$ a B typu $p \times n$, kde $m \neq n$, potom AB je definován, kdežto BA není definován,

- je-li $m = n$, potom AB je čtvercová řádu m a BA je čtvercová řádu p, takže $AB \neq BA$ je-li $m \neq p$,

- je-li $m = p = n$, potom AB i BA jsou čtvercové řádu m, ale může být $AB \neq BA$:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+fc & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix},$$
takže stačí volit $bg \neq fc$ aby součiny byly různé.

(Pokračování)

Uvádí se, že nejčastější chybou při maticových výpočtech je nerespektování nekomutativnosti maticového součinu. Např. pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2,$$

nikoliv „$\ldots = A^2 + 2AB + B^2$", jak by napovídala analogie s reálnými čísly.

Dále, z $AB = AC$ obecně neplyne $B = C$: pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

je

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

ale $B \neq C$.

Transponovaná matice

Definice. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definujeme transponovanou matici $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ předpisem

$$(A^T)_{ji} = A_{ij} \qquad (i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n).$$

Poznámka. Slovně, i-tý řádek matice A se stává i-tým sloupcem matice A^T $(i = 1,\ldots,m)$.

Příklad.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Vlastnosti transpozice

Věta 3. *Platí:*

1) $(A^T)^T = A$,
2) *jsou-li* A, B *stejného typu, je* $(A + B)^T = A^T + B^T$,
3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}$,
4) *je-li* AB *definován, je i* $B^T A^T$ *definován a platí* $(AB)^T = B^T A^T$ *(důležitá a často používaná vlastnost).*

Důkaz

1) Je-li A typu $m \times n$, potom A^T je typu $n \times m$ a $(A^T)^T$ je opět typu $m \times n$. Pro každé $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ potom platí $((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = A_{ij}$, takže $(A^T)^T = A$.

2) Jsou-li A, B stejného typu $m \times n$, potom A^T, B^T jsou stejného typu $n \times m$, takže součet $A^T + B^T$ je definován a je stejného typu jako $(A+B)^T$ a pro každé $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ je $((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = (A^T + B^T)_{ij}$, takže $(A+B)^T = A^T + B^T$.

3) Je-li A typu $m \times n$, potom $(\alpha A)^T$ i αA^T jsou typu $n \times m$ a pro $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ platí $((\alpha A)^T)_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha A_{ji} = \alpha (A^T)_{ij} = (\alpha A^T)_{ij}$, což dokazuje, že $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

4) Je-li součin AB definován, potom A je typu $m \times p$ a B je typu $p \times n$ pro jistá m, p, n. Potom B^T je typu $n \times p$ a A^T je typu $p \times m$, takže součin $B^T A^T$ je definován a je typu $n \times m$ stejně tak jako $(AB)^T$. Pro každé $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ dostáváme potom $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{p} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{p} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$, čímž je dokázáno, že $(AB)^T = B^T A^T$. $\square$

Symetrická matice

Definice. Matice A se nazývá symetrická jestliže $A^T = A$.

Poznámky. Symetrická matice je nutně čtvercová. Jsou-li $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom $A+B$ i αA jsou symetrické (AB obecně ne).

Věta 4. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je A^TA symetrická.*

Důkaz. Podle tvrzení 4) a 1) věty 3 platí $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$, takže matice A^TA se transpozicí nemění a je tedy symetrická. $\square$

Vektory

Definice. Matici typu $n \times 1$ nazýváme n-rozměrným (aritmetickým, sloupcovým) vektorem a značíme ho

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{(místo } \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}\text{)}$$

resp. $x = (x_i)$. Koeficienty x_i se nazývají složky (souřadnice) vektoru x. Množinu všech reálných (resp. komplexních) n-rozměrných vektorů značíme $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Shrnutí značení. Vektory značíme malými latinskými písmeny, matice velkými latinskými, skaláry malými řeckými.

Operace s vektory

- protože vektory jsou speciálním případem matic, vztahují se na ně dříve definované operace: pro $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$ je
  $x + y = (x_i + y_i)$, $\alpha x = (\alpha x_i)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$,

- násobení matic nelze jednoduše přenést, protože $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ a $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ lze násobit jen pro $n = 1$; lze však zavést skalární součin

$$x^T y = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i),$$

  což je matice 1×1, kterou ztotožňujeme s tímto číslem*,

*pro $x, y \in \mathbb{C}^n$ se skalární součin definuje jako $\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$, kde pruh značí komplexně sdružené číslo

(Pokračování)

- pro $x = (x_i) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_j) \in \mathbb{R}^n$ definujeme vnější součin

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} (y_1, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \dots & x_my_n \end{pmatrix},$$

- pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ definujeme

$$A_{i\bullet} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$$

(i-tý řádek A) a

$$A_{\bullet j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

(j-tý sloupec A).

Eukleidovská norma

Definice. Číslo

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$$

nazýváme eukleidovskou normou vektoru $x \in \mathbb{R}^m$.

Poznámka. Pro odlišení od jiných norem se eukleidovská norma někdy označuje $\|x\|_2$.

Cauchy-Schwarzova nerovnost

Věta 5. (Cauchy 1821) *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^m$ je*

$$|x^T y| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (x_i^2 y_j^2 - 2x_i y_j x_j y_i + x_j^2 y_i^2) \\ &= (\sum_{i=1}^m x_i^2)(\sum_{j=1}^m y_j^2) - 2(\sum_{i=1}^m x_i y_i)(\sum_{j=1}^m x_j y_j) + (\sum_{j=1}^m x_j^2)(\sum_{i=1}^m y_i^2) \\ &= 2\|x\|^2 \|y\|^2 - 2(x^T y)^2, \end{aligned}$$

tedy

$$|x^T y| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \qquad \square$$

Vlastnosti normy

Věta 6. *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^m$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:*

1) $\|x\| \geq 0$ *a* $\|x\| = 0$ *právě když* $x = 0$,
2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Důkaz

1) Zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ je $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} \geq 0$, a $\|x\| = 0$ právě když $x_i = 0$ pro každé i, tj. $x = 0$.

2) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^m$ je

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y)^T(x+y) = \|x\|^2 + 2x^Ty + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|x^Ty| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

a odmocněním $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3) Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\alpha x_i)^2} = \sqrt{\alpha^2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} = |\alpha| \cdot \|x\|. \qquad \square$$

„Metamechanika” maticového součinu

Značení. Definujeme $e_j = I_{\bullet j}$ (j-tý sloupec jednotkové matice), tedy $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$. Potom je $A_{\bullet j} = Ae_j$ pro každé j a $A_{i\bullet} = e_i^T A$ pro každé i.

Věta 7. *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $x \in \mathbb{R}^p$ *a* $y \in \mathbb{R}^m$. *Potom platí:*

1) $(AB)_{\bullet j} = A \cdot B_{\bullet j}$ *pro* $j = 1, \ldots, n$,
2) $(AB)_{i\bullet} = A_{i\bullet} \cdot B$ *pro* $i = 1, \ldots, m$,
3) $Ax = \sum_{j=1}^{p} x_j A_{\bullet j}$,
4) $y^T A = \sum_{i=1}^{m} y_i A_{i\bullet}$.

Poznámka. Jde o shrnutí vlastností často používaných v odvozeních a důkazech.

Důkaz

Nechť A je typu $m \times p$ a B typu $p \times n$. Potom:

1) Pro každé $j = 1, \ldots, n$ je $(AB)_{\bullet j} = (AB)e_j = A(Be_j) = A \cdot B_{\bullet j}$.

2) Podobně pro každé $i = 1, \ldots, m$ je $(AB)_{i\bullet} = e_i^T(AB) = (e_i^T A)B = A_{i\bullet} \cdot B$.

3) Každé $x \in \mathbb{R}^p$ lze psát ve tvaru $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, takže $Ax = A(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j A e_j = \sum_{j=1}^{p} x_j A_{\bullet j}$.

4) Podobně pro každé $y \in \mathbb{R}^m$ je $y^T A = (\sum_{i=1}^{m} y_i e_i)^T A = \sum_{i=1}^{m} y_i (e_i^T A) = \sum_{i=1}^{m} y_i A_{i\bullet}$. $\square$

Maticový zápis soustavy rovnic

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Potom maticový zápis

$$Ax = b$$

rozepsáním ve složkách znamená

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

je to tedy zápis soustavy m lineárních rovnic o n neznámých.

Regularita

Definice. Čtvercová matice A se nazývá regulární jestliže soustava

$$Ax = 0$$

má jediné řešení $x = 0$ (tzv. triviální), a nazývá se singulární v opačném případě, tj. platí-li $Ax = 0$ pro jistý vektor $x \neq 0$.

Upozornění. $x \neq 0$ znamená $x_i \neq 0$ pro jisté i, nikoliv pro všechna i.

Věta 8. *Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $q \geq 1$, potom $A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_q$ je regulární.*

Důkaz

Důkaz se provádí matematickou indukcí podle q. Je-li $q = 1$, je matice A_1 regulární podle předpokladu. Nechť tedy tvrzení platí až do jistého $q - 1 \geq 1$ a nechť $A_1, \ldots, A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou regulární matice. Uvažujme soustavu

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{q-1} A_q)x = 0, \tag{1}$$

kterou vzhledem k asociativnosti maticového součinu můžeme psát ve tvaru

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{q-1}) A_q x = 0. \tag{2}$$

Podle indukčního předpokladu je matice $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{q-1}$ regulární, takže z rovnosti (2) plyne $A_q x = 0$ a regularita matice A_q dává $x = 0$. Tedy soustava (1) má jediné řešení $x = 0$, takže matice $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{q-1} A_q$ je regulární, čímž je indukční krok proveden. $\square$

Elementární operace

Definice. Následující tři operace nazýváme elementárními operacemi s maticí A:

1. vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$ (tj. $A_{i\bullet} := \alpha A_{i\bullet}$),
2. vynásobení i-tého řádku číslem α a přičtení k j-tému řádku, $j \neq i$ (tj. $A_{j\bullet} := A_{j\bullet} + \alpha A_{i\bullet}$),
3. výměna i-tého a j-tého řádku, $i \neq j$ (značíme $A_{i\bullet} \leftrightarrow A_{j\bullet}$).

Poznámka. Podmínky „$\alpha \neq 0$" u operace 1 a „$j \neq i$" u operace 2 jsou nezbytné, jinak by bylo možno kterýkoliv řádek kdykoliv vynulovat a operace by ztratily smysl (z regulární matice by se stala singulární apod.).

Třetí elementární operaci lze složit z prvních dvou

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} + A_{j\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ -A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} + A_{j\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ -A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Maticová reprezentace elementárních operací

Věta 9. *Pro matici $\widetilde{A}$ vzniklou z matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ provedením*

1) *elementární operace $A_{i\bullet} := \alpha A_{i\bullet}$ platí $\widetilde{A} = (I + (\alpha - 1)e_i e_i^T)A$,*
2) *elementární operace $A_{j\bullet} := A_{j\bullet} + \alpha A_{i\bullet}$ platí $\widetilde{A} = (I + \alpha e_j e_i^T)A$,*
3) *elementární operace $A_{i\bullet} \leftrightarrow A_{j\bullet}$ platí $\widetilde{A} = (I + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T)A$,*

ve všech třech případech je tedy $\widetilde{A}$ tvaru

$$\widetilde{A} = (I + bc^T)A$$

pro jisté $b, c \in \mathbb{R}^m$, přičemž matice $I + bc^T$ je regulární.

Důkaz

1) Matice $\tilde{A}$ vzniklá z matice A provedením elementární operace $A_{i\bullet} := \alpha A_{i\bullet}$ má tvar

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ \alpha A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} + (\alpha - 1) \begin{pmatrix} 0^T \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} = A + (\alpha - 1) e_i A_{i\bullet} \\ &= A + (\alpha - 1) e_i e_i^T A = (I + (\alpha - 1) e_i e_i^T) A.\end{aligned}$$

2) Matice $\tilde{A}$ vzniklá z matice A provedením elementární operace

(Pokračování důkazu)

$A_{j\bullet} := A_{j\bullet} + \alpha A_{i\bullet}$ má tvar

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} + \alpha A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0^T \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} = A + \alpha e_j A_{i\bullet} \\ &= A + \alpha e_j e_i^T A = (I + \alpha e_j e_i^T) A.\end{aligned}$$

3) Nakonec matice $\tilde{A}$ vzniklá z matice A provedením elementární operace

(Pokračování důkazu)

$A_{i\bullet} \leftrightarrow A_{j\bullet}$ je tvaru

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} &= \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i\bullet} \\ \vdots \\ A_{j\bullet} \\ \vdots \\ A_{m\bullet} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0^T \\ \vdots \\ A_{j\bullet} - A_{i\bullet} \\ \vdots \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0^T \\ \vdots \\ 0^T \\ \vdots \\ A_{i\bullet} - A_{j\bullet} \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} \\
&= A + e_i(A_{j\bullet} - A_{i\bullet}) + e_j(A_{i\bullet} - A_{j\bullet}) = A + (e_i - e_j)(A_{j\bullet} - A_{i\bullet}) \\
&= A + (e_i - e_j)(e_j^T A - e_i^T A) = A + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T A \\
&= (I + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T)A.
\end{aligned}
$$

Vidíme tedy, že ve všech případech je $\tilde{A}$ tvaru $\tilde{A} = (I + bc^T)A$, kde b, c jsou jisté vektory z $\mathbb{R}^m$. Pro důkaz zbývající části dokážeme nejprve, že

(Pokračování důkazu)

je-li matice tvaru $I + bc^T$ singulární, potom $c^T b = -1$. Nechť tedy existuje vektor $x \neq 0$ takový, že

$$(I + bc^T)x = 0,$$

potom roznásobením

$$x = -(c^T x)b \qquad (3)$$

a přenásobením rovnosti (3) vektorem c^T docházíme k

$$c^T x = -(c^T x)c^T b.$$

Kdyby bylo $c^T x = 0$, potom by z (3) plynulo $x = 0$ ve sporu s předpokladem $x \neq 0$. Tedy $c^T x \neq 0$ a vydělením dostáváme

$$c^T b = -1.$$

Dokázali jsme tedy, že singularita matice $I + bc^T$ implikuje $c^T b = -1$. Obrácením této implikace dostáváme, že je-li $c^T b \neq -1$, je $I + bc^T$ regulární. Tento výsledek nyní aplikujeme na matice vyskytující se v tvrzeních 1)-3).

(Pokračování důkazu)

1) Pro matici $I + (\alpha - 1)e_i e_i^T$ platí $c^T b = e_i^T((\alpha - 1)e_i) = \alpha - 1 \neq -1$ (neboť $\alpha \neq 0$ podle definice první elementární operace), takže matice $I + (\alpha - 1)e_i e_i^T$ je regulární.

2) Pro matici $I + \alpha e_j e_i^T$ platí $c^T b = e_i^T(\alpha e_j) = \alpha e_i^T e_j = 0 \neq -1$ jelikož $e_i^T e_j = 0$ vzhledem k $i \neq j$ (podle definice druhé elementární operace), takže matice $I + \alpha e_j e_i^T$ je regulární.

3) Nakonec pro matici $I + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T$ je $c^T b = 2e_j^T e_i - e_j^T e_j - e_i^T e_i = -2 \neq -1$ (neboť $i \neq j$ podle definice třetí elementární operace a tedy $e_j^T e_i = 0$), takže matice $I + (e_i - e_j)(e_j - e_i)^T$ je opět regulární. $\square$

Maticová reprezentace posloupnosti elementárních operací

Věta 10. *Matice $\widetilde{A}$ vzniklá z matice A provedením konečné posloupnosti elementárních operací je tvaru*

$$\widetilde{A} = QA,$$

kde Q je jistá čtvercová regulární matice.

Důkaz

Provedením jedné elementární operace s maticí A dostáváme podle věty 9 matici $(I + b_1c_1^T)A$ pro jisté vektory $b_1, c_1 \in \mathbb{R}^m$, provedení další elementární operace dává matici $(I+b_2c_2^T)(I+b_1c_1^T)A$ a pokračováním tohoto postupu zjistíme, že matice $\tilde{A}$ vzniklá provedením q elementárních operací je tvaru

$$\tilde{A} = (I + b_qc_q^T) \cdot \ldots \cdot (I + b_1c_1^T)A,$$

tedy

$$\tilde{A} = QA,$$

kde matice

$$Q = (I + b_qc_q^T) \cdot \ldots \cdot (I + b_1c_1^T)$$

je součinem matic, které jsou podle věty 9 vesměs regulární, a tedy je rovněž regulární. □

Elementární operace zachovávají množinu řešení

Věta 11. *Jestliže matice* $(A\ b)$ *vznikne z matice* $(\widehat{A}\ \widehat{b})$ *provedením konečné posloupnosti elementárních operací, potom soustavy*

$$\widehat{A}x = \widehat{b}$$

a

$$Ax = b$$

mají stejnou množinu řešení.

Důkaz. Důkaz je snadný a přenechává se čtenáři za cvičení. □

Definice. Matice $(\widehat{A}\ \widehat{b})$ se nazývá rozšířená matice soustavy $\widehat{A}x = \widehat{b}$.

Myšlenka řešení soustavy lineárních rovnic

Převedeme-li soustavu

$$\widehat{A}x = \widehat{b}$$

se čtvercovou maticí $\widehat{A}$ s použitím elementárních operací do tvaru

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ddots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & b_n \end{array}$$

(s nulovými prvky pod diagonálou a jednotkovými na diagonále), potom řešení můžeme přímo vypočítat tzv. zpětnou substitucí

$$x_k = b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j \qquad (k = n, n-1, \ldots, 1)$$

při použití konvence $\sum\limits_{\emptyset} = 0$.

Gaussova eliminace pro řešení $\widehat{A}x = \widehat{b}$ (Gauss 1810)

0. Sestav rozšířenou matici soustavy $A := (\widehat{A}\ \widehat{b})$ a polož $k := 1$.

1. Je-li $a_{ik} = 0$ pro všechna $i \geq k$, ukonči: $\widehat{A}$ je singulární.

2. Jinak nalezni $a_{ik} \neq 0$, $i \geq k$, a vyměň řádky $A_{i\bullet}$ a $A_{k\bullet}$.

3. $A_{k\bullet} := \frac{1}{a_{kk}} A_{k\bullet}$.

4. Pro každé $i > k$ polož $\alpha := a_{ik}$ a $A_{i\bullet} := A_{i\bullet} - \alpha A_{k\bullet}$.

5. Polož $k := k + 1$. Je-li $k \leq n$, jdi na krok 1, jinak na krok 6.

6. Polož $x_k := a_{k,n+1} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j$ $(k = n, n-1, \ldots, 1)$ a ukonči:
   $x = (x_k)$ je jediným řešením $\widehat{A}x = \widehat{b}$.

Tvar matice v běžném kroku (na počátku kr. 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{k-1,k} & \dots & a_{k-1,n} & a_{k-1,n+1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{kk} & \dots & a_{kn} & a_{k,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ik} & \dots & a_{in} & a_{i,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 &= 44 \\ 3x_1 + 6x_2 - 8x_3 &= 32 \\ -2x_1 - x_2 &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -12 & 44 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -1,\ x_2 = 3,\ x_1 = 2$$

Gauss-Jordanova eliminace (Jordan 1888)

⋮

4. Pro každé $i \neq k$ polož $\alpha := a_{ik}$ a $A_{i\bullet} := A_{i\bullet} - \alpha A_{k\bullet}$.

⋮

6. Polož $x_k := a_{k,n+1}$ $(k = 1, \ldots, n)$ a ukonči:
   $x = (x_k)$ je jediným řešením $\widehat{A}x = \widehat{b}$.

(ostatní kroky jako v Gaussově eliminaci)

Tvar matice v běžném kroku (na počátku kr. 1)

$$\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & a_{1k} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & a_{k-1,k} & \dots & a_{k-1,n} & a_{k-1,n+1} \\
0 & \dots & 0 & a_{kk} & \dots & a_{kn} & a_{k,n+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & a_{ik} & \dots & a_{in} & a_{i,n+1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & a_{nk} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1}
\end{pmatrix}$$

Zastavení algoritmu I

Věta 12. *Jestliže Gaussova nebo Gauss-Jordanova eliminace projde až do konce (tj. do kroku 6), potom* $\widehat{A}$ *je regulární a vypočtené řešení je jediným řešením soustavy* $\widehat{A}x = \widehat{b}$.

Důkaz

Jestliže Gaussova eliminace při řešení soustavy

$$\hat{A}x = \hat{b} \tag{4}$$

projde až do konce, potom výsledná soustava má tvar

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ddots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & b_n \end{array} \tag{5}$$

a zpětnou substitucí zjistíme snadno, že tato soustava má jediné řšení

$$x_k = b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j \qquad (k = n, n-1, \ldots, 1). \tag{6}$$

Protože podle věty 11 mají soustavy (4) a (5) stejnou množinu řešení, je řešení (6) rovněž jediným řešením soustavy (4).

(Pokračování důkazu)

Pro důkaz regularity předpokládejme, že bychom řešili soustavu

$$\hat{A}x = 0 \tag{7}$$

s použitím stejné posloupnosti elementárních operací, kterou jsme použili předtím k řešení soustavy $\hat{A}x = \hat{b}$. Protože všechny elementární operace se provádějí po řádcích, nemůže změna v posledním sloupci ovlivnit průběh eliminace v prvních n sloupcích, takže po provedení eliminace bychom dostali soustavu

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0, \\ x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0, \\ \ddots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & 0, \end{array}$$

jejíž matice je identická s maticí soustavy (5) a má jediné řešení $x = 0$. Tím jsme dokázali, že soustava (7) má jediné řešení $x = 0$, a tedy že matice $\hat{A}$ je regulární.

(Pokračování důkazu)

Důkaz pro Gauss-Jordanovu eliminaci je ještě jednodušší, neboť v tom případě má soustava (5) tvar

$$\begin{array}{ccccl} x_1 & & & = & b_1, \\ & x_2 & & = & b_2, \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & x_n = & b_n, \end{array}$$

z něhož je ihned vidět, že má jediné řešení $x = b$ a že soustava $\hat{A}x = 0$ má jediné řešení $x = 0$. $\square$

Zastavení algoritmu II

Věta 13. *Jestliže se Gaussova nebo Gauss-Jordanova eliminace zastaví v kroku 1, potom matice $\widehat{A}$ je singulární a soustava $\widehat{A}x = \widehat{b}$ buď nemá žádné řešení, nebo jich má nekonečně mnoho.*

Důkaz

Předpokládejme, že Gaussova eliminace se zastaví v kroku 1 pro jisté $k \geq 1$. To znamená, že soustava v okamžiku zastavení algoritmu má tvar

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\
\ddots \qquad \vdots \qquad \qquad & \vdots & \vdots \\
x_{k-1} + a_{k-1,k}x_k + a_{k-1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k-1,n}x_n & = & b_{k-1}, \\
a_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{kn}x_n & = & b_k, \\
\vdots \qquad \qquad & \vdots & \vdots \\
a_{n,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

(jelikož $a_{ik} = 0$ pro všechna $i \geq k$). Protože (jak víme z důkazu věty 12) tvar matice této soustavy nezávisí na pravé straně $\hat{b}$, dostali bychom při řešení soustavy

$$\hat{A}x = 0$$

(Pokračování důkazu)

při použití stejné posloupnosti elementárních operací soustavu (S)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} & + & a_{1k}x_k & + & a_{1,k+1}x_{k+1} & + & \ldots & + a_{1n}x_n & = & 0, \\
\ddots & & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
x_{k-1} & + & a_{k-1,k}x_k & + & a_{k-1,k+1}x_{k+1} & + & \ldots & + a_{k-1,n}x_n & = & 0, \\
 & & & & a_{k,k+1}x_{k+1} & + & \ldots & + a_{kn}x_n & = & 0, \\
 & & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & a_{n,k+1}x_{k+1} & + & \ldots & + a_{nn}x_n & = & 0.
\end{array}
$$

Položíme-li v ní $x_k = 1$ a $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$, můžeme prvních $k-1$ složek vektoru x vypočítat přímo řešením soustavy

$$
\begin{array}{ccc}
x_1 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} & = & -a_{1k}, \\
\ddots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{k-1} & = & -a_{k-1,k},
\end{array}
$$

(Pokračování důkazu)

čímž dostáváme

$$x_i = -a_{ik} - \sum_{j=i+1}^{k-1} a_{ij}x_j \qquad (i = k-1, k-2, \ldots, 1),$$

což spolu s $x_k = 1$, $x_i = 0$ $(i = k+1, \ldots, n)$ dává explicitní řešení soustavy (S), které je nenulové (neboť $x_k = 1$) a je podle věty 11 řešením soustavy $\hat{A}x = 0$. Tedy $\hat{A}$ je singulární. Analogicky (a dokonce jednodušeji) dokážeme singularitu v případě Gauss-Jordanovy eliminace. K dokončení důkazu zbývá dokázat, že soustava $\hat{A}x = \hat{b}$ v tomto případě buď nemá žádné řešení, nebo jich má nekonečně mnoho. Nemá-li soustava $\hat{A}x = \hat{b}$ žádné řešení, jsme hotovi. Má-li řešení x', potom pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\hat{A}(x' + \alpha x) = \hat{A}x' + \alpha\hat{A}x = b + \alpha \cdot 0 = b$, takže $x' + \alpha x$ je řešení soustavy $\hat{A}x = \hat{b}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, přičemž $(x' + \alpha x)_k = x'_k + \alpha \cdot 1 = x'_k + \alpha$, takže k-tá složka řešení $x' + \alpha x$ může nabývat libovolných hodnot, tj. $\hat{A}x = \hat{b}$ má nekonečně mnoho řešení. $\square$

Soustavy s regulární maticí

Věta 14. *Je-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, potom pro libovolnou pravou stranu $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava*

$$Ax = b$$

právě jedno řešení.

Důkaz. Je-li A regulární, potom při libovolné pravé straně b se Gaussova eliminace nemůže zastavit v kroku 1 (potom by A byla singulární podle věty 13), tedy projde až do kroku 6 a soustava má podle věty 12 jediné řešení. $\square$

Inverzní matice

Věta 15. *Ke každé regulární matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje právě jedna matice $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s vlastností*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \tag{8}$$

Naopak, existuje-li k $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice A^{-1} s vlastností (8), potom A je regulární.

Definice. Matici A^{-1} s vlastností (8) nazýváme inverzní maticí k matici A.

Poznámka. Inverzní matici mají tedy právě regulární matice.

Důsledek. Je-li A regulární, je i A^T regulární.

Důkaz

1. Existence. Protože matice A je regulární, má pro každé $j = 1, \dots, n$ soustava $Ax = e_j$ jediné řešení x^j. Nechť A^{-1} je matice o sloupcích $x^1, \dots, x^n$. Potom pro každé j je $(AA^{-1})_{\bullet j} = A(A^{-1})_{\bullet j} = Ax^j = e_j = I_{\bullet j}$, takže $AA^{-1} = I$. Dále, $A(A^{-1}A - I) = (AA^{-1})A - A = A - A = 0$ a z regularity A plyne $A^{-1}A - I = 0$. Dokázali jsme, že matice A^{-1} splňuje $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

2. Jednoznačnost. Nechť pro jistou matici X platí $AX = XA = I$. Potom je

$$X = XI = X(AA^{-1}) = (XA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$

To znamená, že matice A^{-1} je vlastností (8) určena jednoznačně.

3. Existence inverze implikuje regularitu. Jestliže k A existuje matice A^{-1} s vlastností (8), potom z $Ax = 0$ plyne

$$x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = 0,$$

takže matice A je regulární. $\square$

Jedna rovnost stačí

Inverzní matici k A jsme definovali jako matici X, která splňuje jak $AX = I$, tak $XA = I$. Ukazuje se však, že k jednoznačnému určení inverzní matice stačí jen jedna z obou rovností:

Věta 16. *Jestliže pro $A, X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí*

$$XA = I,$$

potom A je regulární a

$$X = A^{-1}.$$

Analogicky, jestliže $AX = I$, potom A je regulární a $X = A^{-1}$.

Důkaz

Jestliže pro matice $X, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí $XA = I$, potom A je regulární, neboť z $Ax = 0$ plyne $x = Ix = (XA)x = X(Ax) = 0$. Tedy podle věty 15 má A inverzní matici A^{-1} a přenásobením rovnice $XA = I$ touto maticí zprava dostáváme

$$X = XI = X(AA^{-1}) = (XA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$

Podobně, je-li $AX = I$, potom $X^T A^T = I$ a matice A^T je podle předchozí části regulární a tedy podle důsledku věty 15 je i matice A regulární, takže má inverzní matici a platí

$$X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}I = A^{-1}. \qquad \square$$

Případ $n = 2$

Je-li $ad \neq bc$, potom matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

má inverzní matici

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

protože

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = I.$$

Z toho plyne, že $ad \neq bc$ implikuje regularitu A. Platí i opačná implikace.

Dodatek k soustavám s regulární maticí

Věta 17. *Je-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, potom pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ je jediné řešení soustavy*

$$Ax = b$$

dáno vzorcem

$$x = A^{-1}b.$$

Důkaz. Je-li A regulární, potom má inverzní matici a z rovnosti $Ax = b$ přenásobením inverzní maticí zleva dostáváme

$$x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b. \qquad \square$$

Výpočet inverzní matice

Věta 18. *Nechť matice $(A\ I)$ je Gauss-Jordanovou eliminací převedena na tvar $(I\ X)$. Potom $X = A^{-1}$. Jestliže Gauss-Jordanova eliminace není proveditelná až do konce, potom A je singulární a nemá inverzní matici.*

Důkaz. Nechť matice $(A\ I) \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ je Gauss-Jordanovou eliminací převedena na tvar $(I\ X)$. Potom podle věty 10 platí $(I\ X) = Q(A\ I)$ pro jistou regulární matici Q. Odtud podle věty 7 dostáváme, že pro každé $j = 1, \ldots, n$ je

$$(I\ X)_{\bullet j} = I_{\bullet j} = (Q(A\ I))_{\bullet j} = Q(A\ I)_{\bullet j} = QA_{\bullet j} = (QA)_{\bullet j},$$

tedy $I = QA$ a podle věty 16 je $Q = A^{-1}$. Dále analogicky pro $j = 1, \ldots, n$ je

$$(I\ X)_{\bullet, n+j} = X_{\bullet j} = (Q(A\ I))_{\bullet, n+j} = Q \cdot I_{\bullet j} = (QI)_{\bullet j} = Q_{\bullet j},$$

takže $X = Q = A^{-1}$. Jestliže Gauss-Jordanova eliminace s maticí $(A\ I)$ selhává, potom selhává už v bloku matice A a tedy A je singulární. $\square$

Algoritmus pro výpočet inverzní matice

0. Dána: čtvercová matice A.

1. Sestav matici $(A \ I)$.

2. Použij Gauss-Jordanovu eliminaci k převedení na tvar $(I \ X)$.

3. Dojde-li k předčasnému zastavení, ukonči: A je singulární a nemá inverzní matici.

4. Jinak ukonči: $X = A^{-1}$.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti inverzní matice

Věta 19. *Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou regulární matice. Potom platí:*

1) $(A^{-1})^{-1} = A$,

2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

3) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$ *pro* $\alpha \neq 0$,

4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Důkaz. Větu dokážeme s pomocí věty 16, podle které z $XA = I$ plyne $X = A^{-1}$. 1) Z $AA^{-1} = I$ plyne $A = (A^{-1})^{-1}$. 2) Z $AA^{-1} = I$ plyne $(A^{-1})^T A^T = I$ a tedy $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. 3) Z $(\frac{1}{\alpha}A^{-1})(\alpha A) = A^{-1}A = I$ plyne $\frac{1}{\alpha}A^{-1} = (\alpha A)^{-1}$. 4) Z $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = I$ plyne $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. □

Poznámka. Povšimněte si formální analogie tvrzení 1), 4) s tvrzeními 1), 4) věty 3.

Sherman-Morrisonova formule

Věta 20. *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je regulární a nechť* $b, c \in \mathbb{R}^n$*. Potom platí:*

1) je-li $c^T A^{-1} b \neq -1$*, je*

$$(A + bc^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + c^T A^{-1} b} A^{-1} b c^T A^{-1}, \tag{9}$$

2) je-li $c^T A^{-1} b = -1$*, je* $A + bc^T$ *singulární.*

Důkaz

1) Vynásobením dostáváme

$$\begin{aligned} & (A+bc^T)(A^{-1} - \tfrac{1}{1+c^TA^{-1}b}A^{-1}bc^TA^{-1}) \\ = \; & I - \tfrac{1}{1+c^TA^{-1}b}bc^TA^{-1} + bc^TA^{-1} - \tfrac{1}{1+c^TA^{-1}b}b(c^TA^{-1}b)c^TA^{-1} \\ = \; & I + (-\tfrac{1}{1+c^TA^{-1}b} + 1 - \tfrac{c^TA^{-1}b}{1+c^TA^{-1}b})bc^TA^{-1} = I, \end{aligned}$$

neboť výraz v poslední závorce je roven nule. Z toho podle věty 16 plyne, že

$$A^{-1} - \tfrac{1}{1+c^TA^{-1}b}A^{-1}bc^TA^{-1} = (A+bc^T)^{-1}.$$

2) Je-li $c^TA^{-1}b = -1$, potom $(A+bc^T)A^{-1}b = b + b(c^TA^{-1}b) = b - b = 0$, přičemž $A^{-1}b \neq 0$ vzhledem k tomu že $c^TA^{-1}b = -1$, čili $A+bc^T$ je singulární. □

Důsledek: vliv změny jednoho koeficientu na inverzi

Nechť A má inverzi A^{-1} a nechť $k\ell$-tý koeficient A se změní o α. Potom pro inverzi pozměněné matice platí podle Sherman-Morrisonovy formule

$$((A+\alpha e_k e_\ell^T)^{-1})_{ij} = (A^{-1})_{ij} - \frac{\alpha (A^{-1})_{ik}(A^{-1})_{\ell j}}{1+\alpha (A^{-1})_{\ell k}}$$

pro $i,j = 1,\ldots,n$ (za předpokladu $\alpha(A^{-1})_{\ell k} \neq -1$).

Obecně se tedy změna v jednom koeficientu matice A promítne do všech koeficientů inverzní matice, a tato závislost není lineární.

Intermezzo: Počítače nepočítají přesně

Počítače zobrazují reálná čísla v pohyblivé řádové čárce s pevnou délkou mantissy, která např. v „IEEE floating-point standard" činí 23 bitů u jednoduché přesnosti a 52 bitů u dvojnásobné přesnosti ($2^{-23} \approx 10^{-7}$, $2^{-52} \approx 10^{-16}$).

Tato přesnost se zdá být pro běžné účely postačující. Ukazuje se však, že chyby vzniklé zaokrouhlováním mohou při numerických výpočtech už u příkladů malých rozměrů způsobit katastrofické selhání algoritmů.

Hilbertovy matice

Pro každé $n \geq 1$ definujme Hilbertovu matici $H_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ předpisem

$$(H_n)_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad (i, j = 1, \dots, n),$$

např.

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Soustavy $H_n x = H_n e$

Pro zvolené n řešme soustavu

$$H_n x = H_n e,$$

která vzhledem k regularitě H_n má jediné řešení $x = e = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

Výpočty byly provedeny v programu MATLAB 6.0 v dvojnásobné přesnosti jednak Gaussovou eliminací ($n = 12, 13, 14$), jednak zabudovanou MATLABovskou procedurou ($n = 14$).

Řešení soustavy $H_n x = H_n e$ pro $n = 12, 13$ Gaussovou eliminací

```
n=12;H=hilb(n);b=H*ones(n,1);gauss
soustava ma jedine reseni
x =
  Columns 1 through 7
    1.0000    1.0000    0.9999    1.0009    0.9932    1.0298    0.9176
  Columns 8 through 12
    1.1481    0.8273    1.1258    0.9479    1.0094

n=13;H=hilb(n);b=H*ones(n,1);gauss
soustava ma jedine reseni
x =
  Columns 1 through 7
    1.0000    1.0000    1.0012    0.9804    1.1771    0.0332    4.3909
  Columns 8 through 13
   -6.8988   13.3496  -11.8095    9.4534   -2.2127    1.5352
```

Řešení soustavy $H_n x = H_n e$ pro $n = 14$ (2 metody)

```
n=14;H=hilb(n);b=H*ones(n,1);gauss
H singularni

n=14;H=hilb(n);b=H*ones(n,1);(H\b)'
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 1.408541e-019.
ans =
  Columns 1 through 7
    1.0000    0.9999    1.0021    0.9714    1.2008    0.2596    2.1136
  Columns 8 through 14
    2.7604  -10.9133   27.2272  -31.2902   24.5310   -8.5114    2.6489
```

Závěr intermezza

Výsledky nejsou špatné proto, že by byl špatný algoritmus nebo počítač, ale proto, že „špatná" je sama soustava: matice H_n jsou totiž „blízké singulárním".

Podrobněji se otázky numerické stability výpočtů probírají v přednášce z numerické matematiky.

Co dělat v případě singulární nebo obdélníkové matice?

V případě, že Gauss-Jordanova eliminace se zastaví z důvodu singularity ($a_{ik} = 0$ pro všechna $i \geq k$), můžeme formálně pokračovat tak, že budeme hledat pivota v následujícím sloupci a stejném řádku. Tímto způsobem můžeme pokračovat i u obecné obdélníkové matice.

Matice, kterou takto vypočteme, nazýváme maticí v odstupňovaném tvaru.

Odstupňovaný tvar matice: příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(hvězdičky označují místa, kde mohou stát libovolná čísla).

Odstupňovaný tvar matice: definice

Definice. Matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je v odstupňovaném (RREF[†]) tvaru jestliže existují $0 \le r \le m$ a $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le n$ tak, že platí:

1. $A_{i1} = \ldots = A_{i,k_i-1} = 0$ a $A_{\bullet k_i} = e_i$ pro $i = 1, \ldots, r$,
2. $A_{i\bullet} = 0^T$ pro $i = r+1, \ldots, m$.

Poznámka. Slovně, matice má prvních r řádků nenulových a zbývajících $m-r$ nulových. V každém nenulovém řádku i je prvním nenulovým číslem jednička v k_i-tém sloupci, a všechny ostatní prvky tohoto sloupce jsou nulové. Indexy těchto sloupců splňují $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Poznámka. Slova „odstupňovaný tvar" a „RREF (tvar)" používáme jako synonyma.

[†] z angl. „reduced row-echelon form"

Pomocné tvrzení

Pomocné tvrzení. *Nechť* $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *jsou matice v odstupňovaném tvaru a nechť platí*

$$A = QB \tag{10}$$

pro jistou regulární matici Q*. Potom*

$$A = B.$$

Důkaz

Důkaz provedeme indukcí podle počtu sloupců n. Nechť $n = 1$, takže $A = a \in \mathbb{R}^m$ a $B = b \in \mathbb{R}^m$. Protože b je v odstupňovaném tvaru, je buď $b = 0$, nebo $b = e_1$; podobně pro a. Je-li $b = 0$, je $a = Qb = 0 = b$; je-li $b = e_1$, potom vzhledem k regularitě Q je $a = Qe_1 \neq 0$, tedy $a = e_1 = b$.

Nechť tedy tvrzení platí pro $n - 1 \geq 1$ a nechť $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom můžeme psát $A = (\tilde{A}\ a)$, $B = (\tilde{B}\ b)$, kde $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{m \times (n-1)}$ a $a, b \in \mathbb{R}^m$, přičemž $\tilde{A}, \tilde{B}$ jsou v odstupňovaném tvaru. Potom z (10) plyne

$$\tilde{A} = Q\tilde{B}, \tag{11}$$

$$a = Qb, \tag{12}$$

a tedy podle indukčního předpokladu je $\tilde{A} = \tilde{B}$. K dokončení důkazu zbývá proto dokázat, že $a = b$. Nechť r je počet nenulových řádků matice

(Pokračování důkazu)

$\tilde{A}$ (resp. $\tilde{B}$) a nechť $k_1, \ldots, k_r$ jsou indexy jednotkových sloupců v $\tilde{A}$ (resp. v $\tilde{B}$). Potom pro každé $i = 1, \ldots, r$ je

$$e_i = \tilde{A}_{\bullet k_i} = Q\tilde{B}_{\bullet k_i} = Qe_i = Q_{\bullet i},$$

tedy prvních r sloupců matice Q je tvořeno prvními r sloupci jednotkové matice. Protože A je v odstupňovaném tvaru, je buď $a_{r+1} = \ldots = a_m = 0$, nebo $a = e_{r+1}$, podobně pro b. Je-li $a_{r+1} = \ldots = a_m = 0$, potom $a = \sum_{i=1}^{r} a_i e_i = \sum_{i=1}^{r} a_i Q_{\bullet i} + \sum_{i=r+1}^{m} 0 \cdot Q_{\bullet i} = Qa$, tedy podle (12) je $Qa = Qb$ a z regularity Q plyne $a = b$. Je-li $a = e_{r+1}$, potom kdyby bylo $b_{r+1} = 0$, potom $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$ a platilo by $a = Qb = \sum_{i=1}^{r} b_i Q_{\bullet i} = \sum_{i=1}^{r} b_i e_i$, přičemž $(e_i)_{r+1} = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, r$, tedy by bylo $a_{r+1} = 0$, spor. Tedy $b_{r+1} \neq 0$, takže $b = e_{r+1} = a$. Dokázali jsme tedy, že v obou případech je $a = b$, a jelikož podle indukčního předpokladu je $\tilde{A} = \tilde{B}$, dostáváme tak $A = B$, čímž je důkaz indukcí proveden. $\square$

Algoritmus pro výpočet odstupňovaného tvaru

0. Dána: matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
1. Polož $i := 1$, $k := 1$.
2. Je-li $a_{\ell j} = 0$ pro každé $\ell \geq i$ a $j \geq k$, polož $A^R := A$ a ukonči.
3. Jinak urči $k := \min\{j\,;\, j \geq k,\, a_{\ell j} \neq 0$ pro jisté $\ell \geq i\}$.
4. Nalezni $a_{\ell k} \neq 0$, $\ell \geq i$ a vyměň řádky $A_{i\bullet}$ a $A_{\ell\bullet}$.
5. Polož $A_{i\bullet} := \frac{1}{a_{ik}} A_{i\bullet}$.
6. Pro každé $\ell \neq i$ polož $\alpha := a_{\ell k}$ a $A_{\ell\bullet} := A_{\ell\bullet} - \alpha A_{i\bullet}$.
7. Je-li $i < m$ a $k < n$, polož $i := i + 1$, $k := k + 1$ a jdi na krok 1.
   Jinak polož $A^R := A$ a ukonči.

Výsledná matice je v RREF a je jednoznačně určena

Věta 21. *Matice A^R vypočtená algoritmem je v odstupňovaném tvaru a výsledek nezávisí na výběru pivotů v kroku 4 a je tedy jednoznačně určen maticí A.*

Poznámka. To ospravedlňuje použití symbolu A^R.

Důkaz

Dokážeme že matice A^R vypočtená algoritmem je v RREF tvaru. Je-li $A = 0$, je matice v RREF tvaru (s $r = 0$) a algoritmus končí v kroku 1. Nechť tedy $A \neq 0$. Označme r poslední hodnotu indexu i, se kterou se provádí eliminace v kroku 6 algoritmu, a nechť pro každé $1 \leq i \leq r$ je k_i rovno hodnotě k vypočtené v kroku 3. Dokážeme indukcí podle i, že pro každé $1 \leq i \leq r$ po provedení eliminace s pivotem a_{ik_i} v kroku 6 je podmatice sestávající z prvních k_i sloupců matice v RREF tvaru, přičemž její řádky počínaje $(i+1)$-ním jsou nulové. To je zřejmé pro $i = 1$, neboť k_1 je index prvního nenulového sloupce původní matice, takže po provedení eliminace je podmatice sestávající z prvních k_1 sloupců evidentně v RREF tvaru a všechny její řádky počínaje druhým jsou nulové.

Nechť tedy tvrzení platí pro $1 \leq i - 1 < r$, takže po provedení eliminace s pivotem $a_{i-1,k_{i-1}}$ je podmatice sestávající z prvních k_{i-1} sloupců v RREF tvaru a všechny její řádky počínaje i-tým jsou nulové. To znamená, že pro

(Pokračování důkazu)

index k_i vypočtený v kroku 3 platí $k_{i-1} < k_i$ a při eliminaci s pivotem a_{ik_i} se prvních k_{i-1} sloupců nemění a navíc se vytvoří i-tý řádek a k_i-tý sloupec v RREF tvaru . To ukazuje, že v podmatici sestávající z prvních k_i sloupců je prvních i řádků v RREF tvaru a její zbývající řádky jsou vzhledem k výběru k_i v kroku 3 a k eliminaci nulové, takže celá podmatice je v RREF tvaru. Tím je tvrzení indukcí dokázáno. Po provedení poslední eliminace s hodnotou $i = r$ je buď $i = m$, nebo všechny řádky počínaje $(i + 1)$-ním jsou nulové, takže výsledná matice A^R je v RREF tvaru.

Protože matice se v průběhu algoritmu upravuje pouze elementárními operacemi (v krocích 4, 5, 6), platí pro výslednou matici A^R podle věty 10 $A^R = QA$, kde Q je jistá regulární matice. Použijeme-li libovolný jiný výběr pivotů v kroku 3, dojdeme na konci algoritmu k matici A^1, která

(Pokračování důkazu)

je v odstupňovaném tvaru a platí pro ni opět $A^1 = Q_1 A$, kde Q_1 je jistá regulární matice. Z toho plyne, že

$$A = Q_1^{-1} A^1 = Q^{-1} A^R$$

a tedy

$$A^1 = Q_1 Q^{-1} A^R,$$

kde A^1, A^R jsou matice v odstupňovaném tvaru a $Q_1 Q^{-1}$ je regulární, z čehož podle pomocného tvrzení dostáváme $A^1 = A^R$. Tedy výsledná matice vypočtená algoritmem nezávisí na výběru pivotů v kroku 3 a je jednoznačně určena. □

Hodnost matice

Definice. Počet nenulových řádků matice A^R (tj. číslo r) nazýváme hodností matice A a značíme ji $\operatorname{rank}(A)$.

Poznámky. Pro $A = 0$ je tedy $\operatorname{rank}(A) = 0$, pro $A \neq 0$ je $1 \leq \operatorname{rank}(A) \leq m$. Hodnost se obvykle definuje jiným způsobem (str. 231) a toto je pak její ekvivalentní charakteristika, na tomto místě však nemáme jinou možnost.

Lineární nezávislost sloupců resp. řádků matice

Definice. Říkáme, že matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má lineárně nezávislé sloupce jestliže soustava

$$Ax = 0$$

má pouze triviální řešení $x = 0$, a že má lineárně nezávislé řádky jestliže A^T má lineárně nezávislé sloupce.

Lineární nezávislost a regularita

Věta 22. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí:*

1) *A má lineárně nezávislé sloupce právě když $A^T A$ je regulární,*
2) *A má lineárně nezávislé řádky právě když AA^T je regulární.*

Důkaz. 1) Nechť A má lineárně nezávislé sloupce. Jestliže $A^T A$ je singulární, potom $A^T Ax = 0$ pro jisté $x \neq 0$, tedy $\|Ax\|^2 = x^T A^T Ax = 0$ a $Ax = 0$, takže A má lineárně závislé sloupce, což je spor. Proto $A^T A$ je regulární. Naopak, nechť $A^T A$ je regulární a nechť $Ax = 0$ pro jisté x. Potom $A^T Ax = 0$ a z regularity plyne $x = 0$, což dokazuje, že A má lineárně nezávislé sloupce.

2) A má lineárně nezávislé řádky právě když A^T má lineárně nezávislé sloupce a to podle části 1) platí právě když $(A^T)^T A = AA^T$ je regulární. $\square$

Hodnostní rozklad

Věta 23. *Každou matici* $0 \neq A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *lze rozložit ve tvaru*

$$A = BC,$$

kde $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$ *je matice o sloupcích* $A_{\bullet k_1}, \ldots, A_{\bullet k_r}$ *a matice* $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ *sestává z prvních* r *řádků matice* A^R*. Přitom* B *má lineárně nezávislé sloupce a* C *má lineárně nezávislé řádky.*

Poznámka. Název je dán tím, že počet sloupců B i počet řádků C je roven hodnosti matice A.

Důkaz

Protože A^R vzniká z A posloupností elementárních operací, je podle věty 10 $A^R = QA$ pro jistou regulární matici Q, tj.

$$A = PA^R \tag{13}$$

pro $P = Q^{-1}$. Potom pro $i = 1, \ldots, r$ dostáváme

$$B_{\bullet i} = A_{\bullet k_i} = (PA^R)_{\bullet k_i} = P(A^R)_{\bullet k_i} = Pe_i = P_{\bullet i}$$

a z (13) plyne pro každé $j = 1, \ldots, n$

$$A_{\bullet j} = P(A^R)_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{m} P_{\bullet i}(A^R)_{ij} = \sum_{i=1}^{r} P_{\bullet i}(A^R)_{ij} = \sum_{i=1}^{r} B_{\bullet i}C_{ij} = B{\cdot}C_{\bullet j} = (BC)_{\bullet j},$$

takže $A = BC$.

Kdyby B měla lineárně závislé sloupce, potom by platilo $0 = Bx = \sum_{i=1}^{r} B_{\bullet i}x_i = \sum_{i=1}^{r} P_{\bullet i}x_i$ pro jisté $x \neq 0$. Definujeme-li vektor x' předpisem

(Pokračování důkazu)

$x'_i = x_i$ pro $i = 1, \ldots, r$ a $x'_i = 0$ pro $i = r+1, \ldots, m$, je $0 = Bx = \sum_{i=1}^{r} P_{\bullet i} x'_i = \sum_{i=1}^{m} P_{\bullet i} x'_i = Px'$, kde $x' \neq 0$, což je spor s regularitou matice P. Proto sloupce B jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme dále, že $C^T y = 0$ pro jisté $y \in \mathbb{R}^r$, tj. $y^T C = 0^T$. Protože C je sestavená z prvních r řádků matice A^R a v k_i-tém sloupci A^R, a tedy i C, stojí vektor e_i, je $0 = (y^T C)_{k_i} = y^T C_{\bullet k_i} = y^T e_i = y_i$ pro $i = 1, \ldots, r$, tj. $y = 0$. Z toho dostáváme, že C^T má lineárně nezávislé sloupce, takže C má lineárně nezávislé řádky. $\square$

Příklad

Jestliže

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}^R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

potom matice má hodnostní rozklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

což lze přímo ověřit vynásobením.

Moore-Penroseova inverze

Věta 24. *Pro každou matici* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *existuje právě jedna matice* $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *s těmito vlastnostmi:*

1) $AA^+A = A$,
2) $A^+AA^+ = A^+$,
3) $(AA^+)^T = AA^+$,
4) $(A^+A)^T = A^+A$.

Definice. Matici A^+ nazýváme Moore-Penroseovou inverzí matice A (autorství: Moore v termínech ortogonálních projekcí 1920, Penrose v dnešní podobě 1955).

Důkaz

Je-li $A = 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potom $A^+ = 0^T$ splňuje 1)-4). Nechť tedy $A \neq 0$ a nechť $A = BC$ je hodnostní rozklad matice A (věta 23), potom B má lineárně nezávislé sloupce a C má lineárně nezávislé řádky, takže matice B^TB a CC^T jsou regulární a jejich inverze existují. Položme

$$A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T.$$

Ukážeme, že A^+ splňuje 1)-4).

1) $AA^+A = BCC^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^TBC = BC = A$,

2) $A^+AA^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^TBCC^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$
$= C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T = A^+$,

3) $AA^+ = BCC^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T = B(B^TB)^{-1}B^T = (B(B^TB)^{-1}B^T)^T$
$= (AA^+)^T$,

4) $A^+A = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^TBC = C^T(CC^T)^{-1}C = (C^T(CC^T)^{-1}C)^T$
$= (A^+A)^T$.

(Pokračování důkazu)

Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že jistá matice $A^\#$ splňuje 1)-4). Položme $D = A^+ - A^\#$. Z $AA^+A = A$ plyne $A^+AA^T = A^T$, podobně $A^\#AA^T = A^T$, odečtením $DAA^T = 0$, tudíž

$$DA(DA)^T = DAA^TD^T = 0$$

a odtud $DA = 0$ (viz poznámku níže). Dále z $A^+AA^+ = A^+$ plyne $AA^+(A^+)^T = (A^+)^T$ a podobně $AA^\#(A^\#)^T = (A^\#)^T$, tedy

$$DD^T = D((A^+)^T - (A^\#)^T) = D(AA^+(A^+)^T - AA^\#(A^\#)^T)$$

$$= DA(A^+(A^+)^T - A^\#(A^\#)^T) = 0$$

a odtud $D = 0$, tj. $A^+ = A^\#$. □

Poznámka. V důkazu jednoznačnosti jsme použili dvakrát faktu, že z $AA^T = 0$ plyne $A = 0$ (pro každé i je totiž $0 = (AA^T)_{ii} = \sum_j A_{ij}(A^T)_{ji} = \sum_j A_{ij}^2$, takže celý i-tý řádek A je nulový).

Algoritmus pro výpočet Moore-Penroseovy inverze

0. Dána: matice $0 \neq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1. Vypočti RREF tvar A^R matice A.

2. Sestav matici $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$ o sloupcích $A_{\bullet k_1}, \ldots, A_{\bullet k_r}$ a matici $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ z prvních r řádků matice A^R.

3. Polož $A^+ = C^T (B^T A C^T)^{-1} B^T$.

Poznámky

Poznámka 1. Podle věty o hodnostním rozkladu má B lineárně nezávislé sloupce a C má lineárně nezávislé řádky, takže $B^T B$ i CC^T jsou regulární podle věty 22, proto i $B^T AC^T = B^T BCC^T$ je regulární a má inverzní matici.

Poznámka 2. Místo „Moore-Penroseova inverze” říkáme rovněž synonymně „pseudoinverzní matice”.

Zvláštní případy

Platí:

1) $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ má-li A lineárně nezávislé sloupce,

2) $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$ má-li A lineárně nezávislé řádky,

3) $A^+ = A^{-1}$ je-li A čtvercová regulární.

Důkaz se provede přímým ověřením, že ve všech třech případech má matice A^+ vlastnosti 1)-4) z věty 24.

Příklad

Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

je singulární neboť má lineárně závislé sloupce ($A_{\bullet 1} - 2A_{\bullet 2} + A_{\bullet 3} = 0$) a nemá tedy inverzní matici. Výpočtem podle definičního vzorce dostáváme její pseudoinverzi

```
A^+ =
   -0.6389   -0.1667    0.3056
   -0.0556    0.0000    0.0556
    0.5278    0.1667   -0.1944
```

Použití RREF tvaru k řešení obecných soustav lin. rovnic

Věta 25. *K dané soustavě lineárních rovnic*

$$Ax = b \tag{14}$$

($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$) vypočtěme odstupňovaný tvar rozšířené matice soustavy

$$(A\ b)^R = (\widetilde{A}\ \widetilde{b}).$$

Potom platí:

1) je-li $k_r = n + 1$, potom soustava (14) nemá řešení,

2) je-li $k_r \le n$ a $r = n$, potom soustava (14) má právě jedno řešení $x = (\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n)$,

3) je-li $k_r \le n$ a $r < n$, potom soustava (14) má nekonečně mnoho řešení, jejichž parametrický popis dostaneme, vyjádříme-li „závislé" proměnné $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ pomocí ostatních „nezávislých" proměnných.

Důkaz

Jelikož $(A\ b)^R = (\tilde{A}\ \tilde{b})$, vznikla matice $(\tilde{A}\ \tilde{b})$ z matice $(A\ b)$ provedením konečné posloupnosti elementárních operací a proto soustavy

$$Ax = b \tag{15}$$

a

$$\tilde{A}x = \tilde{b} \tag{16}$$

mají podle věty 11 stejnou množinu řešení.

a) Je-li $k_r = n + 1$, potom r-tá rovnice soustavy (16) má tvar

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = 1,$$

tedy nemá řešení a proto ani soustava (16) resp. (15) nemá řešení.

(Pokračování důkazu)

b) Nechť $k_r \leq n$ a $r = n$. Potom $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leq n$, takže musí platit $k_i = i$ pro $i = 1, \ldots, n$ a soustava (16) má tvar

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & \tilde{b}_1, \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & x_n & = & \tilde{b}_n, \\ 0x_1 & + \ldots + & 0x_n & = & 0, \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0x_1 & + \ldots + & 0x_n & = & 0 \end{array}$$

a tedy má jediné řešení $x = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n)^T$, které je rovněž jediným řešením soustavy (15).

c) Nechť $k_r \leq n$ a $1 \leq r < n$. Položme $K = \{k_1, \ldots, k_r\}$. Potom pro každé $i = 1, \ldots, r$ má i-tý řádek soustavy (16) tvar

$$x_{k_i} + \sum_{j \notin K} \tilde{A}_{ij} x_j = \tilde{b}_i,$$

(Pokračování důkazu)

tedy

$$x_{k_i} = \tilde{b}_i - \sum_{j \notin K} \tilde{A}_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

čímž dostáváme vyjádření „závislých proměnných" x_j, $j \in K$, pomocí „nezávislých proměnných" x_j, $j \notin K$, přičemž $\{j;\, j \notin K\}$ obsahuje právě $n - r$ prvků. $\square$

Příklad

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_2 - x_4 \\ x_3 &= 1 - x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} y_2 \quad (y_1, y_2 \in \mathbb{R})$$

Homogenní soustavy

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Soustavu

$$Ax = 0$$

(tj. s nulovou pravou stranou) nazýváme homogenní soustavou. Je zřejmé, že homogenní soustava má aspoň jedno řešení $x = 0$ (tzv. triviální).

Důsledek. *Je-li $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $m < n$, potom soustava $Ax = 0$ má netriviální řešení.*

Důkaz. Ve větě 25 nenastává případ 1). Kdyby nastal případ 2), bylo by $n = r \leq m$ ve sporu s předpokladem $m < n$. Tedy nastává případ 3) a soustava má netriviální řešení. □

Tvar množiny řešení

Z věty 25 a z příkladu je zřejmé, že je-li $k_r \leq n$ a $r < n$, potom množina X řešení soustavy $Ax = b$ má tvar

$$X = \{x_0 + \widetilde{B}y\,;\, y \in \mathbb{R}^{n-r}\},$$

a přidáním r nulových sloupců k $\widetilde{B}$ můžeme psát

$$X = \{x_0 + By\,;\, y \in \mathbb{R}^{n}\}.$$

V tomto tvaru pak platí i pro případ jediného řešení (s $B = 0$).

Následující věta uvádí explicitní tvar x_0 a B s použitím pseudoinverzní matice.

Popis množiny řešení

Věta 26. (Penrose 1956) *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ a nechť množina X řešení soustavy*

$$Ax = b$$

je neprázdná. Potom platí

$$X = \{A^+b + (I - A^+A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\},$$

přičemž

$$\|A^+b\| = \min\{\|x\|\,;\, x \in X\}$$

a A^+b je jediné řešení, ve kterém se tohoto minima nabývá.

Poznámka. A^+b je tedy jakési „význačné řešení". Povšimněte si analogie se vzorcem $A^{-1}b$ u soustav se čtvercovou regulární maticí.

Důkaz

Nechť $X \neq \emptyset$, takže $x_0 \in X$ pro jisté x_0. S využitím vlastnosti 1) z věty 24 dostáváme

$$AA^+b = AA^+Ax_0 = Ax_0 = b,$$

takže $A^+b \in X$. Nechť $x \in X$; položme $y = x - A^+b$, potom $Ay = Ax - AA^+b = b - b = 0$, takže

$$x = A^+b + y = A^+b + (I - A^+A)y.$$

Dokázali jsme tím, že

$$X \subseteq \{A^+b + (I - A^+A)y;\ y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Naopak, nechť x je tvaru $x = A^+b + (I - A^+A)y$ pro jisté $y \in \mathbb{R}^n$. Potom $Ax = AA^+b + (A - AA^+A)y = b$ (použili jsme opět vlastnost 1) z věty 24), takže $x \in X$. Tím jsme dokázali opačnou inkluzi a tedy i rovnost

$$X = \{A^+b + (I - A^+A)y;\ y \in \mathbb{R}^n\}. \tag{17}$$

(Pokračování důkazu)

Pro důkaz zbývajícího tvrzení zvolme libovolné řešení $x \in X$, potom x je tvaru $x = A^+b + (I - A^+A)y$ pro jisté $y \in \mathbb{R}^n$, a počítejme $\|x\|^2$:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = x^T x &= \|A^+b\|^2 + 2((I - A^+A)y)^T A^+b + \|(I - A^+A)y\|^2 \\ &= \|A^+b\|^2 + 2y^T(I - A^+A)A^+b + \|(I - A^+A)y\|^2 \\ &= \|A^+b\|^2 + \|(I - A^+A)y\|^2 \geq \|A^+b\|^2, \end{aligned} \tag{18}$$

kde jsme použili vlastnost $A^+AA^+ = A^+$ z věty 24. Pro každé $x \in X$ je tedy $\|x\| \geq \|A^+b\|$, přičemž A^+b rovněž patří do X, což znamená, že

$$\|A^+b\| = \min\{\|x\|;\ x \in X\}. \tag{19}$$

Jestliže $\|x\| = \|A^+b\|$ pro jisté $x = A^+b + (I - A^+A)y \in X$, potom z (18) dostáváme

$$\|x\|^2 = \|A^+b\|^2 + \|(I - A^+A)y\|^2 \geq \|A^+b\|^2 = \|x\|^2,$$

takže nerovnost se nabývá jako rovnost, což dává $\|(I - A^+A)y\| = 0$, tedy $(I - A^+A)y = 0$ a $x = A^+b$. To znamená, že minimum v rovnosti (19) se nabývá právě jen pro $x = A^+b$. □

Důsledky Penroseovy věty

Věta 27. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Potom pro soustavu*

$$Ax = b \tag{20}$$

platí:

1) *soustava (20) má řešení právě když $AA^+b = b$,*
2) *soustava (20) má jediné řešení právě když $AA^+b = b$ a $A^+A = I$,*
3) *množina $\mathcal{N}(A) = \{x\,;\, Ax = 0\}$ řešení homogenní soustavy $Ax = 0$ je popsaná vztahem $\mathcal{N}(A) = \{(I - A^+A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}$,*
4) *pro každé $x_0 \in X$ je $X = \{x_0 + x\,;\, x \in \mathcal{N}(A)\}$.*

Poznámka k 4). Jinými slovy, obecné řešení soustavy $Ax = b$ lze popsat jako součet jejího „partikulárního" řešení x_0 a obecného řešení homogenní soustavy $Ax = 0$; tato věta se používá v přednášce z analýzy ve 2. ročníku k popisu obecného řešení lineárních diferenciálních rovnic.

Důkaz

1) V důkazu věty 26 jsme dokázali, že je-li $X \neq 0$, potom $AA^+b = b$. Naopak, platí-li $AA^+b = b$, potom $A^+b \in X$ a tedy $X \neq \emptyset$.

2) Má-li soustava $Ax = b$ jediné řešení, potom podle bodu 1) je $AA^+b = b$ a z popisu (17) vyplývá, že musí být $I - A^+A = 0$. Naopak, je-li $AA^+b = b$ a $A^+A = I$, potom A^+b je řešením a z (17) vyplývá, že jediným.

3) Aplikací vzorce (17) na soustavu $Ax = 0$ dostáváme

$$\mathcal{N}(A) = X = \{(I - A^+A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

4) Je-li $x_0 \in X$, potom podle (17) je $x_0 = A^+b + (I - A^+A)y_0$ pro jisté y_0, takže

$$\begin{aligned} X &= \{A^+b + (I - A^+A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^n\} = \{x_0 + (I - A^+A)(y - y_0)\,;\, y \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{x_0 + (I - A^+A)\tilde{y}\,;\, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_0 + x\,;\, x \in \mathcal{N}(A)\}. \end{aligned}$$

□

Jak řešit soustavy, které řešení nemají?

Tato otázka vypadá jako zjevný protimluv: nalézt řešení soustav, které řešení nemají, samozřejmě nelze. Lze si však položit otázku, zda neexistuje něco, co by bylo možno považovat v jistém smyslu za adekvátní náhražku neexistujícího řešení.

Tato úvaha vede k tzv. metodě nejmenších čtverců.

Idea metody nejmenších čtverců

Má-li soustava $Ax = b$ řešení x, potom pro něj platí

$$\|Ax - b\| = 0,$$

přičemž 0 je nejmenší možná hodnota normy. To vede k myšlence hledat x, pro které platí

$$\|Ax - b\| = \min\{\|Ay - b\|\,;\, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Je-li $\|Ax - b\| = 0$, je x řešením $Ax = b$; je-li $\|Ax - b\| > 0$, je x „řešení" nalezené metodou nejmenších čtverců (angl. „least squares solution").

Proč „nejmenších čtverců''?

Rovnost

$$\|Ax - b\| = \min\{\|Ay - b\| \,;\, y \in \mathbb{R}^n\}$$

lze umocněním a rozepsáním do složek převést na tvar

$$\sum_{i=1}^{m} (Ax - b)_i^2 = \min\Big\{ \sum_{i=1}^{m} (Ay - b)_i^2 \,;\, y \in \mathbb{R}^n \Big\},$$

jde tedy o minimalizaci součtu druhých mocnin („čtverců'').

Charakterizace řešení

Věta 28. *Vektor* $x \in \mathbb{R}^n$ *splňuje*

$$\|Ax - b\| = \min\{\|Ay - b\| \,;\, y \in \mathbb{R}^n\}$$

právě když je řešením soustavy

$$A^T A x = A^T b. \tag{21}$$

Definice. Soustava (21) se nazývá soustavou normálních rovnic (přiřazenou k soustavě $Ax = b$).

Důkaz

Při důkazu obou implikací použijeme pomocnou rovnost

$$\|A(x+z)-b\|^2 = \|Ax-b+Az\|^2 = \|Ax-b\|^2+2z^TA^T(Ax-b)+\|Az\|^2, \quad (22)$$

platnou pro libovolné vektory $x, z \in \mathbb{R}^n$.

Nechť x je řešením soustavy $A^TAx = A^Tb$. Potom $A^T(Ax-b) = 0$, takže pro libovolné $y \in \mathbb{R}^n$, píšeme-li ho ve tvaru $y = x+z$, kde $z = y-x$, dostáváme podle (22) $\|Ay-b\|^2 = \|Ax-b\|^2 + \|Az\|^2 \geq \|Ax-b\|^2$, což znamená, že

$$\|Ax-b\| = \min\{\|Ay-b\|;\ y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (23)$$

Naopak, nechť vektor $x \in \mathbb{R}^n$ splňuje (23). Předpokládejme sporem, že $A^T(Ax-b) \neq 0$, a položme $z = -\varepsilon A^T(Ax-b)$, kde $\varepsilon > 0$. Potom z (22) plyne

$$\|A(x+z)-b\|^2 = \|Ax-b\|^2 - 2\varepsilon\|A^T(Ax-b)\|^2 + \varepsilon^2\|AA^T(Ax-b)\|^2. \quad (24)$$

(Pokračování důkazu)

Ukážeme, že $\varepsilon > 0$ lze volit tak, aby součet posledních dvou členů na pravé straně byl záporný. K tomu je třeba, aby platilo

$$\varepsilon \|AA^T(Ax-b)\|^2 < 2\|A^T(Ax-b)\|^2. \tag{25}$$

Je-li $\|AA^T(Ax-b)\| = 0$, lze $\varepsilon > 0$ volit libovolně (neboť $A^T(Ax-b) \neq 0$ podle předpokladu a tedy $\|A^T(Ax-b)\| > 0$); je-li $\|AA^T(Ax-b)\| > 0$, je (25) splněno např. pro

$$\varepsilon = \|A^T(Ax-b)\|^2 / \|AA^T(Ax-b)\|^2.$$

Při této volbě ε pak ze (24) dostáváme

$$\|A(x+z)-b\|^2 < \|Ax-b\|^2,$$

tedy pro $y = x + z$ máme

$$\|Ay-b\| < \|Ax-b\|$$

ve sporu s (23). Dokázali jsme, že platí-li (23), potom předpoklad, že $A^T(Ax-b) \neq 0$, vede ke sporu. Tedy $A^T(Ax-b) = 0$, takže x je řešením soustavy $A^TAx = A^Tb$, což dokazuje opačnou implikaci. □

Řešitelnost soustavy normálních rovnic

Věta 29. *Množina X řešení soustavy normálních rovnic*

$$A^T A x = A^T b \tag{26}$$

je popsaná vzorcem

$$X = \{A^+ b + (I - A^+ A)y\,;\ y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Z toho plyne, že soustava (26) má vždy řešení a má-li soustava

$$Ax = b \tag{27}$$

řešení, potom obě soustavy (27), (26) mají stejnou množinu řešení X.

Poznámka. Řešení metodou nejmenších čtverců tedy vždy existuje.

Důkaz

Podle vlastností 1), 3) z věty 24 platí

$$A^T A A^+ = A^T (A A^+)^T = (A A^+ A)^T = A^T$$

a tedy

$$A^T A A^+ b = A^T b,$$

z čehož plyne, že soustava $A^T A x = A^T b$ má řešení $A^+ b$. Pro množinu řešení X této soustavy platí tedy podle tvrzení 4) věty 27

$$X = \{A^+ b + x;\ x \in \mathcal{N}(A^T A)\}. \tag{28}$$

Dokážeme, že

$$\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A). \tag{29}$$

(Pokračování důkazu)

Skutečně, je-li $x \in \mathcal{N}(A)$, potom $Ax = 0$ a tedy i $A^T Ax = 0$, což dává $x \in \mathcal{N}(A^T A)$. Naopak, je-li $x \in \mathcal{N}(A^T A)$, potom $A^T Ax = 0$ a tedy i $\|Ax\|^2 = x^T A^T Ax = 0$, což znamená, že $Ax = 0$ a $x \in \mathcal{N}(A)$. Tím je rovnost (29) dokázána a dosazením do (28) dostáváme

$$X = \{A^+ b + (I - A^+ A)y;\ y \in \mathbb{R}^n\}, \tag{30}$$

kde jsme použili popisu množiny $\mathcal{N}(A)$ z tvrzení 3) věty 27. Ve větě 26 jsme dokázali, že je-li množina řešení soustavy $Ax = b$ neprázdná, potom je popsaná vzorcem (30). Z toho plyne, že v tomto případě mají obě soustavy $Ax = b$ a $A^T Ax = A^T b$ stejnou množinu řešení. □

Algoritmus metody nejmenších čtverců

0. Dána: soustava $Ax = b$.

1. Sestav soustavu normálních rovnic $A^T A x = A^T b$ a nalezni popis množiny jejích řešení‡ ve tvaru $X = \{x_0 + By\,;\ y \in \mathbb{R}^n\}$ převodem na RREF nebo podle Penroseovy věty.

2. Je-li $Ax_0 = b$, ukonči: X je množina řešení soustavy $Ax = b$.

3. Je-li $Ax_0 \neq b$, ukonči: soustava $Ax = b$ nemá řešení a X je množina vektorů x splňujících $\|Ax - b\| = \min\{\|Ay - b\|\,;\ y \in \mathbb{R}^n\}$.

‡která je vždy neprázdná

Důležitý zvláštní případ

Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lineárně nezávislé sloupce, potom soustava

$$Ax = b$$

má jediné řešení metodou nejmenších čtverců, a to

$$x = A^{+}b = (A^{T}A)^{-1}A^{T}b. \tag{31}$$

Skutečně, v tomto případě je $A^{+} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}$ (viz str. 105), tedy $A^{+}A = (A^{T}A)^{-1}A^{T}A = I$ a podle Penroseovy věty je

$$X = \{A^{+}b + (I - A^{+}A)y\,;\, y \in \mathbb{R}^{n}\} = \{A^{+}b + 0\cdot y\,;\, y \in \mathbb{R}^{n}\} = \{A^{+}b\},$$

takže množina řešení metodou nejmenších čtverců obsahuje jediný prvek

$$x = A^{+}b = (A^{T}A)^{-1}A^{T}b.$$

Poznámka. V praktických úlohách vedoucích na metodu nejmenších čtverců je lineární nezávislost sloupců častým jevem a explicitní vzorec (31) tak nabývá zvláštní důležitosti.

Zpět k RREF; výhled

Jestliže, jak víme, je odstupňovaný tvar A^R jednoznačně určen maticí A, jaký význam potom mají čísla r a $k_1, \ldots, k_r$ z hlediska matice A?

Na tuto a další otázky lze snáze odpovědět, abstrahujeme-li od struktury matic a zaměříme-li se pouze na vlastnosti operací s nimi. To vede k pojmu abstraktních vektorových prostorů, které budeme probírat v další kapitole.

Část 2:

Vektorové prostory

Definice vektorového prostoru

Definice. Vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ nazýváme množinu V, na které jsou definovány operace „+", která každé dvojici prvků $x \in V$, $y \in V$ přiřazuje prvek $x + y \in V$, a operace „·", která každé dvojici $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in V$ přiřazuje prvek $\alpha \cdot x \in V$ tak, že platí:

1) $x + y = y + x$ pro každé $x, y \in V$,
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ pro každé $x, y, z \in V$,
3) existuje prvek $0 \in V$ takový, že $x + 0 = x$ pro každé $x \in V$,
4) ke každému $x \in V$ existuje $y \in V$ takový, že $x + y = 0$,
5) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $x \in V$,
6) $1 \cdot x = x$ pro každé $x \in V$,
7) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x, y \in V$,
8) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $x \in V$.

Poznámky 1

Podobně jako u matic píšeme většinou αx místo $\alpha \cdot x$ (nikdy nepíšeme $x\alpha$).

S touto konvencí a s vynecháním kvantifikátorů lze psát vlastnosti 1)–8) v jednodušší, ale méně přesné podobě:

1) $x + y = y + x$,
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
3) $x + 0 = x$,
4) $x + y = 0$,
5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
6) $1x = x$,
7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Poznámky 2

- je $0 \in V$ (nulový vektor), takže vektorový prostor je vždy neprázdný,
- prvky z $\mathbb{R}$ nazýváme skaláry, prvky z V vektory,
- struktura prvků z V není blíže určena; zajímají nás vlastnosti operací s nimi, nikoliv jejich podstata,
- podobně definujeme vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$,
- nebude-li řečeno jinak, budeme se v dalším zabývat reálnými vektorovými prostory (nad $\mathbb{R}$) a místo „vektorový prostor" budeme říkat jednoduše „prostor".

Příklady vektorových prostorů

- jednobodová množina $V = \{0\}$ s definovanými operacemi $0 + 0 = 0$, $\alpha \cdot 0 = 0$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je vektorový prostor (tzv. nulový),
- prostor $\mathbb{R}^{m \times n}$ s operacemi sečítání matic a násobení matice skalárem, viz větu 1 (pro nás „standardní" prostor, na kterém budeme ilustrovat zaváděné pojmy),
- prostory $\mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$,
- množina P_n všech polynomů stupně $\leq n$ s reálnými koeficienty (nikoliv „$= n$" !),
- množina P_∞ polynomů všech stupňů s reálnými koeficienty,
- množina $C(a, b)$ všech funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$,
- množina všech konvergentních posloupností reálných čísel,
- atd.

Základní vlastnosti vektorového prostoru

Věta 30. *Pro každý vektorový prostor platí:*

1) *existuje právě jeden prvek* $a \in V$ *s vlastností* $x + a = x$ *pro každé* $x \in V$, *a to* $a = 0$,
2) *ke každému* $x \in V$ *existuje právě jeden prvek* $y \in V$ *s vlastností* $x + y = 0$, *a to* $y = (-1)x$,
3) $\alpha \cdot 0 = 0$ *pro každý skalár* α,
4) $0 \cdot x = 0$ *pro každé* $x \in V$,
5) *je-li* $\alpha \cdot x = 0$, *je buď* $\alpha = 0$, *nebo* $x = 0$.

Důkaz

Dokážeme vlastnosti v pořadí 3), 4), 1), 2), 5).

3) Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0. \tag{32}$$

Podle vlastnosti 4) z definice vektorového prostoru existuje prvek $y \in V$ takový, že $\alpha \cdot 0 + y = 0$. Přičtením tohoto prvku k oběma stranám (32) dostáváme

$$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 + (\alpha \cdot 0 + y) = (\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0) + y = \alpha \cdot 0 + y = 0,$$

takže $\alpha \cdot 0 = 0$.

4) Pro každé $x \in V$ platí

(Pokračování důkazu)

$$0 \cdot x + 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x. \tag{33}$$

K vektoru $0 \cdot x$ existuje vektor y s vlastností $0 \cdot x + y = 0$, a přičtením y k oběma stranám (33) dostáváme

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + (0 \cdot x + y) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + y = 0 \cdot x + y = 0,$$

takže $0 \cdot x = 0$.

1) Aspoň jeden prvek s touto vlastností existuje, a to 0 (podle vlastnosti 3) z definice). Nechť platí $x + a = x$ pro každé x; potom speciálně platí i pro $x = 0$, z čehož dostáváme

$$a = a + 0 = 0 + a = 0,$$

tedy $a = 0$ a 0 je jediný prvek s touto vlastností.

(Pokračování důkazu)

2) Definice zaručuje, že ke každému $x \in V$ existuje $y \in V$ takové, že $x + y = 0$. Nechť rovněž $x + z = 0$. Potom

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z,$$

takže $y = z$ a prvek y s vlastností $x + y = 0$ je jediný. Protože platí

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

podle 4), je $y = (-1) \cdot x$.

5) Nechť $\alpha \cdot x = 0$. Je-li $\alpha = 0$, není co dokazovat. Je-li $\alpha \neq 0$, je

$$x = 1 \cdot x = (\tfrac{1}{\alpha}\alpha) \cdot x = \tfrac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot x) = \tfrac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Podprostory

Definice. Podmnožinu W vektorového prostoru V nazýváme jeho podprostorem jestliže má tyto vlastnosti:

1) $0 \in W$,
2) pro každé $x, y \in W$ je $x + y \in W$,
3) pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in W$ je $\alpha x \in W$,

jinými slovy jestliže množina W je sama vektorovým prostorem vzhledem k operacím sečítání a násobení skalárem definovaným na V.

Příklad

Pro každý vektorový prostor V a libovolný jeho prvek $x \in V$ je

$$W = \{\alpha x\,;\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

podprostor prostoru V, neboť:

- $0 = 0x \in W$,
- $\alpha x + \beta x = (\alpha + \beta)x \in W$,
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \in W$.

Systém vektorů

Systémem vektorů ve vektorovém prostoru V nazýváme libovolnou konečnou posloupnost $x_1, \ldots, x_n$ jeho prvků, $n \geq 0$ (tj. připouštíme i prázdné systémy).

Důležité je, že vektory jsou uspořádané, takže stejný vektor se může vyskytnout vícekrát (tj. může být $x_i = x_j$ pro $i \neq j$); viz např. množinu sloupců dané matice.

V obecné neuspořádané množině se každý její prvek může vyskytnout jen jednou.

Lineární kombinace

Definice. Říkáme, že vektor $x \in V$ je lineární kombinací vektorů $x_1, \dots, x_n \in V$, $n \geq 1$, jestliže existují skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ takové, že platí

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$$

(jinými slovy, jestliže x se dá vyjádřit ve tvaru $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$).

Poznámka. Z hlediska teorie vektorových prostorů je to základní pojem. Lineární kombinací nazýváme i samotný výraz $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$.

Lineární obal

Definice. Je-li $x_1, \ldots, x_n$ systém vektorů z V, $n \geq 1$, potom definujeme jejich lineární obal předpisem

$$[x_1, \ldots, x_n] = \Big\{ x\,;\ x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \text{ pro jistá } \alpha_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \Big\},$$

je to tedy množina všech možných lineárních kombinací vektorů $x_1, \ldots, x_n$. Pro prázdný systém definujeme $[\emptyset] = \{0\}$.

Věta 31. *Pro libovolné vektory $x_1, \ldots, x_n \in V$ je $[x_1, \ldots, x_n]$ podprostor prostoru V.*

Důkaz

Položme $W = [x_1, \dots, x_n]$. Je-li $n = 0$, je $W = [\emptyset] = \{0\}$ podle definice, tedy W je podprostor V. Nechť tedy $n \geq 1$.

a) Je $0 \in W$, protože $0 = \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot x_j$.

b) Nechť $a, b \in W$, takže $a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, $b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ pro jisté α_j, β_j, $j = 1, \dots, n$. Potom $a + b = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j) x_j$, takže $a + b \in W$.

c) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $b \in W$, takže $b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ pro jisté β_j, $j = 1, \dots, n$. Potom $\alpha b = \sum_{j=1}^{n} (\alpha \beta_j) x_j \in W$.

Podle definice podprostoru je tedy W podprostorem V. $\square$

Inkluze a rovnost lineárních obalů

Poznámka. Jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_m$ dva systémy vektorů z V, potom:

1) $[x_1, \ldots, x_n] \subseteq [y_1, \ldots, y_m]$ právě když $x_j \in [y_1, \ldots, y_m]$ pro každé $j = 1, \ldots, n$,
2) $[x_1, \ldots, x_n] = [y_1, \ldots, y_m]$ právě když $x_j \in [y_1, \ldots, y_m]$ pro každé $j = 1, \ldots, n$ a $y_i \in [x_1, \ldots, x_n]$ pro každé $i = 1, \ldots, m$.

Systém generátorů

Definice. Vektory $x_1, \ldots, x_n$ nazýváme systémem generátorů prostoru V (nebo říkáme, že generují prostor V) jestliže platí

$$V = [x_1, \ldots, x_n],$$

jinými slovy jestliže každý vektor $x \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $x_1, \ldots, x_n$.

Definice. Vektorový prostor V, ve kterém existuje aspoň jeden systém generátorů, nazýváme konečně generovaný.

Poznámka. V dalším budeme studovat jen konečně generované prostory.

Příklady

- $\mathbb{R}^{m\times n}$ je konečně generovaný, neboť každou matici $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lze psát ve tvaru $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_i e_j^T$ (kde $e_i e_j^T$ je matice s jedničkou na ij-tém místě a nulami na ostatních místech), takže mn matic $e_i e_j^T$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ tvoří systém generátorů $\mathbb{R}^{m\times n}$,
- podobně $\mathbb{R}^m$ je konečně generovaný, protože každý vektor $x \in \mathbb{R}^m$ lze psát ve tvaru $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$,
- prostor P_n polynomů stupně $\leq n$ je konečně generovaný, protože polynom $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ je lineární kombinací polynomů $1, x, x^2, \ldots, x^n$,
- prostor P_∞ polynomů všech stupňů není konečně generovaný,
- prostor $C(a, b)$ funkcí spojitých na $[a, b]$ není konečně generovaný.

Co vede k pojmu lineární nezávislosti vektorů

Jestliže $x_1, \ldots, x_n$ je systém generátorů prostoru V, potom každý $x \in V$ lze vyjádřit ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

Na koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ můžeme pohlížet jako na souřadnice vektoru x. Kdy jsou tyto souřadnice jednoznačně určeny? Jestliže jednoznačně určeny nejsou, potom lze psát

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j,$$

kde $\alpha_j \neq \beta_j$ pro aspoň jedno j, takže

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) x_j = 0,$$

kde aspoň jedno $\alpha_j - \beta_j \neq 0$. Vyloučením této možnosti zaručíme jednoznačnost.

Lineární (ne)závislost vektorů

Definice. Systém vektorů $x_1, \ldots, x_n \in V$ nazýváme lineárně závislý jestliže existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, z nichž aspoň jedno je nenulové, taková, že platí

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0, \tag{34}$$

a lineárně nezávislý v opačném případě (tj. jestliže rovnost (34) platí jen pro $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$).

Poznámky

- lineárně závislý systém je neprázdný $\Rightarrow$ prázdný systém je lineárně nezávislý,
- je-li $x_i = 0$ pro jisté i, je systém lineárně závislý ($\alpha_i = 1$, $\alpha_k = 0$ jinak),
- je-li $x_i = x_j$ pro jisté $i \neq j$, je systém lineárně závislý ($\alpha_i = 1$, $\alpha_j = -1$, $\alpha_k = 0$ jinak),
- podsystém lineárně nezávislého systému je lineárně nezávislý,
- nadsystém lineárně závislého systému je lineárně závislý.

Redukce lineárně závislého systému generátorů

Věta 32. *Je-li $x_1, \dots, x_n$ lineárně závislý systém generátorů prostoru V, potom existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ je opět systém generátorů prostoru V.*

Poznámka. Výsledný systém $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ však už nemusí být lineárně závislý.

Důkaz

Nechť $x_1, \ldots, x_n$ je lineárně závislý systém generátorů prostoru V. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j = 0 \tag{35}$$

pro jisté $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, přičemž existuje k, pro které $\beta_k \neq 0$. Rovnost (35) můžeme psát ve tvaru

$$\beta_k x_k + \sum_{j=1,\, j \neq k}^{n} \beta_j x_j = 0$$

a odtud vypočítat x_k přičtením $\sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} (-\beta_j) x_j$ k oběma stranám a vydělením β_k:

$$x_k = \sum_{j=1,\, j \neq k}^{n} \left(-\frac{\beta_j}{\beta_k} \right) x_j. \tag{36}$$

(Pokračování důkazu)

Nechť x je libovolný prvek V. Protože $x_1, \ldots, x_n$ je systém generátorů prostoru V, existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tak, že

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

S využitím (36) můžeme nyní psát

$$x = \sum_{j=1, j \neq k}^{n} \alpha_j x_j + \alpha_k x_k = \sum_{j=1, j \neq k}^{n} \left(\alpha_j - \frac{\beta_j}{\beta_k} \alpha_k \right) x_j.$$

To znamená, že x lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů

$$x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n \tag{37}$$

a protože x byl libovolný vektor z V, je (37) systém generátorů prostoru V. $\square$

Steinitzova věta o výměně

Věta 33. *Nechť* $x_1, \ldots, x_m$ *je lineárně nezávislý systém a* $y_1, \ldots, y_n$ *systém generátorů prostoru* V *(*$m \geq 0$*,* $n \geq 0$*). Potom platí:*

1) $m \leq n$,
2) *existují vzájemně různé indexy* $k_1, \ldots, k_{n-m} \in \{1, \ldots, n\}$ *takové, že* $x_1, \ldots, x_m, y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n-m}}$ *je opět systém generátorů prostoru* V*.*

Poznámka. V anglicky psané literatuře se používá názvu „replacement theorem". Část 2) se někdy pro zjednodušení formuluje jako „po vhodném přečíslování tvoří $x_1, \ldots, x_m, y_{m+1}, \ldots, y_n$ opět systém generátorů prostoru V".

Důkaz

Důkaz provedeme indukcí podle m. Je-li $m = 0$, potom zřejmě $m \leq n$ a $y_1, \ldots, y_n$ tvoří hledaný systém. Nechť tedy tvrzení platí pro $m - 1 \geq 0$ a nechť $x_1, \ldots, x_m$ je lineárně nezávislý systém a $y_1, \ldots, y_n$ je systém generátorů prostoru V. Jelikož systém $x_1, \ldots, x_m$ je lineárně nezávislý, je i jeho podsystém $x_1, \ldots, x_{m-1}$ lineárně nezávislý a tedy podle indukčního předpokladu je

$$m - 1 \leq n \tag{38}$$

a existují vzájemně různé indexy $y_{\ell_1}, \ldots y_{\ell_{n-m+1}} \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že

$$x_1, \ldots, x_{m-1}, y_{\ell_1}, \ldots, y_{\ell_{n-m+1}} \tag{39}$$

tvoří systém generátorů prostoru V. Kdyby bylo $m - 1 = n$, potom by to znamenalo, že $x_1, \ldots, x_{m-1}$ je systém generátorů V a tedy by bylo možno vyjádřit x_m jako jejich lineární kombinaci

$$x_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j,$$

(Pokračování důkazu)

z čehož by plynulo, že systém $x_1, \ldots, x_m$ je lineárně závislý ve sporu s předpokladem. Z (38) tedy plyne $m - 1 < n$, tj. $m \leq n$, čímž je první tvrzení dokázáno. Pro důkaz druhého tvrzení vyjděme z toho, že jelikož vektory (39) tvoří systém generátorů V, lze x_m vyjádřit jako jejich lineární kombinaci

$$x_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j + \sum_{i=1}^{n-m+1} \beta_i y_{\ell_i} \tag{40}$$

a aspoň jeden z koeficientů β_i je různý od nuly, protože jinak by vektor x_m byl lineární kombinací vektorů $x_1, \ldots, x_{m-1}$ a tedy systém $x_1, \ldots, x_m$ by byl lineárně závislý ve sporu s předpokladem. Tedy $\beta_k \neq 0$ pro jisté k a z (40) dostáváme

$$y_{\ell_k} = \frac{1}{\beta_k}\Big(x_m - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j - \sum_{i=1, i\neq k}^{n-m+1} \beta_i y_{\ell_i}\Big). \tag{41}$$

(Pokračování důkazu)

Jelikož (39) tvoří systém generátorů podle indukčního předpokladu, existují ke každému $x \in V$ koeficienty γ_j, δ_i tak, že

$$x = \sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j x_j + \sum_{i=1}^{n-m+1} \delta_i y_{\ell_i}.$$

Dosadíme-li sem vyjádření y_{ℓ_k} z (41), dostáváme

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j x_j + \sum_{i=1, i\neq k}^{n-m+1} \delta_i y_{\ell_i} + \frac{\delta_k}{\beta_k}(x_m - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j - \sum_{i=1, i\neq k}^{n-m+1} \beta_i y_{\ell_i}) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} (\gamma_j - \frac{\delta_k}{\beta_k}\alpha_j) x_j + \frac{\delta_k}{\beta_k} x_m + \sum_{i=1, i\neq k}^{n-m+1} (\delta_i - \frac{\delta_k}{\beta_k}\beta_i) y_{\ell_i}, \end{aligned}$$

takže x je lineární kombinací vektorů

$$x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, y_{\ell_1}, \ldots, y_{\ell_{k-1}}, y_{\ell_{k+1}}, \ldots, y_{\ell_{n-m+1}}. \tag{42}$$

(Pokračování důkazu)

Protože x byl libovolný vektor z V, dokázali jsme tím, že (42) je systém generátorů prostoru V. Přečíslujeme-li nyní $n-m$ vektorů $y_{\ell_1}, \ldots, y_{\ell_{k-1}}, y_{\ell_{k+1}}, \ldots, y_{\ell_{n-m+1}}$ jako $y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n-m}}$, dostáváme tvrzení věty. □

Báze a její existence

Definice. Lineárně nezávislý systém generátorů konečně generovaného prostoru V nazýváme jeho bází.

Věta 34. *Každý konečně generovaný prostor V má bázi.*

Důkaz

Protože V je konečně generovaný, má aspoň jeden systém generátorů. Ke každému systému generátorů $x_1, \ldots, x_m$ přiřaďme počet jeho prvků m, a nechť M je množina všech těchto čísel m přes všechny systémy generátorů prostoru V. Potom M je neprázdná množina přirozených čísel a jako taková má nejmenší prvek m_0. Nechť $x_1, \ldots, x_{m_0}$ je jemu odpovídající systém generátorů. Kdyby tento systém byl lineárně závislý, potom podle věty 32 by z něho bylo možno vyřadit jistý vektor x_k tak, že $x_1, \ldots, x_{k-1}$, $x_{k+1}, \ldots, x_{m_0}$ by byl opět systém generátorů s počtem prvků $m_0 - 1 \in M$ ve sporu s tím, že m_0 je nejmenší prvek množiny M. Předpoklad lineární závislosti systému $x_1, \ldots, x_{m_0}$ vede tedy ke sporu. To znamená, že systém $x_1, \ldots, x_{m_0}$ je lineárně nezávislý, a jelikož je to systém generátorů, dostáváme tak, že tvoří bázi prostoru V. $\square$

Smysl zavedení báze: souřadnice

Věta 35. *Je-li $x_1, \dots, x_n$, $n \geq 1$, báze prostoru V, potom ke každému $x \in V$ existuje právě jedna n-tice skalárů $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ taková, že platí*

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

Definice. Čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nazýváme souřadnicemi vektoru x v bázi $x_1, \dots, x_n$.

Důkaz

Nechť $x \in V$. Protože $x_1, \ldots, x_n$ tvoří bázi, je to systém generátorů a tedy existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tak, že

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j. \tag{43}$$

Jestliže platí rovněž

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$$

pro jisté $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, potom odečtením dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) x_j = x - x = 0$$

a jelikož systém $x_1, \ldots, x_n$ je lineárně nezávislý, musí platit

$$\beta_j - \alpha_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

tedy vyjádření (43) vektoru x v bázi $x_1, \ldots, x_n$ je jednoznačné. $\square$

Shrnutí

Prvek $x \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků systému $x_1, \ldots, x_n \in V$

- aspoň jedním způsobem, je-li to systém generátorů,
- právě jedním způsobem, je-li to báze,
- nejvýše jedním způsobem, je-li lineárně nezávislý.

Dimenze vektorového prostoru

Věta 36. *Všechny báze konečně generovaného prostoru V mají stejný počet prvků.*

Důkaz. Nechť $x_1, \ldots, x_m$ a $y_1, \ldots, y_n$ jsou libovolné dvě báze V. Potom:

(a) $x_1, \ldots, x_m$ je lineárně nezávislý systém a $y_1, \ldots, y_n$ je systém generátorů, takže podle Steinitzovy věty je $m \leq n$,

(b) $y_1, \ldots, y_n$ je lineárně nezávislý systém a $x_1, \ldots, x_m$ je systém generátorů, takže podle téže věty je $n \leq m$.

Dokázali jsme, že platí jak $m \leq n$, tak $n \leq m$, celkem tedy $m = n$ a obě báze mají stejný počet prvků. $\square$

Definice. Počet prvků báze nazýváme dimenzí prostoru V a značíme ji $\dim V$.

Příklady

- pro $V = \{0\}$ je $\emptyset$ lineárně nezávislá a $[\emptyset] = \{0\}$, tedy prázdná množina tvoří bázi $\{0\}$ a proto $\dim\{0\} = 0$,
- systém vektorů $e_i e_j^T$ ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$) tvoří systém generátorů $\mathbb{R}^{m \times n}$ a je lineárně nezávislý: je-li

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_i e_j^T = 0,$$

  potom nalevo je matice $A = (\alpha_{ij})$, tedy z $A = 0$ plyne $\alpha_{ij} = 0$ pro všechna i, j. Závěr: $\mathbb{R}^{m \times n}$ má dimenzi mn,
- podobně systém vektorů e_i, $i = 1, \ldots, m$ tvoří bázi $\mathbb{R}^m$, tedy $\mathbb{R}^m$ má dimenzi m.

Vztah počtu prvků systému k dimenzi

Věta 37. *V konečně generovaném prostoru V platí:*

1) *je-li $x_1, \ldots, x_m$ lineárně nezávislý systém ve V, potom $m \leq \dim V$ a je-li $m = \dim V$, potom $x_1, \ldots, x_m$ je báze V,*
2) *je-li $y_1, \ldots, y_n$ systém generátorů prostoru V, potom $\dim V \leq n$ a je-li $\dim V = n$, potom $y_1, \ldots, y_n$ je báze V.*

Poznámka. Dá se tedy rovněž říci, že báze je maximální (z hlediska počtu prvků) lineárně nezávislý systém a minimální (z hlediska počtu prvků) systém generátorů.

Důkaz

Nechť $z_1, \ldots, z_d$ je báze V, takže $d = \dim V$.

1) Je-li $x_1, \ldots, x_m$ lineárně nezávislý systém, potom vzhledem k tomu, že $z_1, \ldots, z_d$ je systém generátorů, platí podle Steinitzovy věty $m \leq d = \dim V$. Je-li $m = \dim V$, potom systém $x_1, \ldots, x_m$ lze podle téže věty doplnit o $d - m = 0$ vektorů na systém generátorů prostoru V. Z toho plyne, že $x_1, \ldots, x_m$ je už systém generátorů a proto je to báze V.

2) Je-li $y_1, \ldots, y_n$ systém generátorů, potom opět podle Steinitzovy věty s ohledem na to, že systém $z_1, \ldots, z_d$ je lineárně nezávislý, platí $\dim V = d \leq n$. Je-li $\dim V = n$, potom v případě, že by $y_1, \ldots, y_n$ byl lineárně závislý, bylo by možno z něj podle věty 32 vyloučit jeden vektor a systém by zůstal systémem generátorů o $d - 1$ prvcích, přičemž lineárně nezávislý systém $z_1, \ldots, z_d$ má d prvků. To by protiřečilo první části Steinitzovy věty, proto systém $y_1, \ldots, y_n$ je lineárně nezávislý a tedy tvoří bázi V. $\square$

Lineárně nezávislý systém lze rozšířit na bázi

Věta 38. *Každý lineárně nezávislý systém v konečně generovaném prostoru V lze rozšířit na bázi.*

Důkaz. Nechť $x_1, \ldots, x_m$ je lineárně nezávislý systém a nechť $z_1, \ldots, z_d$ je libovolná báze V. Potom podle Steinitzovy věty existují $k_1, \ldots, k_{d-m}$ tak, že $x_1, \ldots, x_m$, $z_{k_1}, \ldots, z_{k_{d-m}}$ je systém generátorů který sestává z d prvků, kde $d = \dim V$, a proto podle druhé části věty 37 je to báze prostoru V, která je rozšířením systému $x_1, \ldots, x_m$. $\square$

Dimenze podprostoru

Věta 39. *Každý podprostor* W *konečně generovaného prostoru* V *je konečně generovaný a platí pro něj*

$$\dim W \leq \dim V.$$

Navíc, je-li $\dim W = \dim V$, *potom* $W = V$.

Důkaz

Položme

$$M = \{m \geq 0\,;\, W \text{ obsahuje lineárně nezávislý systém o } m \text{ prvcích}\}.$$

Potom $0 \in M$ (prázdný systém je lineárně nezávislý), takže $M \neq \emptyset$. Je-li $x_1, \dots, x_m$ lineárně nezávislý systém ve W, potom je lineárně nezávislý i ve V a tedy podle věty 37 je $m \leq \dim V$. To ukazuje, že množina M je shora omezená a proto obsahuje největší prvek m_1; nechť $x_1, \dots, x_{m_1}$ je jemu odpovídající lineárně nezávislý systém ve W. Dokážeme, že $x_1, \dots, x_{m_1}$ je báze W. Kdyby ne, potom by systém $x_1, \dots, x_{m_1}$ nebyl systémem generátorů W a tedy by existoval prvek $x \in W - [x_1, \dots, x_{m_1}]$ jehož přidáním k systému $x_1, \dots, x_{m_1}$ bychom dostali lineárně nezávislý systém ve W o $m_1 + 1$ prvcích, což je spor s definicí m_1 jakožto největšího prvku množiny M. Tedy $x_1, \dots, x_{m_1}$ je systém generátorů W, takže je to báze W a platí $\dim W = m_1 \leq \dim V$. Je-li $\dim W = \dim V$, potom podle první části věty 37 je $x_1, \dots, x_{m_1}$ báze V a tedy $W = [x_1, \dots, x_{m_1}] = V$. $\square$

Tvar podprostoru

Víme, že je-li $x_1, \ldots, x_m \in V$, potom $[x_1, \ldots, x_m]$ je podprostor V. Platí i opak:

Věta 40. *Pro každý podprostor W konečně generovaného prostoru V platí*

$$W = [x_1, \ldots, x_m]$$

pro jisté $x_1, \ldots, x_m$, které lze volit tak, aby $m \leq \dim V$.

Důkaz. Je-li W podprostor konečně generovaného prostoru V, potom podle věty 39 má bázi $x_1, \ldots, x_m$, kde $m \leq \dim V$, a platí $W = [x_1, \ldots, x_m]$.

$\square$

Spojení a průnik podprostorů

Věta 41. *Jsou-li* W_1, W_2 *podprostory prostoru* V*, potom i* $W_1 \cap W_2$ *a*

$$W_1 + W_2 := \{x_1 + x_2\,;\, x_1 \in W_1,\, x_2 \in W_2\}$$

jsou podprostory prostoru V*.*

Definice. Podprostor $W_1 + W_2$ nazýváme spojením podprostorů W_1 a W_2.

Důkaz

Nechť W_1, W_2 jsou podprostory prostoru V.

a) Dokážeme, že $W_1 \cap W_2$ je podprostor V. Je $0 \in W_1$ a $0 \in W_2$, takže $0 \in W_1 \cap W_2$. Jsou-li $x, y \in W_1 \cap W_2$, potom $x, y \in W_1$, takže $x + y \in W_1$, a analogicky $x, y \in W_2$, takže $x + y \in W_2$, celkem tedy $x + y \in W_1 \cap W_2$. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in W_1 \cap W_2$, potom $x \in W_1$, takže $\alpha x \in W_1$, a $x \in W_2$, takže $\alpha x \in W_2$, celkem $\alpha x \in W_1 \cap W_2$. Dokázali jsme, že $W_1 \cap W_2$ má tři vlastnosti z definice podprostoru a je to tedy podprostor V.

b) Dokážeme, že $W_1 + W_2$ je podprostor V. Zřejmě $0 \in W_1 + W_2$, protože $0 \in W_1$ a $0 \in W_2$. Nechť $x, y \in W_1 + W_2$. Potom x je tvaru $x = x_1 + x_2$, kde $x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$, a y je tvaru $y = y_1 + y_2$, kde $y_1 \in W_1$ a $y_2 \in W_2$. Potom $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, kde $x_1 + y_1 \in W_1$ a $x_2 + y_2 \in W_2$ s ohledem na to, že W_1, W_2 jsou podprostory, tedy $x + y \in W_1 + W_2$. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in W_1 + W_2$, potom $x = x_1 + x_2$, kde $x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$, tedy $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2$, kde $\alpha x_1 \in W_1$ a $\alpha x_2 \in W_2$, což dává $\alpha x \in W_1 + W_2$. Dokázali jsme, že $W_1 + W_2$ splňuje tři vlastnosti z definice podprostoru a je to tedy podprostor V. □

Věta o dimenzi spojení a průniku

Věta 42. *Pro libovolné podprostory* W_1, W_2 *konečně generovaného prostoru* V *platí*

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

Důsledek. Je-li $\dim W_1 + \dim W_2 > \dim V$, potom $W_1 \cap W_2$ obsahuje nenulový vektor.

Důkaz

Nechť W_1, W_2 jsou podprostory konečně generovaného prostoru V. Potom $W_1 \cap W_2$ je podprostor V (věta 41) a má bázi $z_1, \dots, z_p$, kde $p \le \dim V$ (věta 39). Protože $z_1, \dots, z_p$ je lineárně nezávislý systém ve W_1, lze ho podle věty 38 rozšířit na bázi

$$z_1, \dots, z_p, x_1, \dots, x_m \tag{44}$$

podprostoru W_1 a analogicky ji lze rozšířit na bázi

$$z_1, \dots, z_p, y_1, \dots, y_n \tag{45}$$

podprostoru W_2. Dokážeme, že

$$z_1, \dots, z_p, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \tag{46}$$

je báze $W_1 + W_2$. Především dokážeme, že (46) je systém generátorů podprostoru $W_1 + W_2$. Je-li $t \in W_1 + W_2$, potom $t = t_1 + t_2$, kde $t_1 \in W_1$ a $t_2 \in W_2$. Protože (44), (45) jsou báze W_1 resp. W_2, lze psát

$$t_1 = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k z_k + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i,$$

(Pokračování důkazu)

$$t_2 = \sum_{k=1}^{p} \delta_k z_k + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j$$

pro jisté $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \delta_k$, takže

$$t = t_1 + t_2 = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_k + \delta_k) z_k + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j,$$

což ukazuje, že t je lineární kombinací systému (46) a protože t byl libovolný prvek podprostoru $W_1 + W_2$, znamená to, že (46) je systém generátorů $W_1 + W_2$.

Dále dokážeme, že systém (46) je lineárně nezávislý. Předpokládejme, že platí

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_k z_k + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = 0 \tag{47}$$

(Pokračování důkazu)

pro jisté $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$. Potom

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_k z_k + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j. \tag{48}$$

Označme t vektor stojící na levé (resp. pravé) straně (48). Potom podle (44), (48) je $t \in W_1$ a podle (45), (48) je $t \in W_2$, tedy $t \in W_1 \cap W_2$ a protože $z_1, \dots, z_p$ je báze $W_1 \cap W_2$, lze psát

$$t = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k z_k$$

pro jistá ε_k. Z toho dostáváme

$$\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k z_k + \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = 0,$$

(Pokračování důkazu)

a jelikož (45) je báze W_2, plyne odsud

$$\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_p = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0, \tag{49}$$

a dosazením do (48) dostáváme

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_p = \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0 \tag{50}$$

vzhledem k tomu, že (44) je báze W_1. Z (49), (50) plyne, že všechny koeficienty v (47) jsou nulové, takže systém (46) je lineárně nezávislý a protože jsme již dříve dokázali, že je to systém generátorů podprostoru $W_1 + W_2$, dostáváme tak, že je to báze $W_1 + W_2$. Z toho nyní podle (44), (45), (46) plyne, že

$$\dim(W_1 + W_2) = p + m + n = (p + m) + (p + n) - p$$

$$= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2),$$

což je tvrzení věty. $\square$

Direktní součet podprostorů

Definice. Platí-li $V = W_1 + W_2$, kde $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, potom V nazýváme direktním součtem podprostorů W_1, W_2 a zapisujeme $V = W_1 \oplus W_2$.

Věta 43. *Je-li $V = W_1 \oplus W_2$, potom každý vektor $x \in V$ lze právě jedním způsobem psát ve tvaru*

$$x = x_1 + x_2$$

kde $x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$.

Důkaz

Nechť $V = W_1 \oplus W_2$. Protože $V = W_1 + W_2$, lze každý vektor $x \in V$ psát ve tvaru

$$x = x_1 + x_2, \tag{51}$$

kde $x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$. Nechť platí rovněž

$$x = y_1 + y_2,$$

kde $y_1 \in W_1$ a $y_2 \in W_2$. Potom z rovnosti

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

plyne

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2,$$

kde $x_1 - y_1 \in W_1$ a $y_2 - x_2 \in W_2$, takže $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in W_1 \cap W_2$. Protože $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ podle definice, je $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0$, tedy $x_1 = y_1$ a $x_2 = y_2$, takže vyjádření x ve tvaru (51), kde $x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$, je jednoznačné. $\square$

Dimenze direktního součtu

Věta 44. *Je-li V konečně generovaný a $V = W_1 \oplus W_2$, potom*

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2.$$

Důkaz. Je-li V konečně generovaný a platí-li $V = W_1 \oplus W_2$, potom $V = W_1 + W_2$ a $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, takže z věty 42 přímo plyne

$$\dim V = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2. \qquad \square$$

Část 3:

Vektorové prostory se skalárním součinem

Vektorový prostor se skalárním součinem

Definice. Vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ se nazývá vektorovým prostorem se skalárním součinem jestliže je na něm navíc definovaná operace, která každé dvojici $x, y \in V$ přiřazuje skalár $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ tak, že platí:

1) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in V$, přičemž $\langle x, x\rangle = 0$ právě když $x = 0$,
2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ pro každé $x, y, z \in V$,
3) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in V$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$,
4) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ pro každé $x, y \in V$.

Je-li V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, potom $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$ a vlastnost 4) se nahrazuje vlastností

4') $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in V$,

kde pruh značí komplexně sdružené číslo.

Důsledky

- $\langle x, y+z \rangle = \langle y+z, x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ nad $\mathbb{R}$,
- $\langle x, y+z \rangle = \overline{\langle y+z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ nad $\mathbb{C}$,
- $\langle x, \alpha y \rangle = \langle \alpha y, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ nad $\mathbb{R}$,
- $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha}\,\overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$ nad $\mathbb{C}$,
- $\langle 0, y \rangle = \langle y, 0 \rangle = 0$ nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Příklady

Dříve definované prostory se stanou prostory se skalárním součinem, zavedeme-li

- v $\mathbb{R}^{m\times n}$: $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}$,
- v $\mathbb{C}^{m\times n}$: $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\overline{B_{ij}}$,
- v $\mathbb{R}^{m}$: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$,
- v $\mathbb{C}^{m}$: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i \overline{y_i}$,
- v $C(a,b)$: $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

Norma

V dalším předpokládáme, že V je vektorový prostor se skalárním součinem a nebudeme už většinou tento předpoklad explicitně uvádět.

Definice. Pro každé $x \in V$ definujeme normu x předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Poznámka. To je možné díky vlastnosti 1), podle které $\langle x, x \rangle \geq 0$. Norma je tedy nezáporné reálné číslo i pro prostory nad $\mathbb{C}$ a představuje „délku" vektoru x.

Ortogonální vektory

Definice. Vektory $x, y \in V$ se nazývají ortogonální (kolmé) jestliže $\langle x, y \rangle = 0$.

Věta 45. (Pythagorova věta) *Jsou-li* $x, y \in V$ *ortogonální, potom*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Důkaz.

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

$\square$

Poznámka. V prostoru nad $\mathbb{R}$ platí i opačná implikace, v prostoru nad $\mathbb{C}$ obecně ne.

Cauchy-Schwarzova nerovnost

Věta 46. *Ve vektorovém prostoru V se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ pro každé $x, y \in V$ platí*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Poznámka. U prostorů nad $\mathbb{C}$ jde vlevo o absolutní hodnotu komplexního čísla, tj. $|\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Autorství. Cauchy 1821 pro $\mathbb{R}^m$, Schwarz ~1880 pro $C(a, b)$.

Důkaz

Nerovnost jistě platí pro $\langle x, y\rangle = 0$ nebo $x = 0$. Nechť tedy $\langle x, y\rangle \neq 0$ a $x \neq 0$. Potom existuje $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, že $\alpha y - x$ a x jsou ortogonální: skutečně, rovnost $\langle \alpha y - x, x\rangle = \alpha\langle y, x\rangle - \langle x, x\rangle = 0$ je splněna pro $\alpha = \langle x, x\rangle / \langle y, x\rangle = \|x\|^2/\langle y, x\rangle$. Z ortogonality vektorů $\alpha y - x$ a x plyne potom podle Pythagorovy věty

$$\|\alpha y\|^2 = \|(\alpha y - x) + x\|^2 = \|\alpha y - x\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2,$$

tedy

$$\|\alpha y\| \geq \|x\|$$

a dosazením za α

$$\frac{\|x\|^2}{|\langle y, x\rangle|}\|y\| \geq \|x\|,$$

tj.

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle y, x\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \qquad \square$$

Vlastnosti normy

Věta 47. *Ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ pro každé $x, y \in V$ a každý skalár α platí:*

1) $\|x\| \geq 0$ *a* $\|x\| = 0$ *právě když* $x = 0$,

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Důkaz. Tvrzení 1) a 3) plynou přímo z definice. S použitím Cauchy-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

což dává po odmocnění tvrzení 2). $\square$

Speciální normy a jejich značení

Normy indukované dříve zavedenými skalárními součiny:

- v $\mathbb{R}^{m\times n}$: $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2} = \|A\|_F$,
- v $\mathbb{C}^{m\times n}$: $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2} = \|A\|_F$,
- v $\mathbb{R}^{m}$: $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} = \|x\|_2$,
- v $\mathbb{C}^{m}$: $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2} = \|x\|_2$,
- v $C(a,b)$: $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$

(Frobeniova norma, eukleidovská norma).

Ortonormální systém

Definice. Systém vektorů $z_1, \ldots, z_m \in V$ se nazývá ortonormální jestliže platí $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$ a $\|z_i\| = 1$ $(i, j = 1, \ldots, m)$. Prázdný systém považujeme definitoricky za ortonormální.

Poznámka. Systém ve kterém platí pouze $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$ (bez požadavku jednotkové normy vektorů) se nazývá ortogonální. Takové systémy zde nebudeme uvažovat, uvádíme jen pro úplnost.

Poznámka. Pro každý vektor $x \neq 0$ je $\left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = 1$. Tohoto obratu často používáme při úpravě vektoru na jednotkovou normu.

Věta 48. *Každý ortonormální systém je lineárně nezávislý.*

Důkaz. Je-li $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i = 0$, potom pro každé $j = 1, \ldots, m$ dostáváme $0 = \langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i, z_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle z_i, z_j \rangle = \alpha_j \langle z_j, z_j \rangle = \alpha_j$, takže systém je lineárně nezávislý. $\square$

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta 49. *Nechť $x_1, \ldots, x_m$ je lineárně nezávislý systém ve V. Položíme-li*

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j \\ z_k &= \frac{1}{\|y_k\|} y_k \end{aligned}$$

pro $k = 1, \ldots, m$, potom tyto vektory jsou dobře definované, $z_1, \ldots, z_m$ tvoří ortonormální systém a platí

$$[z_1, \ldots, z_m] = [x_1, \ldots, x_m].$$

Poznámka. Gram-Schmidtův proces tedy z lineárně nezávislého systému $x_1, \ldots, x_m$ vytvoří ortonormální systém $z_1, \ldots, z_m$, který generuje stejný podprostor.

Důkaz

Dokážeme indukcí pro $k = 1, \ldots, m$ že $y_k \neq 0$, $z_1, \ldots, z_k$ je ortonormální systém a $[z_1, \ldots, z_k] = [x_1, \ldots, x_k]$. Pro $k = m$ pak dostáváme tvrzení věty.

1. Pro $k = 1$ je $y_1 = x_1 \neq 0$ z lineární nezávislosti, $\|z_1\| = 1$ a $[z_1] = [x_1]$ protože z_1 je násobkem x_1.

2. Nechť tvrzení platí pro $k - 1 < m$. Kdyby bylo $y_k = 0$, bylo by $x_k \in [z_1, \ldots, z_{k-1}] = [x_1, \ldots, x_{k-1}]$ ve sporu s lineární nezávislostí; proto $y_k \neq 0$. Jelikož $z_1, \ldots, z_{k-1}$ tvoří ortonormální systém, je $\langle z_k, z_i \rangle = \frac{1}{\|y_k\|} \langle y_k, z_i \rangle = \frac{1}{\|y_k\|} (\langle x_k, z_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle \langle z_j, z_i \rangle) = \frac{1}{\|y_k\|} (\langle x_k, z_i \rangle - \langle x_k, z_i \rangle) = 0$ pro každé $i \leq k - 1$ a $\|z_k\| = 1$, takže $z_1, \ldots, z_k$ tvoří ortonormální systém. Dále, $z_k \in [z_1, \ldots, z_{k-1}, x_k] \subseteq [x_1, \ldots, x_k]$, tedy $[z_1, \ldots, z_k] \subseteq [x_1, \ldots, x_k]$, a podobně z $x_k \in [z_1, \ldots, z_k]$ plyne $[x_1, \ldots, x_k] \subseteq [z_1, \ldots, z_k]$, celkem tedy $[z_1, \ldots, z_k] = [x_1, \ldots, x_k]$ (viz str. 146). $\square$

Gram-Schmidtův proces (algoritmus)

0. Dány: $x_1, \ldots, x_m \in V$, lineárně nezávislé.

1. Pro $k = 1, \ldots, m$ proveď

$$\begin{aligned} y_k &:= x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j\,; \\ z_k &:= \frac{1}{\|y_k\|} y_k; \end{aligned}$$

2. Ukonči: $z_1, \ldots, z_m$ je ortonormální systém ve V a $[z_1, \ldots, z_m] = [x_1, \ldots, x_m]$.

Ortonormální báze

V dalším předpokládáme, že V je konečně generovaný prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem.

Definice. Bázi prostoru V, která tvoří ortonormální systém, nazýváme ortonormální bází.

Příklad. Vektory $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, $i = 1, \ldots, n$, tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$ (tzv. standardní).

Existence ortonormální báze

Věta 50. *Každý konečně generovaný prostor se skalárním součinem má ortonormální bázi.*

Důkaz. Konečně generovaný prostor má bázi (věta 34) a tu lze Gram-Schmidtovým procesem převést na ortonormální bázi. □

Věta 51. *Každý ortonormální systém vektorů lze doplnit na ortonormální bázi.*

Důkaz. Ortonormální systém $z_1, \ldots, z_m$ doplníme podle věty 38 na bázi $z_1, \ldots, z_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ a tu převedeme Gram-Schmidtovým procesem na ortonormální bázi $z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n$ ($z_1, \ldots, z_m$ se během procesu nezmění). □

Smysl zavedení ortonormální báze: vzorce pro souřadnice

Věta 52. *Nechť* $z_1, \ldots, z_n$ *je ortonormální báze* V *a nechť* $x \in V$. *Potom platí*

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, z_j \rangle z_j. \tag{52}$$

Poznámka. Souřadnicím $\langle x, z_j \rangle$, $j = 1, \ldots, n$, se říká Fourierovy koeficienty a vyjádření (52) Fourierův rozvoj.

Důkaz. Nechť $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j$ je vyjádření x v ortonormální bázi $z_1, \ldots, z_n$. Potom pro každé i dostáváme přenásobením z_i zprava

$$\langle x, z_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_j z_j, z_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle z_j, z_i \rangle = \alpha_i,$$

a zpětným dosazením $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, z_j \rangle z_j$. $\square$

Intermezzo: Fourierovy řady

Uvažujme vektorový prostor spojitých reálných funkcí na intervalu $[-\pi, \pi]$ se skalárním součinem $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. J. B. Fourier (1768-1830) byl první, kdo si všiml, že funkce

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

tvoří (spočetný) ortonormální systém ve V. Sestrojíme-li formální analogii vzorce z předchozí věty pro tento případ, dostáváme řadu

$$f = \left\langle f, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f, \tfrac{\cos jx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \tfrac{\cos jx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f, \tfrac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \tfrac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

kde

$$a_j = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos jx\,dx, \qquad b_j = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin jx\,dx.$$

(Pokračování)

Fourier dokázal, že platí

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

pro každé $x \in (-\pi, \pi)$. Pozoruhodné na tomto výsledku je, že obecná spojitá funkce $f(x)$ je vyjádřena řadou sestávající z periodických funkcí („kmitů"; $\cos jx$ resp. $\sin jx$ má periodu $2\pi/j$). Proto jsou Fourierovy řady základním nástrojem pro zpracování signálu (spec. zvuku).

Podrobněji se tyto otázky probírají ve 2. roč. v přednáškách z analýzy a z algoritmů (diskrétní Fourierova transformace).

Ortogonální doplněk

Definice. Ortogonálním doplňkem podprostoru W prostoru V nazýváme množinu

$$W^{\perp} = \{x \in V\,;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro každé } y \in W\}.$$

Věta 53. *$W^{\perp}$ je podprostor prostoru V.*

Důkaz. Dokážeme, že $W^{\perp}$ má tři vlastnosti z definice podprostoru.

1) Pro každé $y \in W$ je $\langle 0, y\rangle = 0$, takže $0 \in W^{\perp}$.

2) Jsou-li $x_1, x_2 \in W^{\perp}$, potom pro každé $y \in W$ je $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = 0 + 0 = 0$, tedy $x_1 + x_2 \in W^{\perp}$.

3) Je-li $x \in W^{\perp}$ a α je skalár, potom pro každé $y \in W$ je $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle = \alpha \cdot 0 = 0$, tj. $\alpha x \in W^{\perp}$. $\square$

Vlastnosti ortogonálního doplňku

Věta 54. *Nechť W je podprostor V. Potom platí:*

1) *je-li $z_1, \ldots, z_m$ ortonormální báze W a je-li $z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n$ její rozšíření na ortonormální bázi V, potom $z_{m+1}, \ldots, z_n$ je ortonormální báze $W^\perp$,*
2) $(W^\perp)^\perp = W$,
3) $V = W \oplus W^\perp$,
4) $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

Důkaz

1) Každé $x \in V$ má Fourierův rozvoj $x = \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j \rangle z_j + \sum_{j=m+1}^{n} \langle x, z_j \rangle z_j$. Je-li $x \in W^{\perp}$, je $\langle x, z_j \rangle = 0$ pro $j = 1, \dots, m$, tedy $x = \sum_{j=m+1}^{n} \langle x, z_j \rangle z_j \in [z_{m+1}, \dots, z_n]$. Naopak, je-li $x \in [z_{m+1}, \dots, z_n]$, potom $x = \sum_{j=m+1}^{n} \langle x, z_j \rangle z_j$ a z jednoznačnosti vyjádření x v bázi $z_1, \dots, z_n$ plyne, že $\langle x, z_j \rangle = 0$ pro $j = 1, \dots, m$, tj. že $x \in W^{\perp}$. Tím jsme dokázali, že $W^{\perp} = [z_{m+1}, \dots, z_n]$ a jelikož ortonormální systém $z_{m+1}, \dots, z_n$ je lineárně nezávislý, je to báze $W^{\perp}$. Současně $\dim W^{\perp} = n - m = \dim V - \dim W$, což dokazuje 4).

2) Rozšíříme-li ortonormální bázi $z_{m+1}, \dots, z_n$ podprostoru $W^{\perp}$ na bázi $z_1, \dots, z_n$, dostáváme podle 1), že $(W^{\perp})^{\perp} = [z_1, \dots, z_m] = W$.

3) Pro každé $x \in V$ je $x = \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j \rangle z_j + \sum_{j=m+1}^{n} \langle x, z_j \rangle z_j \in W + W^{\perp}$, takže $V = W + W^{\perp}$. Je-li $x \in W \cap W^{\perp}$, je $\langle x, x \rangle = 0$, tj. $x = 0$, což dává $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ a $V = W \oplus W^{\perp}$. $\square$

Ortogonální projekce na podprostor

Věta 55. *Nechť W je podprostor V. Potom ke každému $x \in V$ existuje* *právě jeden* *vektor $x_W \in W$ s vlastností*

$$\|x - x_W\| = \min\{\|x - y\| \,;\, y \in W\}.$$

Důkaz. Nechť $z_1, \dots, z_m$ je ortonormální báze W a $z_1, \dots, z_n$ její rozšíření na bázi V. Položme $x_W = \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j \rangle z_j \in W$, potom $x - x_W = \sum_{j=m+1}^{n} \langle x, z_j \rangle z_j \in W^{\perp}$ a pro každé $y \in W$ je $x_W - y \in W$, tedy $\langle x - x_W, x_W - y \rangle = 0$, a podle Pythagorovy věty $\|x - y\|^2 = \|x - x_W\|^2 + \|x_W - y\|^2 \geq \|x - x_W\|^2$, přičemž rovnost se nabývá právě když $\|x_W - y\| = 0$, tj. pro $y = x_W$. $\square$

Definice. Vektor x_W se nazývá ortogonální projekcí vektoru x na podprostor W.

Výpočet ortogonální projekce

Věta 56. *Nechť* $z_1, \ldots, z_m$ *je ortonormální báze podprostoru* W*. Potom pro každé* $x \in V$ *je*

$$x_W = \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j \rangle z_j.$$

(Dokázáno v důkazu věty 55.)

Poznámka. Povšimněte si pozoruhodného faktu, že při libovolné volbě ortonormální báze $z_1, \ldots, z_m$ podprostoru W dává $\sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j \rangle z_j$ vždy stejný výsledek, totiž x_W.

Věta 57. *Nechť* W *je podprostor prostoru* V*. Potom pro každé* $x \in V$ *je*

$$x = x_W + x_{W^\perp}.$$

(Plyne ihned z věty 54, tvrzení 1), a z věty 56.)

Část 4:

Lineární zobrazení

Lineární zobrazení

Definice. Nechť V, W jsou vektorové prostory nad stejným tělesem ($\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$). Zobrazení $f : V \to W$ nazýváme lineárním zobrazením jestliže

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pro každé $x, y \in V$,
2) $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ pro každé $x \in V$ a každý skalár α.

Poznámka. V 1), 2) jsou na levé straně vždy operace ve V, na pravé straně operace ve W (to je nutno rozlišovat, i když jsou značeny stejně).

Definice. Lineární zobrazení $f : V \to V$ se nazývá lineární operátor.

Poznámky

- Vlastnosti 1), 2) se dají shrnout jedinou vlastností

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$$

  pro každé $x, y \in V$ a každé skaláry α, β,
- předchozí vlastnost lze indukcí rozšířit na libovolný počet sčítanců:

$$f\Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot x_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot f(x_j),$$

- jako dříve, obvykle píšeme $f(\alpha x)$ místo $f(\alpha \cdot x)$.

Příklady

- zobrazení $f_0 : V \to W$ definované předpisem

$$f_0(x) = 0 \quad \text{pro každé } x \in V$$

  je lineární (tzv. nulové zobrazení); to znamená, že aspoň jedno lineární zobrazení V do W vždy existuje,
- zobrazení $i_V : V \to V$ definované předpisem

$$i_V(x) = x \quad \text{pro každé } x \in V$$

  je lineární operátor (tzv. identický),
- je-li W podprostor konečně generovaného prostoru V se skalární součinem, potom ortogonální projekce $x \mapsto x_W$ je lineární zobrazení V do W,
- pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je $x \mapsto Ax$ lineární zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

Základní vlastnosti lineárního zobrazení

Věta 58. *Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Potom platí:*

1) $f(0) = 0$,
2) $f(V) = \{f(x)\,;\, x \in V\}$ *je podprostor prostoru* W,
3) $\mathcal{N}(f) := \{x \in V\,;\, f(x) = 0\}$ *je podprostor prostoru* V,
4) f *je prosté právě když* $\mathcal{N}(f) = \{0\}$,
5) *je-li* $\dim V = \dim W$ *a je-li zobrazení* f *prosté, potom je to bijekce a inverzní zobrazení* $f^{-1} : W \to V$ *je opět lineární.*

Poznámka. Zde i dále, mluvíme-li o dimenzi nebo bázi, rozumíme tím, že prostor je konečně generovaný, aniž to budeme explicitně uvádět.

Lineární zobrazení je jednoznačně určeno hodnotami v bázi

Věta 59. *Nechť V, W jsou vektorové prostory a nechť $x_1, \ldots, x_n$ je báze V. Potom pro libovolné vektory $y_1, \ldots, y_n \in W$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f : V \to W$ takové, že*

$$f(x_j) = y_j \tag{53}$$

pro $j = 1, \ldots, n$.

Myšlenka důkazu. Pro každé $x \in V$, které lze jednoznačně zapsat ve tvaru $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ (str. 162), definujeme $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j$. Je-li g libovolné lineární zobrazení V do W s vlastností (53), potom pro každé $x \in V$ je $g(x) = g(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j = f(x)$, takže $g = f$ a lineární zobrazení f je podmínkou (53) určeno jednoznačně.

Souřadnicový vektor

Nechť $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V (připomeňme, že báze je systém vektorů a je to tedy uspořádaná množina). Potom, jak víme (věta 35), lze každý vektor $x \in V$ vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

Aritmetický vektor

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

nazýváme souřadnicovým vektorem vektoru x v bázi $\mathcal{B}$. Povšimněte si, že

$$[x]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n,$$

kde $n = \dim V$, a že souřadnicový vektor závisí na výběru báze.

Izomorfismus

Definice. Vzájemně jednoznačné lineární zobrazení (bijekce) prostoru V na prostor W se nazývá izomorfismem těchto prostorů. Prostory, mezi nimiž existuje izomorfismus, se nazývají izomorfní.

Poznámka. Izomorfní prostory mají „stejnou strukturu", protože jejich prvky i výsledky operací s nimi si vzájemně jednoznačně odpovídají. Izomorfní struktury se v matematice považují za „stejné" v tom smyslu, že se liší pouze podstatou svých prvků, nikoliv povahou operací s nimi (srv. str. 134). Dá se říci, že se liší jenom „pojmenováním" svých prvků.

Každý n-rozměrný prostor je izomorfní $\mathbb{R}^n$

Věta 60. *Každý n-rozměrný vektorový prostor je izomorfní prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Myšlenka důkazu. Při zvolené bázi $\mathcal{B}$ je zobrazení $x \mapsto [x]_\mathcal{B}$ hledaný izomorfismus.

Poznámka. Všechny n-rozměrné vektorové prostory mají tedy „stejnou strukturu" jako prostor $\mathbb{R}^n$. Je-li $f : V \to \mathbb{R}^n$ izomorfismus, potom z definice lineárního zobrazení plyne

$$x + y = f^{-1}(f(x) + f(y)),$$

$$\alpha \cdot x = f^{-1}(\alpha f(x)),$$

takže operace ve V jsou jednoznačně určeny operacemi v $\mathbb{R}^n$ a zobrazením f.

Věta 61. *Konečně generované prostory V, W jsou izomorfní právě když* $\dim V = \dim W$.

Matice lineárního zobrazení

Nechť $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V, $\mathcal{B}' = (y_1, \ldots, y_m)$ je báze W a nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Potom pro každé $j = 1, \ldots, n$ lze $f(x_j)$ zapsat právě jedním způsobem ve tvaru

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i.$$

Matice $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se nazývá maticí lineárního zobrazení f vzhledem k bázím $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ a značí se

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

Povšimněte si, že $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ je matice sestavená ze sloupců

$$([f(x_1)]_{\mathcal{B}'}, \ldots, [f(x_n)]_{\mathcal{B}'}),$$

které jsou souřadnicovými vektory vektorů $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ v bázi $\mathcal{B}'$ ve smyslu definice na str. 213.

Prostor lineárních zobrazení

Věta 62. *Nechť* f, g *jsou lineární zobrazení* V *do* W, α *skalár. Potom zobrazení* $f+g : V \to W$ *a* $\alpha f : V \to W$ *definovaná předpisem*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in V$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in V$$

jsou lineární zobrazení V *do* W.

Věta 63. *Množina lineárních zobrazení prostoru* V *do prostoru* W *s operacemi sečítání a násobení skalárem, definovanými v předchozí větě, tvoří vektorový prostor, který značíme* $L(V,W)$.

Poznámka. To ukazuje, že ze dvou vektorových prostorů V, W můžeme vytvořit nový vektorový prostor $L(V,W)$.

$L(V, W)$ je izomorfní $\mathbb{R}^{m \times n}$

Věta 64. *Nechť* $\dim V = n$ *a* $\dim W = m$. *Potom prostor* $L(V, W)$ *je izomorfní prostoru* $\mathbb{R}^{m \times n}$. *V důsledku toho je*

$$\dim L(V, W) = mn.$$

Myšlenka důkazu. Při zvolených bázích $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ je zobrazení $f \mapsto [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ hledaný izomorfismus.

Poznámka. Prostor $L(V, W)$ má tedy „stejnou strukturu" jako $\mathbb{R}^{m \times n}$. Z toho vyplývá důležitý fakt, že lineární zobrazení konečně generovaných prostorů lze vzájemně jednoznačně reprezentovat maticemi.

Maticová reprezentace lineárního zobrazení

Věta 65. *Nechť $\mathcal{B}$ je báze V, $\mathcal{B}'$ báze W, a nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Potom pro každé $x \in V$ platí*

$$[f(x)]_{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}},$$

kde napravo stojí maticový součin.

Poznámka. Tato věta ukazuje, že při zadaných bázích $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ lze lineární zobrazení f reprezentovat maticí $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ v tom smyslu, že pomocí ní lze ze souřadnic vektoru x vypočítat souřadnice vektoru $f(x)$ pouze použitím maticových operací. Výpočet hodnot lineárního zobrazení lze tedy “přenést” do počítání s maticemi a aritmetickými vektory.

Důkaz

Nechť $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathcal{B}' = (y_1, \ldots, y_m)$ a $A = [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Potom pro každé $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \in V$ je

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \alpha_j) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} ([f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}})_i y_i, \end{aligned}$$

z čehož plyne

$$[f(x)]_{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}}. \qquad \square$$

Skládání lineárních zobrazení

Věta 66. *Nechť $f : U \to V$, $g : V \to W$ jsou lineární zobrazení. Potom složené zobrazení $g \circ f : U \to W$ definované předpisem*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \textit{pro } x \in U$$

je rovněž lineárním zobrazením.

Složené zobrazení a maticový součin

Věta 67. *Nechť $f : U \to V$, $g : V \to W$ jsou lineární zobrazení a nechť $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ jsou báze U, V, W. Potom platí*

$$[g \circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} \cdot [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

kde napravo stojí maticový součin.

Důkaz. Pro každé $x \in U$ je podle věty 65

$$[(g \circ f)(x)]_{\mathcal{B}''} = [g \circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$$

a současně

$$[(g \circ f)(x)]_{\mathcal{B}''} = [g(f(x))]_{\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} \cdot [f(x)]_{\mathcal{B}'} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} \cdot [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}},$$

takže porovnáním dostáváme

$$[g \circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} \cdot [x]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''} \cdot [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$$

pro každé $x \in U$, z čehož plyne rovnost obou matic. $\square$

Historická poznámka

Maticový součin tedy koresponduje skládání lineárních zobrazení. Uvádí se, že zakladatel maticového počtu A. Cayley (1821-1895) byl kolem r. 1855 inspirován právě touto vlastností k definici maticového součinu.

Matice inverzního zobrazení

Věta 68. *Je-li* $f : V \to W$ *izomorfismus, potom inverzní zobrazení* $f^{-1} : W \to V$ *je rovněž izomorfismus a vzhledem k libovolným bázím* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ *prostorů* V, W *platí*

$$[f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [f]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

kde napravo stojí inverzní matice.

Důkaz. $f^{-1} \circ f = i_V$ je identické zobrazení, takže podle věty o matici složeného zobrazení je $[f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \cdot [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [f^{-1} \circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I$ a podle věty 16 je $[f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [f]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. □

Poznámka. Tímto způsobem lze v principu zavést inverzní matici A^{-1} jakožto matici inverzního zobrazení f^{-1} k zobrazení $f(x) = Ax : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve standardní bázi $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Změna souřadnic vektoru při změně báze

Věta 69. *Nechť $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ jsou báze prostoru V. Potom pro každé $x \in V$ platí*

$$[x]_{\mathcal{B}'} = [i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}}.$$

Důkaz. Podle věty 65 je $[x]_{\mathcal{B}'} = [i_V(x)]_{\mathcal{B}'} = [i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$. □

Poznámka. Tato věta uvádí, jak vypočítat souřadnice vektoru v jiné bázi. Pozor! Matice $[i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ nemusí být jednotková (to by byla při $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$). Je-li $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ a $\mathcal{B}' = (y_1, \ldots, y_n)$, potom j-tý sloupec matice $[i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ je tvořen koeficienty α_{ij} lineární kombinace

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} y_i.$$

Matice $[i_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ se nazývá maticí přechodu od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{B}'$.

Změna souřadnic (pokračování)

Vzorec z předchozí věty má jednu nevýhodu: vyžaduje totiž znalost vyjádření staré báze $\mathcal{B}$ v nové bázi $\mathcal{B}'$. Typická situace ovšem je, že máme k dispozici jen starou bázi $\mathcal{B}$ a pomocí ní vyjádříme novou bázi $\mathcal{B}'$. V tom případě můžeme použít vzorec

$$[x]_{\mathcal{B}'} = [i_V]^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$$

(věta 68). Zde je j-tý sloupec matice $[i_V]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ tvořen koeficienty β_{ij} vyjádření

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} x_i$$

(tj. nové báze ve staré bázi).

Část 5:

Matice II

Zpět k maticím

Na matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lze pohlížet

- buď jako na systém sloupcových vektorů $A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet n}$ v prostoru $\mathbb{R}^m$,
- nebo jako na systém řádkových vektorů $A_{1\bullet}, \ldots, A_{m\bullet}$ v prostoru $\mathbb{R}^n$,
- nebo jako na lineární zobrazení $f(x) = Ax : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Na tyto objekty lze tedy aplikovat pojmy z vektorových prostorů.

Fundamentální podprostory

Jak víme, pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je

$$\mathcal{R}(A) := \{Ax\,;\, x \in \mathbb{R}^n\}$$

podprostor prostoru $\mathbb{R}^m$ a

$$\mathcal{N}(A) := \{x\,;\, Ax = 0\}$$

je podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definice. $\mathcal{R}(A)$ nazýváme sloupcovým prostorem matice A, $\mathcal{N}(A)$ jejím nulovým prostorem nebo jádrem. $\mathcal{R}(A^T)$ nazýváme řádkovým prostorem matice A.

Matice jako reprezentace podprostoru

Povšimněte si, že

$$\mathcal{R}(A) = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} x_j A_{\bullet j} \,;\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \Big\} = [A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet n}],$$

je to tedy podprostor generovaný sloupci matice A. Z věty 40 víme, že každý podprostor lze psát jako lineární obal konečného počtu vektorů. Z toho plyne, že každý podprostor W prostoru $\mathbb{R}^m$ lze psát jako

$$W = \mathcal{R}(A)$$

pro jistou matici A.

Hodnost matice

Definice. Číslo

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A)$$

nazýváme hodností matice A.

Poznámka. Je to tedy maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice A. Pro $A = 0$ je $\operatorname{rank}(A) = \dim\{0\} = 0$, pro $A \neq 0$ je $\operatorname{rank}(A) \geq 1$.

Hodnostní rozklad

Věta 70. *Nechť platí*

$$A = BC,$$

kde $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$ *má lineárně nezávislé sloupce a* $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ *má lineárně nezávislé řádky. Potom:*

1) $r = \operatorname{rank}(A)$,

2) sloupce B *tvoří bázi* $\mathcal{R}(A)$,

3) řádky C *tvoří bázi* $\mathcal{R}(A^T)$.

Důkaz. Z $A = BC$ přenásobením dostáváme $AC^T = BCC^T$ a podle věty 22 $B = AC^T(CC^T)^{-1}$. To znamená, že sloupce matice B patří do $\mathcal{R}(A)$; z $A = BC$ plyne, že tyto sloupce generují $\mathcal{R}(A)$, a tedy tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$. To dokazuje 1), 2); tvrzení 3) se z nich dostane aplikací na hodnostní rozklad $A^T = C^T B^T$. □

Jak vypočítat hodnost A a bázi $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(A^T)$

Věta 23 uvádí, jak sestrojit rozklad $A = BC$ požadovaných vlastností. To znamená, že

- hodnost matice A je počet nenulových řádků jejího RREF tvaru A^R,
- sloupce $A_{\bullet k_1}, \ldots, A_{\bullet k_r}$ tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
- nenulové řádky A^R tvoří bázi $\mathcal{R}(A^T)$.

Vidíme, že všechny tyto veličiny můžeme snadno spočítat z odstupňovaného tvaru A^R matice A.

To zodpovídá otázky položené v posledním slidu části 1.

Příklad

Z hodnostního rozkladu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vidíme, že matice A má hodnost 2, její první a třetí sloupec tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$ a dva řádky matice vpravo tvoří bázi $\mathcal{R}(A^T)$.

Přenásobení regulární maticí nemění hodnost

Věta 71. *Je-li $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a jsou-li $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice, potom*

$$\operatorname{rank}(DA) = \operatorname{rank}(AF) = \operatorname{rank}(A).$$

Důkaz. Je-li $A = 0$, potom $\operatorname{rank}(DA) = \operatorname{rank}(A) = 0$. Je-li $A \neq 0$, potom A má hodnostní rozklad $A = BC$ (věta 23) a $DA = (DB)C$ je hodnostní rozklad matice DA (je-li $DBx = 0$, potom z regularity D plyne $Bx = 0$ a z lineární nezávislosti sloupců B plyne $x = 0$, takže DB má lineárně nezávislé sloupce), přičemž $DB \in \mathbb{R}^{m\times r}$, takže podle věty 70 je $\operatorname{rank}(DA) = r = \operatorname{rank}(A)$. Podobně pro $\operatorname{rank}(AF)$. $\square$

Věta o hodnosti transponované matice

Věta 72. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí*

$$\text{rank}\,(A^T) = \text{rank}\,(A).$$

Poznámka. Slovně, řádkový a sloupcový prostor matice A mají stejnou dimenzi. To není triviální fakt, protože sloupcový prostor je podprostorem $\mathbb{R}^m$ a řádkový prostor je podprostorem $\mathbb{R}^n$.

Důsledek. Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je

$$\text{rank}\,(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Důkaz

Tvrzení je zřejmé pro $A = 0$. Je-li $A \neq 0$, potom A má hodnostní rozklad $A = BC$ a tedy platí i $A^T = C^T B^T$. Z toho plyne, že každý sloupec matice A^T je lineární kombinací sloupců matice C^T, tedy $\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{R}(C^T)$ a $\operatorname{rank}(A^T) \leq \operatorname{rank}(C^T) \leq r = \operatorname{rank}(A)$. Dokázali jsme, že $\operatorname{rank}(A^T) \leq \operatorname{rank}(A)$; aplikací tohoto výsledku na matici $A := A^T$ dostáváme opačnou nerovnost, což dohromady dává $\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A)$. $\square$

Ortogonální doplněk a související vlastnosti

Pro každou matici jsou $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ podprostory, můžeme proto mluvit o jejich ortogonálním doplňku.

Věta 73. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí:*

1) $\mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^T)$,

2) $\mathcal{N}(A)^{\perp} = \mathcal{R}(A^T)$,

3) $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A^T)$,

4) $\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A)$,

5) $\dim \mathcal{N}(A) = n - \operatorname{rank}(A)$.

Důkaz

Důkaz. 1) Protože $\mathcal{R}(A) = [A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet n}]$, je $x \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ právě když $x^T A_{\bullet j} = 0$ pro $j = 1, \ldots, n$, tj. $x^T A = 0^T$, což platí právě když $A^T x = 0$, tj. $x \in \mathcal{N}(A^T)$.

2) Aplikací 1) na matici A^T dostáváme $\mathcal{R}(A^T)^{\perp} = \mathcal{N}(A)$ a tedy $\mathcal{N}(A)^{\perp} = \mathcal{R}(A^T)$.

4) Je-li $x \in \mathcal{N}(A)$, potom $Ax = 0$, takže $A^T Ax = 0$ a $x \in \mathcal{N}(A^T A)$. Naopak, je-li $x \in \mathcal{N}(A^T A)$, potom $A^T Ax = 0$, tedy $x^T A^T Ax = \|Ax\|^2 = 0$, z čehož plyne $Ax = 0$ a $x \in \mathcal{N}(A)$ (bylo už dokázáno v důkazu věty 29).

3) Podle tvrzení 2), 4) je $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{N}((A^T A)^T)^{\perp} = \mathcal{N}(A^T A)^{\perp} = \mathcal{N}(A)^{\perp} = \mathcal{R}(A^T)$.

5) Podle věty 54, 3), tvrzení 2) a věty 72 je $n = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{N}(A)^{\perp} = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A^T) = \dim \mathcal{N}(A) + \operatorname{rank}(A)$. $\square$

Jak vypočítat ortogonální projekci na podprostor

Je-li dán podprostor W, existuje podle věty 55 ke každému x právě jeden vektor $x_W \in W$ s nejmenší vzdáleností od x. Protože v $\mathbb{R}^m$ lze každý podprostor W reprezentovat jako $\mathcal{R}(A)$, jde o výpočet $x_{\mathcal{R}(A)}$.

Věta 74. *Nechť je dána matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ je*

$$x_{\mathcal{R}(A)} = AA^+x.$$

Poznámka. Už sám fakt, že projekci lze vypočítat pouhým přenásobením jistou maticí, není na první pohled zřejmý. Matici AA^+ se říká projekční matice (A^+ je Moore-Penroseova inverze).

Myšlenka důkazu. x lze psát ve tvaru $x = AA^+x + (I - AA^+)x$, kde $AA^+x \in \mathcal{R}(A)$ a $(I - AA^+)x \in \mathcal{R}(A)^\perp$: je-li totiž $y = Az \in \mathcal{R}(A)$, potom $y^T(I - AA^+)x = z^T(A^T - A^TAA^+)x = z^T(A - AA^+A)^Tx = 0$ jelikož $AA^+A = A$ (věta 24). Protože $\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$ (věta 54, 3)), je $AA^+x = x_{\mathcal{R}(A)}$ (věta 57).

Speciální případ

Věta 75. *Jsou-li sloupce matice A lineárně nezávislé, potom pro každé x je*

$$x_{\mathcal{R}(A)} = A(A^T A)^{-1} A^T x.$$

Poznámka. V učebnicích se často uvádí pouze tento jednodušší, ale méně obecný vzorec, který nevyžaduje znalost pseudoinverzní matice.

Důkaz. Výsledek plyne ihned z předchozí věty využijeme-li toho, že pro matici A s lineárně nezávislými sloupci je $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ (str. 105). $\square$

Terminologie

Definice. Matici A nazýváme horní trojúhelníkovou, jestliže $A_{ij} = 0$ jakmile $j < i$, tj. jestliže všechny prvky ležící pod hlavní diagonálou jsou nulové, a nazýváme ji dolní trojúhelníkovou, jestliže A^T je horní trojúhelníková.

Poznámka. Jsou-li $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dolní trojúhelníkové, potom L_1L_2 je dolní trojúhelníková, a je-li L_1 regulární, potom i L_1^{-1} je dolní trojúhelníková. Analogicky pro horní trojúhelníkové matice.

Pozitivně (semi)definitní matice

Definice. Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se nazývá pozitivně semidefinitní jestliže $x^T Ax \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, a pozitivně definitní, jestliže $x^T Ax > 0$ pro každé $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

Věta 76. *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je $A^T A$ pozitivně semidefinitní. Jsou-li sloupce A lineárně nezávislé, je $A^T A$ pozitivně definitní.*

Důkaz. $A^T A$ je symetrická podle věty 4. Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $x^T A^T Ax = (Ax)^T(Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$, tedy A je pozitivně semidefinitní. Jsou-li sloupce A lineárně nezávislé, potom z $x^T A^T Ax = 0$ plyne $\|Ax\|_2 = 0$ a tedy $Ax = 0$, což znamená, že $x = 0$, tj. $A^T A$ je pozitivně definitní. $\square$

Rekurentní vlastnost pozitivní definitnosti

Věta 77. *Matice*

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní právě když $\alpha > 0$ *a* $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ *je pozitivně definitní.*

Poznámka. Věta ukazuje, jak lze při vyšetřování pozitivní definitnosti snížit řád matice a tak postupovat až k $n = 1$. Důmyslným využitím této myšlenky lze však dojít k ještě efektivnější metodě (viz dále).

Důkaz

Je-li A pozitivně definitní, potom $\alpha = e_1^T A e_1 > 0$ a pro každé $0 \neq x \in \mathbb{R}^{n-1}$ platí

$$x^T(\tilde{A} - \tfrac{1}{\alpha} a a^T)x = x^T \tilde{A} x - \tfrac{1}{\alpha}(a^T x)^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} a^T x \\ x \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} a^T x \\ x \end{pmatrix} > 0,$$

takže $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ je pozitivně definitní. Naopak, je-li $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ je pozitivně definitní, potom pro každé $x \in \mathbb{R}^n$, píšeme-li ho ve tvaru $x = (\xi, x'^T)^T$, kde $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, platí

$$\begin{aligned} x^T A x &= \begin{pmatrix} \xi \\ x' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ x' \end{pmatrix} = \alpha \xi^2 + 2\xi a^T x' + x'^T \tilde{A} x' \\ &= (\sqrt{\alpha}\xi + \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} a^T x')^2 + x'^T (\tilde{A} - \tfrac{1}{\alpha} a a^T) x' \geq 0, \end{aligned}$$

takže A je pozitivně semidefinitní a $x^T A x = 0$ implikuje $x' = 0$ a $\xi = 0$, tedy A je pozitivně definitní. □

Choleského rozklad

Věta 78. *Ke každé pozitivně definitní matici A existuje právě jedna dolní trojúhelníková matice L s kladnými diagonálními prvky taková, že platí*

$$A = LL^T$$

(Choleského rozklad)[§]. Naopak, existuje-li k matici A matice L těchto vlastností, potom A je pozitivně definitní.

[§] A.-L. Cholesky (1875-1918), major francouzské armády

Důkaz

Je-li $A = LL^T$, potom pro každé x je $x^TAx = x^TLL^Tx = (L^Tx)^T(L^Tx) = \|L^Tx\|_2^2 \geq 0$, přičemž $x^TAx = 0$ implikuje $L^Tx = 0$ a tedy vzhledem ke kladnosti diagonálních koeficientů zpětnou substitucí $x = 0$, takže A je pozitivně definitní. Důkaz opačné implikace provedeme indukcí podle řádu matice n. Pro $n = 1$ je $a_{11} > 0$, takže $L = (\sqrt{a_{11}})$. Nechť tedy tvrzení platí až do řádu $n - 1 \geq 1$ a nechť

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

je pozitivně definitní. Potom podle věty 77 je $\alpha > 0$ a matice $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ je pozitivně definitní, proto podle indukčního předpokladu existuje dolní trojúhelníková matice $\tilde{L} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ s kladnými diagonálními prvky taková, že $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$. Položme nyní

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0^T \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a & \tilde{L} \end{pmatrix},$$

(Pokračování důkazu)

potom L je dolní trojúhelníková s kladnými diagonálními prvky a platí

$$LL^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0^T \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a & \tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a^T \\ 0 & \tilde{L}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} = A,$$

což je hledaný rozklad. Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že $A = L_1 L_1^T$ pro jistou dolní trojúhelníkovou matici

$$L_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0^T \\ \ell & \hat{L} \end{pmatrix}$$

s kladnými diagonálními prvky. Potom z rovnosti

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} = L_1 L_1^T = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \ell^T \\ \lambda \ell & \ell \ell^T + \hat{L}\hat{L}^T \end{pmatrix}$$

plyne $\lambda = \sqrt{\alpha}$, $\ell = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a$ a $\hat{L}\hat{L}^T = \tilde{A} - \ell\ell^T = \tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$, takže podle indukčního předpokladu je $\hat{L} = \tilde{L}$ a tedy $L_1 = L$. Tím je důkaz indukcí proveden. $\square$

Algoritmus (Choleského rozklad)

0. Dána: čtvercová matice A.
1. Polož $L := 0$ a $k := 1$.
2. Je-li $a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2 \leq 0$, ukonči: A není pozitivně definitní.
3. Jinak vypočti

$$\begin{aligned} \ell_{kk} &:= \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2} \\ \ell_{ik} &:= \frac{1}{\ell_{kk}}\Big(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij}\ell_{kj}\Big) \end{aligned}$$

   $(i = k+1, \ldots, n)$.

4. Polož $k := k+1$. Je-li $k \leq n$, jdi na krok 1. Jinak ukonči: A je pozitivně definitní a platí $A = LL^T$.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 10 & -2 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LL^T.$$

Choleského metoda pro řešení $Ax = b$ s poz. def. maticí A

0. Dána: soustava $Ax = b$ s pozitivně definitní maticí A.
1. Nalezni Choleského rozklad $A = LL^T$ předchozím algoritmem.
2. Vyřeš soustavu $Ly = b$ (s dolní trojúhelníkovou maticí L) zpětnou substitucí.
3. Vyřeš soustavu $L^T x = y$ (s horní trojúhelníkovou maticí L^T) zpětnou substitucí.
4. Ukonči: x je řešením $Ax = b$.

Poznámka. Tato metoda se používá v praktických úlohách, které vyžadují řešení většího počtu soustav $Ax = b$ se stejnou pozitivně definitní maticí A a různými pravými stranami b. Rozklad $A = LL^T$ je třeba najít pouze jednou, a každou soustavu pak vyřešíme snadno dvěma zpětnými substitucemi.

Ortogonální matice

Definice. Matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se nazývá ortogonální, jestliže

$$Q^T Q = I.$$

Poznámka. Tato jednoduchá formulace, jejíž vektorovou podstatu odkrývá následující věta, popisuje velmi důležitou třídu matic.

Ekvivalentní vyjádření

Věta 79. *Následující tvrzení pro matici $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou ekvivalentní:*

(i) Q *je ortogonální,*
(ii) Q *je regulární a* $Q^{-1} = Q^T$,
(iii) $QQ^T = I$,
(iv) Q^T *je ortogonální,*
(v) řádky Q *tvoří ortonormální bázi* $\mathbb{R}^n$,
(vi) sloupce Q *tvoří ortonormální bázi* $\mathbb{R}^n$.

Poznámka. Tvrzení (v), (vi) ukazují, že mnohem vhodnější by bylo říkat „ortonormální matice". Přidržujeme se však historicky vzniklého a běžně používaného názvu.

Poznámka. Povšimněte si odlišného číslování (malými římskými číslicemi), charakteristického pro anglicky psanou literaturu.

Důkaz

Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i), (i)⇔(vi), (iv)⇔(v).

(i)⇒(ii): Z $Q^TQ = I$ plyne $Q^{-1} = Q^T$ a tedy Q je regulární.

(ii)⇒(iii): Protože $Q^{-1} = Q^T$, je $QQ^T = QQ^{-1} = I$.

(iii)⇒(iv): Protože $(Q^T)^TQ^T = QQ^T = I$, je Q^T ortogonální.

(iv)⇒(i): Z $QQ^T = I$ plyne $Q^T = Q^{-1}$ a tedy $Q^TQ = Q^{-1}Q = I$.

(i)⇔(vi): Q je ortogonální právě když $(Q^TQ)_{ij} = (Q_{\bullet i})^TQ_{\bullet j} = I_{ij}$ pro všechna i, j, což je ekvivalentní tomu, že sloupce Q tvoří ortonormální systém; protože je jich n, tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

(iv)⇔(v) je přepisem ekvivalence (i)⇔(vi) pro matici Q^T. $\square$

Případ $n = 2$

Pro každé φ je matice

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ortogonální, protože její sloupce (resp. řádky) tvoří ortonormální systém.
Např.

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

je ortogonální matice s racionálními koeficienty.

Vlastnosti ortogonálních matic

Věta 80. *Je-li $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální, potom:*

(i) $\|Q_{i\bullet}\|_2 = \|Q_{\bullet i}\|_2 = 1$ *pro každé* i,

(ii) $|Q_{ij}| \leq 1$ *a* $|(Q^{-1})_{ij}| \leq 1$ *pro každé* i, j,

(iii) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. Z $Q^T Q = I$ plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $\|Qx\|_2^2 = x^T Q^T Q x = x^T x = \|x\|_2^2$, což dokazuje tvrzení (iii). Pro $i, j = 1, \ldots, n$ odsud plyne $|Q_{ij}| \leq \|Q_{\bullet i}\|_2 = \|Q e_i\|_2 = \|e_i\|_2 = 1$, a aplikací tohoto výsledku na $Q^T = Q^{-1}$ dostáváme zbývající dvě tvrzení. $\square$

(Pokračování)

Poznámka. Z numerického hlediska je důležitá vlastnost (ii), která zaručuje, že prvky inverzní matice nemohou během výpočtu nekontrolovatelně narůstat. To je jeden z důvodů, proč mají ortogonální matice rozsáhlé aplikace v numerické lineární algebře.

Věta 81. *Jsou-li $Q_1, \ldots, Q_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální, je i $Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_q$ ortogonální.*

Důkaz. Jsou-li Q_1, Q_2 ortogonální, potom $(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = Q_2^T Q_1^T Q_1 Q_2 = Q_2^T Q_2 = I$, takže Q_1Q_2 je ortogonální. Dále indukcí. $\square$

Poznámka. Povšimněte si analogie s větou 8 pro regulární matice.

Householderova transformace

Následující věta ukazuje, že je možno se proslavit i jednoduchou větou s jednoduchým důkazem (její význam se projevuje v jejích aplikacích):

Věta 82. (Householder 1958) *Pro každý vektor* $x \in \mathbb{R}^n$ *takový, že* $\|x\|_2 = 1$*, je matice*

$$H(x) = I - 2xx^T$$

symetrická a ortogonální.

Důkaz. $H(x)$ je symetrická protože $H(x)^T = I - 2xx^T = H(x)$. Dále je

$$H(x)^T H(x) = (I - 2xx^T)^T (I - 2xx^T) = I - 4xx^T + 4x(x^T x)x^T = I,$$

takže $H(x)$ je ortogonální. $\square$

Použití Householderovy transformace I

Věta 83. *Pro každé dva vektory* $y, z \in \mathbb{R}^n$ *takové že* $y \neq z$ *a* $\|y\|_2 = \|z\|_2$*, platí*

$$y = H\Big(\tfrac{y-z}{\|y-z\|_2}\Big)z,$$

jinými slovy každé dva různé vektory o stejné normě lze převést jeden na druhý Householderovou transformací.

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} H\Big(\tfrac{y-z}{\|y-z\|_2}\Big)z &= \Big(I - 2\tfrac{y-z}{\|y-z\|_2} \cdot \tfrac{(y-z)^T}{\|y-z\|_2}\Big)z = z - \tfrac{2(y^Tz-\|z\|_2^2)}{\|y-z\|_2^2}(y-z) \\ &= z + \tfrac{\|y\|_2^2+\|z\|_2^2-2y^Tz}{\|y-z\|_2^2}(y-z) = z + \tfrac{\|y-z\|_2^2}{\|y-z\|_2^2}(y-z) = y. \end{aligned}$$

(Dělení vektoru číslem znamená násobení převrácenou hodnotou). □

Důsledek. Jsou-li y, z dva vektory o stejné normě, potom existuje ortogonální matice Q taková, že $y = Qz$.

Použití Householderovy transformace II

Věta 84. *Jestliže matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má v prvním sloupci aspoň jeden nenulový nediagonální prvek, potom pro matici*

$$Q = H\left(\frac{A_{\bullet 1} - \|A_{\bullet 1}\|_2 e_1}{\|A_{\bullet 1} - \|A_{\bullet 1}\|_2 e_1\|_2}\right)$$

platí

$$(QA)_{\bullet 1} = \|A_{\bullet 1}\|_2 e_1,$$

tj. všechny nediagonální prvky prvního sloupce QA jsou nulové.

Důkaz. Položíme-li $y = A_{\bullet 1}$, $z = \|A_{\bullet 1}\|_2 e_1$, je $y \neq z$ a $\|y\|_2 = \|A_{\bullet 1}\|_2 = \|z\|_2$, takže podle věty 83 pro matici

$$Q = H\left(\frac{y-z}{\|y-z\|_2}\right)$$

platí $(QA)_{\bullet 1} = QA_{\bullet 1} = Qy = Q^2 z = Q^T Q z = z = \|A_{\bullet 1}\|_2 e_1$. □

Komentář

Věta 84 ukazuje možná překvapující fakt, že totiž nulování prvků pod diagonálou lze provést i jinak než Gaussovou eliminací. Navíc tato metoda je numericky stabilnější a nevyžaduje výběr pivota. Důležité je, že součin

$$QA = (I - 2xx^T)A$$

nemusíme počítat jako

$$A - 2(xx^T)A,$$

ale jako

$$A - 2xy^T$$

kde $y^T = x^T A$ a xy^T je matice $(x_i y_j)$, čímž dochází k úspoře počtu operací. Podobně postupujeme u dalších sloupců. Algoritmus zde podrobně nevypisujeme.

Použití Householderovy transf. III: redukce na Hessenbergův tvar

Definice. Říkáme, že matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je v horním Hessenbergově tvaru jestliže platí $A_{ij} = 0$ pro $j < i - 1$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

Věta 85. *Ke každé čtvercové matici A existuje ortogonální matice Q a matice H v horním Hessenbergově tvaru tak, že platí*

$$A = QHQ^T.$$

Definice. Říkáme, že matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je třídiagonální jestliže platí $A_{ij} = 0$ pro $|i - j| > 1$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

Věta 86. *Ke každé symetrické matici A existuje ortogonální matice Q a symetrická třídiagonální matice H tak, že platí*

$$A = QHQ^T.$$

Poznámka. Obě tyto věty tvoří základ nejpoužívanějšího algoritmu pro výpočet vlastních čísel (jednoho z „top 10" algoritmů 20. století).

QR rozklad

Věta 87. *Ke každé matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s lineárně nezávislými sloupci existuje matice $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s ortonormálními sloupci a horní trojúhelníková matice $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladnými diagonálními prvky tak, že platí*

$$A = QR. \tag{54}$$

Přitom matice Q i R jsou tímto rozkladem určeny jednoznačně.

Poznámka. Matice Q tedy splňuje $Q^TQ = I$, ale v obecně to není ortogonální matice, protože nemusí být čtvercová. Jednoznačnost je zaručena požadavkem kladnosti diagonálních prvků R (jinak by např. $A = (-Q)(-R)$ byl rovněž rozklad toho typu).

Myšlenka důkazu. Jde o rozpis Gram-Schmidtova procesu v maticovém tvaru. Jednoznačnost plyne buď z toho, že (54) implikuje indukcí explicitní vzorce pro sloupce matic Q a R (viz dále), nebo z toho, že $A^TA = R^TQ^TQR = R^TR$ je Choleského rozklad A^TA a v něm je $L = R^T$ jednoznačně určena; odtud pak plyne i jednoznačnost $Q = AR^{-1}$.

QR rozklad (algoritmus)

0. Dána: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s lineárně nezávislými sloupci.

1. Pro $k = 1, \ldots, n$ polož

$$
\begin{aligned}
R_{jk} &:= Q_{\bullet j}^T A_{\bullet k} \quad (j = 1, \ldots, k-1) \\
Q_{\bullet k} &:= A_{\bullet k} - \sum_{j=1}^{k-1} R_{jk} Q_{\bullet j} \\
R_{kk} &:= \|Q_{\bullet k}\|_2 \\
Q_{\bullet k} &:= \frac{1}{R_{kk}} Q_{\bullet k} \\
R_{jk} &:= 0 \quad (j = k+1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

2. Ukonči: $A = QR$, kde Q má ortonormální sloupce a R je horní trojúhelníková s kladnými diagonálními prvky.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = QR = \begin{pmatrix} 0.1690 & 0.8971 \\ 0.5071 & 0.2760 \\ 0.8452 & -0.3450 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.9161 & 7.4374 \\ 0 & 0.8281 \end{pmatrix}.$$

Použití QR rozkladu k řešení soustav lineárních rovnic

Mějme soustavu

$$Ax = b$$

se čtvercovou regulární maticí A. Je-li

$$A = QR$$

její QR rozklad, potom soustavu je možno přepsat ve tvaru

$$QRx = b$$

resp.

$$Rx = Q^T b,$$

kde R je horní trojúhelníková matice s kladnou diagonálou, a její řešení lze nalézt zpětnou substitucí. To ukazuje způsob, jak řešit soustavy rovnic bez použití Gaussovy eliminace.

Použití QR rozkladu pro metodu nejmenších čtverců

Mějme soustavu

$$Ax = b, \tag{55}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má lineárně nezávislé sloupce. Je-li

$$A = QR$$

její QR rozklad, potom soustava (55) má jediné řešení metodou nejmenších čtverců (viz str. 129)

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b = (R^T Q^T Q R)^{-1} R^T Q^T b = R^{-1} Q^T b,$$

které je tedy řešením soustavy

$$Rx = Q^T b$$

se čtvercovou horní trojúhelníkovou maticí R s kladnými diagonálními prvky a dá se z ní snadno vypočíst zpětnou substitucí. Tím se vyhneme výpočtu jak matice $A^T A$, tak i její inverze.

SVD rozklad: úvod

Dospíváme nyní k větě, která je podle mínění odborníků nejdůležitější větou numerické lineární algebry, k tzv. SVD rozkladu¶ matice. Vzhledem k jejím teoretickým i praktickým důsledkům by bylo žádoucí probírat ji co nejdříve, to však naráží na problém jejího důkazu, který je netriviální. Jeho myšlenku zde pouze naznačíme a vrátíme se k němu později.

Autorství. SVD rozklad byl objeven nezávisle na sobě několika autory, kteří podali různé formulace i důkazy: Beltrami 1873, Jordan 1874 (!), Sylvester 1889, Autonne 1915, Eckart a Young 1939. Význam SVD rozkladu pro numerickou matematiku byl rozpoznán a od 50. let široce popularizován Golubem.

¶z angl. "singular value decomposition" – rozklad na singulární čísla

SVD rozklad

Věta 88. *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *a* $q = \min\{m, n\}$. *Potom existuje matice* $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *splňující* $\sigma_{ij} = 0$ *pro* $i \neq j$ *a* $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \ldots \geq \sigma_{qq} \geq 0$ *a ortogonální matice* $X \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *takové, že platí*

$$A = X\Sigma Y^T.$$

Poznámka. Přepíšeme-li rovnost $A = X\Sigma Y^T$ ve tvaru $X^T AY = \Sigma$ (neboť $X^{-1} = X^T$, $Y^{-1} = Y^T$), vidíme, že věta říká, že *každou matici lze vynásobením zleva a zprava vhodnými ortogonálními maticemi převést na diagonální matici stejného typu, na jejíž diagonále stojí sestupně seřazená nezáporná čísla*.

Poznámka. Kdybychom položili $Y := Y^T$, mohli bychom psát $A = X\Sigma Y$, kde Y je opět ortogonální. Tradičně se však dává přednost uvedenému tvaru kvůli jednodušší formulaci důsledků.

Příklad

Platí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = X\Sigma Y^T,$$

kde

$$X = \begin{pmatrix} -0.1409 & 0.8247 & 0.5456 & -0.0478 \\ -0.3439 & 0.4263 & -0.6919 & 0.4704 \\ -0.5470 & 0.0278 & -0.2531 & -0.7975 \\ -0.7501 & -0.3706 & 0.3994 & 0.3748 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 25.4624 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2907 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -0.5045 & -0.7608 & -0.4082 \\ -0.5745 & -0.0571 & 0.8165 \\ -0.6445 & 0.6465 & -0.4082 \end{pmatrix}.$$

Myšlenka důkazu SVD rozkladu (podle Jordana)

Číslo

$$\sigma = \sup\{\|Ay\|_2\,;\ \|y\|_2 = 1,\ y \in \mathbb{R}^n\}$$

se podle Weierstrassovy věty (o nabývání suprema funkce spojité na kompaktní množině) nabývá pro jisté $\tilde{y}$, tj. $\sigma = \|A\tilde{y}\|_2$, $\|\tilde{y}\|_2 = 1$. Položme $\tilde{x} = \frac{1}{\sigma}A\tilde{y}$, potom $\|\tilde{x}\|_2 = 1$, takže $\tilde{x}$ lze rozšířit na ortogonální matici $X_1 = (\tilde{x}\ \tilde{X})$ a podobně $\tilde{y}$ lze rozšířit na ortogonální matici $Y_1 = (\tilde{y}\ \tilde{Y})$. Potom platí

$$X_1^T A Y_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0^T \\ 0 & \tilde{X}^T A \tilde{Y} \end{pmatrix}.$$

Tím jsme provedli první krok diagonalizace. Dále pokračujeme stejným způsobem s maticí $\tilde{X}^T A \tilde{Y}$ (jde tedy vlastně o důkaz indukcí). Jednotlivé kroky je nutno detailně zdůvodnit.

(Ne)jednoznačnost SVD rozkladu

Ukazuje se (na tomto místě to však ještě nemůžeme dokázat), že diagonální čísla σ_{ii} matice Σ jsou určena jednoznačně maticí A, takže matice Σ je stejná ve všech SVD rozkladech matice A.

Naproti tomu matice X, Y nikdy jednoznačně určeny nejsou: je-li

$$A = X\Sigma Y^T$$

SVD rozklad matice A, potom pro ortogonální matice $X_0 = -X$, $Y_0 = -Y$ platí opět

$$A = X_0 \Sigma Y_0^T,$$

přičemž $X_0 \neq X$, $Y_0 \neq Y$.

Singulární čísla

Definice. Čísla σ_{ii}, $i = 1, \ldots, q$, nazýváme singulárními čísly matice A a značíme je obvykle $\sigma_i(A)$ resp. σ_i, $i = 1, \ldots, q$.

Poznámka. Důležité je, že jsou číslována podle velikosti v sestupném pořadí, tj.

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \ldots \geq \sigma_q(A) \geq 0.$$

SVD rozklad: pro a proti, neboli dvoukolejnost lineární algebry

Máme-li k dispozici libovolný SVD rozklad matice A, potom, jak ukážeme na dalších stránkách, lze pomocí něho snadno vyřešit všechny základní problémy, které jsme dosud řešili přímo či zprostředkovaně pomocí Gaussovy eliminace, a navíc i některé jiné, o kterých jsme se zde nezmínili. Vzhledem k použití ortogonálních matic je navíc numericky mnohem stabilnější (tj. odolnější vůči vlivu zaokrouhlovacích chyb) než Gaussova eliminace.

Na druhé straně algoritmy pro výpočet SVD nejsou obecně konečné, nýbrž iterační (konstruují posloupnosti konvergující k výsledným X, Σ, Y) a nejsou proto vhodné pro ruční počítání.

Při počítání na cvičeních používáme proto algoritmy založené na Gaussově eliminaci, kdežto na počítači dáváme přednost algoritmům využívajícím SVD rozkladu, které jsou v dnešní době neobyčejně detailně rozpracované a zaručují vysokou přesnost výsledku.

Odvozené veličiny

Je-li $A = X\Sigma Y^T$, označme

- r počet kladných prvků na diagonále Σ,
- $\hat{X}$ matici sestávající z prvních r sloupců matice X,
- $\hat{Y}$ matici sestávající z posledních $n-r$ sloupců matice Y (nikoliv Y^T !),
- $\Sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, kde S je diagonální matice $r \times r$ s kladnými diagonálními prvky.

Použití SVD I: hodnost a ortonormální báze

Věta 89. *Je-li*

$$A = X\Sigma Y^T$$

libovolný SVD rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$*, potom:*

1) $r = \text{rank}(A)$,

2) sloupce matice $\hat{X}$ *tvoří ortonormální bázi sloupcového prostoru* $\mathcal{R}(A)$,

3) sloupce matice $\hat{Y}$ *tvoří ortonormální bázi prostoru* $\mathcal{N}(A)$.

Poznámka ad 1): jinými slovy, hodnost matice je rovna počtu jejích kladných singulárních čísel.

Použití SVD II: (pseudo)inverze a ortogonální projekce

Věta 90. *Je-li*

$$A = X \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T$$

libovolný SVD rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, potom:

1) $A^+ = Y \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^T$,

2) je-li A čtvercová regulární, potom $A^{-1} = Y S^{-1} X^T$,

3) $AA^+ = \hat{X}\hat{X}^T$ (projekční matice, viz str. 240).

Poznámka ad 1): tento vzorec je obzvlášť vhodný pro důkazy vlastností pseudoinverzní matice, jako $(A^+)^+ = A$, $(A^T)^+ = (A^+)^T$, $\operatorname{rank}(A^+) = \operatorname{rank}(A)$, $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^T)$ apod., které se nesnadno dokazují z definice.

Použití SVD III: řešení obecných soustav lineárních rovnic

Věta 91. *Nechť* $A = X\Sigma Y^T$ *je libovolný SVD rozklad matice* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *a nechť* $b \in \mathbb{R}^m$. *Potom soustava*

$$Ax = b \tag{56}$$

má řešení právě když platí

$$\hat{X}\hat{X}^T b = b$$

a je-li tato podmínka splněna, má množina řešení soustavy (56) popis

$$\left\{ \sum_{j=1}^{r} \frac{(b^T \hat{X})_j}{\sigma_j} Y_{\bullet j} + \hat{Y} y \,;\, y \in \mathbb{R}^{n-r} \right\}.$$

Myšlenka důkazu. Vyjádříme A^+b a $I - A^+A$ pomocí věty 90 a dosadíme do příslušných vzorců vět 26 a 27.

Použití SVD IV: polární rozklad

Věta 92. (Autonne 1902) *Ke každé matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje pozitivně semidefinitní matice P a ortogonální matice Q tak, že platí*

$$A = PQ.$$

Přitom matice P je určena jednoznačně a je-li A regulární, potom P je pozitivně definitní a i Q je určena jednoznačně.

Důkaz. Nechť $A = X\Sigma Y^T$ je SVD rozklad matice A. Položme $P = X\Sigma X^T$, $Q = XY^T$. Potom vzhledem k ortogonalitě X, Y je

$$PQ = X\Sigma X^T XY^T = X\Sigma Y^T = A.$$

Dále $Q = XY^T$ je ortogonální a pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $x^T P x = \sum_{i=1}^n \Sigma_{ii}(X^T x)_i^2 \geq 0$, takže P je pozitivně semidefinitní. Jednoznačnost P nelze dokázat jednoduchými prostředky. Je-li A regulární, potom i P je regulární, tedy pozitivně definitní, a v tom případě je i $Q = P^{-1}A$ určena jednoznačně. □

Spektrální norma

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ položme

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

Potom platí

1) $\|A\|_2 \geq 0$ a $\|A\|_2 = 0$ právě když $A = 0$,
2) $\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$,
3) $\|\alpha A\|_2 = |\alpha| \cdot \|A\|_2$,
4) $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$,

Je to tzv. maticová norma, kterou nazýváme spektrální normou, a je analogií vektorové normy $\|x\|_2$ pro matice s tím, že má navíc vlastnost 4).

Použití SVD V: význam singulárních čísel

Věta 93. *Pro matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti r platí*

$$\sigma_i(A) = \min\{\|A - B\|_2\,;\ \mathrm{rank}\,(B) < i\}$$

$(i = 1, \ldots, r)$. *Speciálně,*

$$\sigma_1(A) = \|A\|_2$$

a pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je

$$\sigma_n(A) = \min\{\|A - B\|_2\,;\ B \text{ singulární}\}.$$

Poznámka. Pro čtvercovou A tedy $\sigma_n(A)$ udává vzdálenost matice A od nejbližší singulární matice.

Číslo podmíněnosti

Číslo

$$\kappa(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$$

nazýváme číslem podmíněnosti (condition number) matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Obecně lze říci, že čím vyšší je číslo podmíněnosti, tím hůře se matice chová z numerického hlediska. Hilbertovy matice (str. 77) mají vysoká čísla podmíněnosti; např. $\kappa(H_{14}) = 4.0746 \cdot 10^{17}$. To vysvětluje neuspokojivé výsledky, dosažené při řešení soustav s Hilbertovými maticemi (str. 79-80).

Z SVD rozkladu plyne, že $\kappa(A^T A) = \kappa^2(A)$. To znamená, že při přechodu od A k $A^T A$ se numerické vlastnosti matice mohou silně zhoršit.

SVD faktorizace

Je-li

$$A = X\Sigma Y^T = X \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T$$

SVD rozklad matice A, kde $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$ je diagonální matice s kladnou diagonálou, potom posledních $m-r$ řádků matice ΣY^T je nulových, takže posledních $m-r$ sloupců matice X nemá vliv na výsledek součinu. Můžeme proto psát

$$A = X_r S Y_r^T, \tag{57}$$

kde X_r, Y_r sestávají z prvních r sloupců matic X, Y (a nejsou to už obecně ortogonální matice, protože nejsou čtvercové). Rozklad (57) se nazývá SVD faktorizace, někdy i „tenký SVD rozklad" (angl. „thin SVD").

Použití SVD VI: komprese digitálního obrazu

Digitální obraz (pro zjednodušení černobílý) můžeme reprezentovat maticí $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, jejíž ij-tý koeficient označuje stupeň šedi ij-tého pixelu. Nechť

$$A = X_r S Y_r^T \tag{58}$$

je její SVD faktorizace. Začneme-li ubírat singulární čísla počínaje nejmenším tak, že budeme konstruovat matice

$$A_k = X_k S_k Y_k^T \qquad (k = r-1, \dots, 1), \tag{59}$$

kde X_k, Y_k sestávají z prvních k sloupců X_r, Y_r a S_k z prvních k řádků i sloupců S, dostáváme postupně se zhoršující aproximace matice A, které však „zachovávají její strukturu". Přitom pravá strana (58) obsahuje $(m+n+1)r$ koeficientů, kdežto pravá strana (59) $(m+n+1)k$ koeficientů, takže dochází ke kompresi dat v poměru $\frac{k}{r}$. V praxi často i pro velmi malá k (např. $r = 200$, $k = 20$, tj. redukce dat na 10%) aproximuje obraz, vytvářený maticí A_k, pozoruhodně věrně jeho originál daný maticí A.

Část 6:

Determinanty

Úvod

V této části ukážeme, že každé čtvercové matici A je možno přiřadit číslo $\det(A)$ s jistými specifickými vlastnostmi. Pokud nebude řečeno jinak, uvažujeme pouze čtvercové matice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definici determinantu předcházejí některá fakta o permutacích.

Permutace a její znaménko

Permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nazýváme libovolnou uspořádanou n-tici jejích prvků $(p_1, \ldots, p_n)$ (bez opakování). Množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ značíme P_n. Jak známo, P_n má $n!$ prvků.

Definice. Znaménkem permutace $p = (p_1, \ldots, p_n)$ nazýváme číslo

$$\sigma(p) = (-1)^s,$$

kde s je počet prvků množiny

$$\{(i, j)\,;\, i < j,\ p_i > p_j\}$$

(tzv. inverzí).

Příklad. $\sigma(4, 1, 3, 2) = (-1)^4 = 1$, $\sigma(4, 3, 1, 2) = (-1)^5 = -1$.

Vliv transpozice na znaménko

Věta 94. *Pro permutace*

$$p = (p_1, \dots, p_k, \dots, p_\ell, \dots, p_n),$$

$$p' = (p_1, \dots, p_\ell, \dots, p_k, \dots, p_n)$$

(z nichž jedna vznikne z druhé přehozením dvou prvků, tzv. transpozicí) platí

$$\sigma(p') = -\sigma(p).$$

Myšlenka důkazu. Dokážeme nejprve platnost pro případ $\ell = k + 1$ (tzv. elementární transpozice). Transpozici prvků p_k a p_ℓ lze složit z $2(\ell - k) - 1$, tj. lichého počtu, elementárních transpozic.

Definice determinantu

Definice. Determinant čtvercové matice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme předpisem

$$\det(A) = \sum_{p\in P_n} \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

Poznámka. Součet se provádí přes všechny permutace n-prvkové množiny a sestává tedy z $n!$ sčítanců. Je zřejmé. že ačkoliv číslo det(A) je dobře definováno, nelze ho pro vyšší řády tímto způsobem počítat; později uvedeme efektivní způsob jeho výpočtu založený na Gaussově eliminaci. Místo det(A) píšeme rovněž $|A|$, zvláště vypisujeme-li celou matici.

Příklady

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sigma(1,2)a_{11}a_{22} + \sigma(2,1)a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(součin prvků na hlavní diagonále minus součin prvků na vedlejší diagonále),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sigma(1,2,3)a_{11}a_{22}a_{33} + \sigma(1,3,2)a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$+\sigma(2,1,3)a_{12}a_{21}a_{33} + \sigma(2,3,1)a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+\sigma(3,1,2)a_{13}a_{21}a_{32} + \sigma(3,2,1)a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

atd.

Determinant transponované matice

Věta 95. *Pro každou čtvercovou matici A platí*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Důkaz. Podle definice je

$$\det(A^T) = \sum_{p \in P_n} \sigma(p)(A^T)_{1p_1} \cdots (A^T)_{np_n} = \sum_{p \in P_n} \sigma(p) a_{p_1 1} \cdots a_{p_n n}.$$

Provedením q vhodných transpozic dostáváme

$$a_{p_1 1} \cdots a_{p_n n} = a_{1 r_1} \cdots a_{n r_n}.$$

Přitom permutace $p = (p_1, \ldots, p_n)$ přešla na permutaci $(1, \ldots, n)$ a naopak ta přešla na permutaci $r = (r_1, \ldots, r_n)$, takže $\sigma(p) = (-1)^q = \sigma(r)$ a tedy

$$\det(A^T) = \sum_{p \in P_n} \sigma(p) a_{p_1 1} \cdots a_{p_n n} = \sum_{r \in P_n} \sigma(r) a_{1 r_1} \cdots a_{n r_n} = \det(A). \qquad \square$$

Význam věty o determinantu transponované matice

Hlavní smysl této věty spočívá v tom, že tvrzení o determinantech dokázaná pro řádky platí analogicky i pro sloupce (aplikujeme-li je na transponovanou matici).

Řádková linearita determinantu

Věta 96. *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *a* $b, c \in \mathbb{R}^{1\times n}$. *Potom platí*

$$\det\begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i-1,\bullet} \\ b+c \\ A_{i+1,\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i-1,\bullet} \\ b \\ A_{i+1,\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{i-1,\bullet} \\ c \\ A_{i+1,\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}.$$

Myšlenka důkazu. Přímo z definice, protože pro každý člen definičního součtu je

$$a_{1p_1}\cdots(b_{p_i}+c_{p_i})\cdots a_{np_n} = a_{1p_1}\cdots b_{p_i}\cdots a_{np_n} + a_{1p_1}\cdots c_{p_i}\cdots a_{np_n}.$$

Determinant matice se dvěma stejnými řádky

Věta 97. *Má-li matice dva stejné řádky, potom její determinant je roven nule.*

Důkaz. Vyměníme-li v matici A dva její stejné řádky, potom determinant se nezmění, ale všechny součiny v definičním součtu změní znamení a dostáváme tak $\det(A) = -\det(A)$, tj. $\det(A) = 0$. $\square$

Elementární operace a determinant

Věta 98. *Pro matici $\widetilde{A}$ vzniklou z matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ provedením*

1) *elementární operace $A_{i\bullet} := \alpha A_{i\bullet}$ platí* $\det(\widetilde{A}) = \alpha \det(A)$,
2) *elementární operace $A_{j\bullet} := A_{j\bullet} + \alpha A_{i\bullet}$ platí* $\det(\widetilde{A}) = \det(A)$,
3) *elementární operace $A_{i\bullet} \leftrightarrow A_{j\bullet}$ platí* $\det(\widetilde{A}) = -\det(A)$.

Důsledek. Pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Důsledek. Obsahuje-li matice nulový řádek (sloupec), je její determinant roven nule.

Výpočet determinantu

Věta 99. *Determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice je roven součinu jejích diagonálních prvků.*

Důkaz. Je-li A horní trojúhelníková, potom $a_{np_n} = 0$ pro $p_n < n$. V definičním součtu stačí tedy uvažovat jen permutace s $p_n = n$. Prvek a_{nn} lze ze všech členů vytknout a zbývá determinat horní trojúhelníkové matice řádu $n-1$. Dále indukcí. Pro dolní trojúhelníkovou matici aplikací na transpozici. □

Důsledek. $\det(I) = 1$.

Poznámka. Odsud vyplývá metoda pro výpočet determinantu: Gaussovou eliminací (s přihlédnutím k tomu, že elementární operace 1), 3) mění hodnotu determinantu) upravíme matici na horní trojúhelníkový tvar a determinant výsledné matice vypočteme podle této věty.

Příklad

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 4 & 8 & 10 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & 10 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 22 \\ 0 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 22 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot 66 = -198$$

(povšimněte si použití všech tří elementárních operací).

Determinant blokově trojúhelníkové matice

Věta 100. *Jsou-li A, B čtvercové matice (ne nutně stejného řádu), potom*

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B).$$

Myšlenka důkazu. Upravíme-li každou z matic A, B v matici $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ elementárními operacemi na horní trojúhelníkový tvar, dostáváme

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = (\alpha_1 \cdots \alpha_p)(\beta_1 \cdots \beta_q)\det\begin{pmatrix} T^1 & F \\ 0 & T^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha_1 \cdots \alpha_p)(\beta_1 \cdots \beta_q)(T^1_{11} \cdots T^1_{nn})(T^2_{11} \cdots T^2_{mm}) = \det(A)\det(B)$$

(kde α_i, β_j jsou koeficienty vytknuté před determinant při použití elementárních operací 1) a 3)). Dále

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A^T & D^T \\ 0 & B^T \end{pmatrix} = \det(A^T)\det(B^T) = \det(A)\det(B).$$

Multiplikativnost: nejdůležitější vlastnost determinantu

Věta 101. *Pro každé matice* $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *platí*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Poznámka. Někdy se této větě říká „věta o násobení determinantů”.

Myšlenka důkazu věty o násobení determinantů

Upravíme-li matici

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix}$$

vícenásobnou aplikací elementární operace 2) (která nemění determinant) tak, aby levý horní blok se stal 0, dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ I & B \end{pmatrix}.$$

Vyměníme-li v této matici sloupce 1 a $n+1$, 2 a $n+2$, …, n a $2n$, vznikne matice $\begin{pmatrix} -AB & 0 \\ B & I \end{pmatrix}$. Přitom

$$\det(A)\det(B) = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ I & B \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} -AB & 0 \\ B & I \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n \det(-AB) = (-1)^n(-1)^n \det(AB) = \det(AB).$$

Důsledky

Věta 102. *Pro každou regulární matici A platí*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Důkaz. $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1.$ □

Věta 103. *Pro každou ortogonální matici Q platí*

$$|\det(Q)| = 1.$$

Důkaz. $(\det(Q))^2 = \det(Q^T)\det(Q) = \det(Q^TQ) = \det(I) = 1.$ □

Kritérium regularity

Věta 104. *Čtvercová matice A je regulární právě když* $\det(A) \neq 0$.

Důkaz. Je-li A regulární, potom má inverzní matici a z věty 102 plyne $\det(A) \neq 0$. Je-li A singulární, potom některý její řádek je lineární kombinací ostatních a matici lze vícenásobnou aplikací 2. elementární operace, která nemění determinant, převést na matici s nulovým řádkem, jejíž determinant je roven nule (str. 295). Tedy pro A singulární je $\det(A) = 0$. □

Poznámka. To je nejznámější kritérium regularity. Negací obou stran dostáváme, že A je singulární právě když $\det(A) = 0$. Toto tvrzení je hlavním spojovacím článkem ke kapitole 7 o vlastních číslech.

Subdeterminant a algebraický doplněk

Definice. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a nechť $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Matici vzniklou vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce z matice A značíme A^{ij}, její determinant

$$\det(A^{ij})$$

nazýváme subdeterminantem ij-tého prvku a číslo

$$(-1)^{i+j}\det(A^{ij})$$

nazýváme algebraickým doplňkem ij-tého prvku v matici A.

Příklad. Pro $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 4 & 8 & 10 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ je $A^{21} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $(-1)^{2+1}\det(A^{21}) = -93$.

Laplaceův rozvoj

Věta 105. *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *a* $i \in \{1,\ldots,n\}$*. Potom platí*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

(Laplaceův‖ *rozvoj determinantu podle* i*-tého řádku).*

Poznámka. Analogicky při daném j dostáváme podle věty o determinantu transponované matice

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

(Laplaceův rozvoj determinantu podle j-tého sloupce).

‖P.-S. Laplace, 1749–1827

Myšlenka důkazu

Je-li $A_{n\bullet} = e_n^T$, potom stejnou úvahou jako v důkazu věty 99 dostáváme $\det(A) = \det(A^{nn})$.

Je-li $A_{i\bullet} = e_j^T$ pro jistá i, j, potom převedeme-li prvek na pozici (i, j) s použitím $(n-i)+(n-j) = 2n-(i+j)$ elementárních transpozic sloupců a řádků na pozici (n, n), je podle předchozího $\det(A) = (-1)^{2n-(i+j)} \det(A^{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$.

Nakonec pro obecnou matici, píšeme-li i-tý řádek ve tvaru $A_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^T$, dostáváme s požitím věty 96, že $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$.

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4)\cdot(-6) + 5\cdot(-12) - 6\cdot(-6) = 0$$

(Laplaceův rozvoj podle 2. řádku).

Důsledek: jiná definice determinantu

Laplaceův rozvoj ukazuje možnost i jiné, rekurentní definice determinantu matice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

1) je-li $n = 1$, je $\det(A) = a_{11}$,

2) je-li $n \geq 2$, je $\det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A^{1j})$

(na pravé straně ve 2) jsou vesměs determinanty matic řádu $n-1$, které už jsou rekurentně definovány). Tento přístup obchází nutnost použití permutací a je snad názornější, ale nevede ke zjednodušení důkazů.

Cramerovo pravidlo

Věta 106. *Je-li A regulární, potom pro řešení x soustavy $Ax = b$ platí*

$$x_j = \frac{\det(A + (b - A_{\bullet j})e_j^T)}{\det(A)} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Poznámka. $A + (b - A_{\bullet j})e_j^T$ je jednoduše *matice vzniklá nahrazením j-tého sloupce matice A sloupcem pravých stran b*. Toto „pravidlo" má dnes už jen teoretický význam, v době svého vzniku v 18. století se však stalo rázem populární a rozšířilo se ještě za autorova života** do škol po celé Evropě (Gaussova eliminace byla objevena až o více než půl století později).

**G. Cramer, 1704–1752

Důkaz Cramerova pravidla

Důkaz. Nechť x je řešením $Ax = b$. Označme X matici vzniklou z jednotkové matice I nahrazením jejího j-tého sloupce vektorem x. Potom porovnáním sloupců snadno ověříme, že platí

$$A + (b - A_{\bullet j})e_j^T = AX$$

a podle věty o násobení determinantů

$$\det(A + (b - A_{\bullet j})e_j^T) = \det(A)\det(X) = \det(A)x_j,$$

(neboť $\det(X) = x_j$ Laplaceovým rozvojem podle j-tého řádku), což dává hledaný vzorec pro x_j. $\square$

Adjungovaná matice

Definice. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme adjungovanou matici adj$\,(A)$ předpisem

$$(\mathrm{adj}\,(A))_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$$

$(i, j = 1, \ldots, n)$.

Poznámka. Je to tedy matice sestavená z algebraických doplňků. Povšimněte si přehozených indexů v definici, což vede k častým chybám při výpočtu. Je proto lepší počítat podle vzorce

$$((\mathrm{adj}\,(A))^T)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij}),$$

ve kterém jdou indexy ve stejném pořadí, a teprve na konec přejít transpozicí od $(\mathrm{adj}\,(A))^T$ k adj$\,(A)$.

Vzorec pro inverzní matici

Věta 107. *Pro každou regulární matici A platí*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Poznámka. Jinými slovy, pro každé j, i je

$$(A^{-1})_{ji} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A^{ij})}{\det(A)}.$$

To dává explicitní vzorec pro prvky inverzní matice. Podobně jako Cramerovo pravidlo má dnes tento vzorec už jen teoretický význam, pro praktický výpočet je vhodnější metoda založená na Gauss-Jordanově eliminaci popsaná v části 1 (str. 70).

Důkaz

Důkaz. Pro každé j, i je $(A^{-1})_{ji} = x_j$, kde x je řešením $Ax = e_i$. Podle Cramerova pravidla a Laplaceova rozvoje podle i-tého řádku je potom

$$(A^{-1})_{ji} = \frac{\det(A + (e_i - A_{\bullet j})e_j^T)}{\det(A)} = \frac{(-1)^{i+j}\det(A^{ij})}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{adj}(A))_{ji},$$

což dává

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A).$$

$\square$

Část 7:

Vlastní čísla

Definice vlastních čísel

Definice. Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Jestliže platí

$$Ax = \lambda x$$

pro jisté $\lambda \in \mathbb{C}$ a jistý vektor $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, potom číslo λ nazýváme vlastním číslem matice A a vektor x vlastním vektorem příslušným k tomuto vlastnímu číslu.

Poznámka. Podmínka „$x \neq 0$" v definici je nezbytná: kdybychom připustili i $x = 0$, potom by každé $\lambda \in \mathbb{C}$ bylo vlastním číslem matice A a definice by ztratila smysl.

Poznámka. Vlastní vektory nejsou určeny jednoznačně: je-li x vlastním vektorem, potom pro každé $\alpha \neq 0$ je i αx vlastním vektorem.

Charakterizace vlastních čísel

Věta 108. *Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice A právě když platí*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Důkaz. $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice A právě když $(A - \lambda I)x = 0$ pro jisté $x \neq 0$, tj. právě když $A - \lambda I$ je singulární, což je podle poznámky na str. 302 ekvivalentní tomu, že $\det(A - \lambda I) = 0$. $\square$

Konečný počet vlastních čísel

Z definice determinantu plyne, že

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0,$$

je to tedy polynom n-tého stupně v λ, kterému se říká charakteristický polynom matice A, a vlastní čísla jsou podle předchozí věty jeho kořeny. Podle základní věty algebry má tento polynom právě n (obecně komplexních) kořenů, počítáme-li každý kořen v jeho násobnosti. Dostáváme tak tento výsledek:

Věta 109. *Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ má právě n vlastních čísel, počítáme-li každé v jeho násobnosti (jakožto kořenu charakteristického polynomu).*

Poznámka. Základní věta algebry se dokazuje v přednášce z analýzy ve 3. semestru. Množina všech vlastních čísel A se nazývá spektrum matice A.

Příklad

Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

je

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

a charakteristický polynom má kořeny $\pm i$. Vidíme tedy, že reálná matice nemusí mít reálná vlastní čísla.

Souvislost determinantu s vlastními čísly

Věta 110. *Determinant čtvercové matice je roven součinu jejích vlastních čísel.*

Důkaz. Pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ platí

$\det(A-\lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = (-1)^n (\lambda-\lambda_1)\cdot \ldots \cdot(\lambda-\lambda_n)$,

kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A. Dosazením $\lambda = 0$ dostáváme

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n. \qquad \square$$

Vlastní čísla trojúhelníkové matice

Věta 111. *Vlastními čísly horní (dolní) trojúhelníkové matice jsou právě všechny její diagonální prvky.*

Důkaz. Protože $A - \lambda I$ je opět horní (dolní) trojúhelníková, platí podle věty 99

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda),$$

takže kořeny charakteristického polynomu jsou právě čísla $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. $\square$

Podobné matice mají stejná vlastní čísla

Definice. Matice A, B se nazývají podobné, jestliže platí $A = SBS^{-1}$ pro jistou regulární matici S.

Věta 112. *Podobné matice mají stejná vlastní čísla.*

Důkaz. Je-li $A = SBS^{-1}$, potom

$$A - \lambda I = SBS^{-1} - \lambda I = S(B - \lambda I)S^{-1}$$

a tedy

$$\det(A - \lambda I) = \det(S) \cdot \det(B - \lambda I) \cdot \det(S^{-1}) = \det(B - \lambda I)$$

(viz větu 102), takže matice A, B mají stejný charakteristický polynom a proto i stejná vlastní čísla. $\square$

AB a BA mají stejná vlastní čísla

Věta 113. *Jsou-li A, B čtvercové matice stejného typu, potom AB a BA mají stejná vlastní čísla.*

Poznámka. To je velmi netriviální tvrzení protože, jak víme, obecně je $AB \neq BA$.

Důkaz

Platí

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix},$$

kde všechny matice jsou z $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$. Protože matice

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

je regulární (její determinant je podle věty 100 roven 1), dostáváme

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix},$$

(Pokračování důkazu)

takže matice

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

jsou podobné a proto mají stejná vlastní čísla. Vlastní čísla první z nich jsou vlastní čísla AB plus n nul, vlastní čísla druhé z nich jsou vlastní čísla BA plus n nul. Z toho plyne tvrzení věty. □

Vlastní čísla symetrických matic

Obecná teorie vlastních čísel je poměrně obtížná. My se v dalším omezíme na speciální, ale důležitý případ symetrických reálných matic. Důležitost této třídy matic vysvítá z následující věty:

Věta 114. *Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má všechna vlastní čísla reálná.*

Poznámka. Vlastní čísla symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ značíme $\lambda_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$, a číslujeme je tak, aby platilo

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A)$$

(tj. ve stejném pořadí jako singulární čísla).

Důkaz

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ je libovolné vlastní číslo A a $x \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor, takže platí $Ax = \lambda x$. Označme $x^* = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$, tedy řádkový vektor sestavený z komplexně sdružených složek vektoru x. Potom platí $x^* A x = \lambda x^* x$. Přitom $x^* x = \sum_i \overline{x_i} x_i = \sum_i |x_i|^2 > 0$ (neboť $x \neq 0$) a

$$\overline{x^* A x} = \overline{\sum_i \sum_j \overline{x_i} a_{ij} x_j} = \sum_i \sum_j x_i a_{ij} \overline{x_j} = \sum_j \sum_i \overline{x_j} {\color{red} a_{ji}} x_i = x^* A x,$$

takže číslo $x^* A x$ je reálné a tedy i

$$\lambda = \frac{x^* A x}{x^* x}$$

je reálné. $\square$

Poznámka. Povšimněte si, že symetrii matice A jsme využili jen na červeně vyznačeném místě.

Spektrální věta pro symetrické matice

Nejdůležitější výsledek týkající se symetrických matic je obsažen v této větě:

Věta 115. *Ke každé symetrické matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje ortogonální matice X taková, že platí*

$$A = X\Lambda X^T,$$

kde Λ je diagonální matice s diagonálními prvky $\Lambda_{ii} = \lambda_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$ a pro každé i je $X_{\bullet i}$ vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_i(A)$.

Poznámka. Pro diagonální prvky tedy platí $\Lambda_{11} \geq \Lambda_{22} \geq \ldots \geq \Lambda_{nn}$ (viz str. 324).

Důkaz

Indukcí. Pro $n = 1$ stačí položit $X = (1)$, $\Lambda = (a_{11})$ (matice 1×1). Nechť tvrzení platí pro $n - 1 \geq 1$. Zvolme vlastní vektor x příslušný k $\lambda_1(A)$ a položme $x := \frac{1}{\|x\|_2} x$, takže $\|x\|_2 = 1$. Potom x tvoří ortonormální systém (o 1 prvku), který lze rozšířit na ortogonální matici $X_1 = (x\ \tilde{X})$. Potom platí

$$X_1^T A X_1 = \begin{pmatrix} x^T \\ \tilde{X}^T \end{pmatrix} (Ax\ A\tilde{X}) = \begin{pmatrix} x^T A x & x^T A \tilde{X} \\ \tilde{X}^T A x & \tilde{X}^T A \tilde{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0^T \\ 0 & \tilde{X}^T A \tilde{X} \end{pmatrix}$$

(neboť $\tilde{X}^T A x = \lambda_1(A) \tilde{X}^T x = 0$). Matice $X_1^T A X_1$ je podobná matici A, takže má stejná vlastní čísla, z čehož plyne, že matice $\tilde{X}^T A \tilde{X} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ má vlastní čísla $\lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)$. Podle indukčního předpokladu existuje tedy ortogonální matice $\hat{X} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ taková, že $\hat{X}^T (\tilde{X}^T A \tilde{X}) \hat{X} = \Lambda'$, kde Λ' je diagonální matice s diagonálními prvky $\lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)$.

(Pokračování důkazu)

Nyní platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \hat{X} \end{pmatrix}^T X_1^T A X_1 \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \hat{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \hat{X} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0^T \\ 0 & \tilde{X}^T A \tilde{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \hat{X} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0^T \\ 0 & \hat{X}^T(\tilde{X}^T A \tilde{X})\hat{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0^T \\ 0 & \Lambda' \end{pmatrix} = \Lambda.$$

Položíme-li $X = X_1 \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \hat{X} \end{pmatrix}$, je X jakožto součin ortogonálních matic ortogonální a platí $X^T A X = \Lambda$, tj. $A = X \Lambda X^T$, čímž je důkaz indukcí proveden. Potom též $AX = X\Lambda$, takže $AX_{\bullet i} = \Lambda_{ii} X_{\bullet i} = \lambda_i(A) X_{\bullet i}$ pro každé i a $X_{\bullet i}$ je vlastní vektor příslušný k $\lambda_i(A)$ ($X_{\bullet i} \neq 0$ vzhledem k ortogonalitě X). $\square$

Výpočet vlastních čísel symetrické matice

Jacobiho metoda (z r. 1846) pro výpočet vlastních čísel symetrické matice, uvedená na další straně, je založena na myšlence postupného snižování veličiny

$$\mathrm{off}(A) = \sqrt{\sum_i \sum_{j \neq i} a_{ij}^2}$$

(tj. odmocniny ze součtu čtverců nediagonálních prvků) ortogonálními transformacemi typu $A := J^T A J$, které nemění vlastní čísla. Konstrukce ortogonálních matic J (které se liší od jednotkové matice jen na 4 místech) zaručuje, že $\mathrm{off}(A) \to 0$, takže po konečně mnoha krocích $\mathrm{off}(A)$ klesne pod stanovenou mez ε. Výsledná matice je „téměř diagonální" a její diagonální prvky, seřadíme-li je podle velikosti (algoritmus jejich uspořádání neprovádí), aproximují vlastní čísla původní matice s přesností $< \varepsilon$.

Průběžná matice je v algoritmu značena L (místo A).

Jacobiho metoda pro výpočet vlastních čísel symetrické matice

$L = A$; $X = I$;
while off$(L) \geq \varepsilon$
    nalezni $p < q$, pro které $|\ell_{pq}| = \max_{i<j} |\ell_{ij}|$;
    $\tau = (\ell_{qq} - \ell_{pp})/(2\ell_{pq})$;
    if $\tau \geq 0$, $t = 1/(\tau + \sqrt{1+\tau^2})$;
    else $t = -1/(-\tau + \sqrt{1+\tau^2})$;
    end
    $c = 1/\sqrt{1+t^2}$; $s = tc$;
    $J = I$; $J_{pp} = c$; $J_{qq} = c$; $J_{pq} = s$; $J_{qp} = -s$;
    $L = J^T L J$; $X = XJ$;
end
% platí $A = XLX^T$, kde X je ortogonální a off$(L) < \varepsilon$;
% seřadíme-li diagonální prvky L podle velikosti $\ell'_{11} \geq \ldots \geq \ell'_{nn}$,
% potom $|\lambda_i(A) - \ell'_{ii}| < \varepsilon$ pro každé i.

Zdůvodnění konvergence

Zdlouhavým výpočtem, který zde neuvádíme, se dá ukázat, že je-li $L' = J^T L J$ nová iterační matice vypočtená z předešlé iterace L, potom platí

$$\mathrm{off}(L') \leq q \cdot \mathrm{off}(L),$$

kde $q = \sqrt{1 - \frac{2}{n(n-1)}} < 1$, takže $q^k \to 0$ pro $k \to \infty$ a proto $\mathrm{off}(L) \to 0$, tj. nediagonální prvky L konvergují k 0.

Pozitivní (semi)definitnost a vlastní čísla

Věta 116. *Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně semidefinitní (definitní) právě když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná (kladná).*

Důkaz. Pozitivně semidefinitní matice A má reálná vlastní čísla. Je-li λ libovolné její vlastní číslo a x příslušný reálný vlastní vektor, potom z $Ax = \lambda x$ plyne $x^T Ax = \lambda x^T x$, kde $x^T Ax \geq 0$ a $x^T x > 0$, takže $\lambda \geq 0$. Naopak, jsou-li všechna vlastní čísla A nezáporná, potom ze spektrálního rozkladu $A = X \Lambda X^T$ plyne pro každé x

$$x^T Ax = (X^T x)^T \Lambda (X^T x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)(X^T x)_i^2 \geq 0,$$

takže A je pozitivně semidefinitní. Analogicky pro pozitivní definitnost. □

Odmocnina z matice

Věta 117. *Ke každé pozitivně semidefinitní matici A a ke každému přirozenému číslu $k \geq 2$ existuje pozitivně semidefinitní matice B taková, že*

$$B^k = A.$$

Poznámka. Taková pozitivně semidefinitní matice B existuje dokonce právě jedna, to je však obtížné dokázat.

Důkaz. A má spektrální rozklad $A = X\Lambda X^T$, kde na diagonále Λ stojí její nezáporná vlastní čísla $\lambda_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$. Nechť $\Lambda^{1/k}$ je diagonální matice s diagonálními prvky $\sqrt[k]{\lambda_i(A)}$, $i = 1, \ldots, n$. Potom pro matici $B = X\Lambda^{1/k}X^T$ platí

$$B^k = X\Lambda^{1/k}X^T \cdot X\Lambda^{1/k}X^T \cdot \ldots \cdot X\Lambda^{1/k}X^T = X(\Lambda^{1/k})^k X^T = X\Lambda X^T = A,$$

a B je pozitivně semidefinitní protože je symetrická a je podobná matici $\Lambda^{1/k}$, takže všechna její vlastní čísla jsou nezáporná. $\square$

Vztah mezi singulárními a vlastními čísly

Singulární čísla jsme definovali pro obecné matice, kdežto vlastní čísla jen pro čtvercové matice. Singulární čísla jsou vždy nezáporná, kdežto vlastní čísla jsou obecně komplexní. Existuje nějaký vztah mezi těmito veličinami?

Je-li $A = X\Sigma Y^T$ SVD rozklad matice A, potom

$$A^T A = Y\Sigma^T X^T X\Sigma Y^T = Y(\Sigma^T\Sigma)Y^T,$$

takže matice $A^T A$ (která je pozitivně semidefinitní a má nezáporná vlastní čísla) je podobná matici $\Sigma^T\Sigma$, která má na diagonále čísla $\sigma_i^2(A)$ a případné další nuly. Z toho dostáváme, že kladná singulární čísla jsou odmocniny z kladných vlastních čísel matice $A^T A$.

(Pokračování)

Věta 118. *Má-li matice $A^T A$ právě r kladných vlastních čísel, potom singulárními čísly matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jsou čísla $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$, $i = 1, \ldots, r$, a $\sigma_i(A) = 0$ pro $i = r + 1, \ldots, q$, kde $q = \min\{m, n\}$.*

Poznámka. To dokazuje, že singulární čísla jsou maticí A určena jednoznačně, což je fakt, který jsme uvedli na str. 272, ale nemohli jsme ho tehdy dokázat.

Důsledek. Pro symetrickou matici A platí $\sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$, $i = 1, \ldots, n$.

Algoritmus pro výpočet SVD rozkladu

0. Dána: matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
1. Sestav matici $A^T A$ a vypočti její spektrální rozklad $A^T A = Y \Lambda Y^T$.
2. Sestroj diagonální matici $S \in \mathbb{R}^{r \times r}$ s diagonálními prvky $\sqrt{\Lambda_{11}}, \dots, \sqrt{\Lambda_{rr}}$, kde Λ_{rr} je poslední kladné číslo na diagonále Λ.
3. Potom $A\tilde{Y}S^{-1}$, kde $\tilde{Y}$ sestává z prvních r sloupců Y, má ortonormální sloupce. Doplň ji na ortogonální matici $X = (A\tilde{Y}S^{-1}\ \tilde{X})$.
4. Ukonči: $A = X \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T$ je SVD rozklad matice A.

Důkaz existence SVD rozkladu (viz str. 269)

Z $A^TA = Y\Lambda Y^T$ plyne, píšeme-li $Y = (\tilde{Y}\ \hat{Y})$,

$$\begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Lambda = (AY)^T(AY) = \begin{pmatrix} (A\tilde{Y})^T \\ (A\hat{Y})^T \end{pmatrix} (A\tilde{Y}\ \ A\hat{Y}),$$

takže pro levý horní blok platí

$$S^2 = (A\tilde{Y})^T(A\tilde{Y})$$

a tedy

$$I = (A\tilde{Y}S^{-1})^T(A\tilde{Y}S^{-1}),$$

tj. matice $A\tilde{Y}S^{-1}$ má ortonormální sloupce. Doplníme-li ji na ortogonální matici X, potom

$$X \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^T = (A\tilde{Y}S^{-1}\ \ \tilde{X}) \begin{pmatrix} S\tilde{Y}^T \\ 0 \end{pmatrix} = A\tilde{Y}S^{-1}S\tilde{Y}^T = A.$$

Tím jsme dokázali existenci SVD rozkladu a současně i správnost algoritmu. $\square$

Sylvesterova věta o setrvačnosti

Definice. Setrvačností symetrické matice A nazýváme uspořádanou trojici (p_+, p_0, p_-), kde p_+ je počet kladných, p_0 nulových a p_- záporných vlastních čísel matice A.

Definice. Symetrické matice A', A se nazývají kongruentní jestliže platí $A' = XAX^T$ pro jistou regulární matici X.

Věta 119. (Sylvester[††]) *Kongruentní symetrické matice mají stejnou setrvačnost.*

Poznámka. I když se při přechodu od symetrické matice A k symetrické matici XAX^T vlastní čísla mohou změnit, setrvačnost zůstává stejná.

[††] „Sylvesterův zákon setrvačnosti"; J. J. Sylvester, 1814-1897

Důkaz

Nechť symetrické matice A', A jsou kongruentní, tj. $A' = XAX^T$ pro jistou regulární matici X. Nechť $A' = Q'\Lambda'Q'^T$, $A = Q\Lambda Q^T$ jsou jejich spektrální rozklady, potom z $A' = XAX^T$ plyne $\Lambda' = R^T\Lambda R$, kde $R = Q^TX^TQ'$ je regulární, a tedy

$$x^T\Lambda'x = (Rx)^T\Lambda(Rx) \tag{60}$$

pro každé x. Předpokládejme pro spor, že $p'_+ > p_+$, kde p'_+ a p_+ jsou počty kladných vlastních čísel matice A' resp. A. Je-li $p'_+ = 1$, potom $p_+ = 0$ a dosazením $x = e_1$ do (60) dostáváme

$$0 < \lambda_1(A') = e_1^T\Lambda'e_1 = (Re_1)^T\Lambda(Re_1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)(Re_1)_i^2 \leq 0,$$

což je spor. Je-li $p'_+ > 1$, označme R^* matici sestávající z prvních $p'_+ - 1$ řádků a prvních p'_+ sloupců matice R. Potom homogenní soustava $R^*x = 0$, která má více sloupců než řádků, má netriviální řešení x^* (viz str. 112).

(Pokračování důkazu)

Nechť x vznikne doplněním x^* nulami na n-rozměrný vektor. Potom z (60) dostáváme

$$0 < \sum_{i=1}^{p'_+} \lambda_i(A')x_i^2 = x^T\Lambda' x = (Rx)^T\Lambda(Rx) = \sum_{i=p'_+}^{n} \lambda_i(A)(Rx)_i^2 \leq 0$$

(neboť $\lambda_1(A') \geq \ldots \geq \lambda_{p'_+}(A') > 0 \geq \lambda_{p'_+}(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A)$ a $(Rx)_1 = \ldots = (Rx)_{p'_+-1} = 0$), což je opět spor. V obou případech jsme z předpokladu $p'_+ > p_+$ dospěli ke sporu, tedy platí $p'_+ \leq p_+$. Jelikož $A' = XAX^T$ implikuje $A = X^{-1}A'(X^{-1})^T$, plyne z právě dokázaného, že $p_+ \leq p'_+$, celkem tedy $p'_+ = p_+$. Protože počet záporných vlastních čísel matic A', A je roven počtu kladných vlastních čísel matic $-A'$, $-A$ a protože $-A' = X(-A)X^T$, plyne z předchozího, že $p'_- = p_-$ a tedy i $p'_0 = n - p'_+ - p'_- = n - p_+ - p_- = p_0$. Tím jsme dokázali, že $(p'_+, p'_0, p'_-) = (p_+, p_0, p_-)$, tj. že matice A' a A mají stejnou setrvačnost. $\square$

Spektrální poloměr

Definice. Číslo

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda|\,;\ \lambda \text{ je vlastní číslo } A\}$$

nazýváme spektrálním poloměrem matice A.

Poznámka. Spektrální poloměr je tedy vždy nezáporné (reálné) číslo.

Matice s $\varrho(A) < 1$

Věta 120. *Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1) $\varrho(A) < 1$,
2) $A^j \to 0$ *pro* $j \to \infty$,
3) $I - A$ *je regulární,* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A^j$ *konverguje a* $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} A^j$.

Poznámka. Konvergencí maticové posloupnosti resp. řady se rozumí konvergence v každém koeficientu. Řadě $\sum_{j=0}^{\infty} A^j$ se říká Neumannova řada. Povšimněte si analogie s geometrickou řadou $(1-q)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} q^j$, která konverguje pro $|q| < 1$.

Řešení soustavy $x = Ax + b$

Lze-li soustavu rovnic upravit do tvaru $x = Ax + b$ s $\varrho(A) < 1$, lze ji řešit iterační metodou:

Věta 121. *Nechť $\varrho(A) < 1$. Potom pro každou pravou stranu b a pro každé $x^{(0)}$ posloupnost $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná předpisem*

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

konverguje k jedinému řešení rovnice $x = Ax + b$.

Důkaz. Indukcí dostáváme $x^{(k)} = A^k x^{(0)} + \left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j\right) b$, $k = 0, 1, \ldots$, a protože $A^k \to 0$ a $\sum_{j=0}^{k-1} A^j \to (I - A)^{-1}$ pro $k \to \infty$ podle věty 120, je $x^{(k)} \to x = (I - A)^{-1} b$, tj. $x = Ax + b$ a z regularity $I - A$ plyne, že x je jediné řešení této rovnice. $\square$

Maticové nerovnosti

Definice. Pro matice A, B stejného typu definujeme $A \leq B$ jestliže platí $A_{ij} \leq B_{ij}$ pro každé i, j, a $A < B$ jestliže $A_{ij} < B_{ij}$ pro každé i, j.

Poznámka. Místo $A \leq B$, $A < B$ píšeme rovněž ekvivalentně $B \geq A$, $B > A$. Stejně zavádíme nerovnosti mezi vektory jakožto zvláštními případy matic.

Definice. Matice A se nazývá nezáporná jestliže $A \geq 0$, a kladná jestliže $A > 0$.

Vlastnost. Je-li $A \leq B$, $C \geq 0$, a je-li součin CA definován, potom $CA \leq CB$.

Perronova věta

Věta 122. (Perron 1907) *Pro nezápornou čtvercovou matici A platí*

$$Ax = \varrho(A)x$$

pro jisté $x \geq 0$, $x \neq 0$. Je-li A kladná, potom $\varrho(A) > 0$ a vektor x lze volit kladný; navíc v tomto případě je $|\lambda| < \varrho(A)$ pro každé vlastní číslo $\lambda \neq \varrho(A)$ a kladný vlastní vektor x příslušející k $\varrho(A)$ je dodatečnou podmínkou $\sum_i x_i = 1$ určen jednoznačně.

Poznámka. Jinými slovy, nezáporná (kladná) matice má nezáporné (kladné) vlastní číslo a k němu příslušející nezáporný (kladný) vlastní vektor. Toto tvrzení není tak triviální jak by se snad na první pohled mohlo zdát, a jeho důkaz je poměrně obtížný.

Část 8:

Lineární programování

Úloha lineárního programování

Základní problém:

$$\min\{c^T x\,;\, Ax = b,\, x \geq 0\}. \tag{P}$$

Předpokládáme, že $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, kde $m \leq n$ (není na újmu obecnosti), potom $b \in \mathbb{R}^m$ a $c, x \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Jde tedy o nalezení nejmenší hodnoty lineární funkce $c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (zvané účelová resp. cílová funkce) na množině nezáporných řešení soustavy $Ax = b$.

Poznámka. Příbuzné úlohy, jako maximalizační místo minimalizační, se soustavou omezení tvaru $Ax \leq b$ resp. $Ax \geq b$, bez požadavku nezápornosti vektoru x nebo s požadavkem nezápornosti jenom některých jeho složek, se dají převést na základní úlohu (P). V dalším se proto zabýváme řešením úlohy lineárního programování v tomto standardním tvaru.

Základní pojmy

Definice. Vektor x, který splňuje $Ax = b$, $x \geq 0$, se nazývá přípustné řešení úlohy (P).

Definice. Přípustné řešení x^* se nazývá optimálním řešením úlohy (P), jestliže platí

$$c^T x^* \leq c^T x$$

pro každé přípustné řešení (P); hodnotu $c^T x^*$ nazýváme optimální hodnotou úlohy (P).

Poznámka. Optimální hodnota je určena jednoznačně, kdežto optimálních řešení může být více: je-li x^* optimální řešení a platí-li $c^T x^* = c^T \hat{x}$ pro jisté přípustné řešení $\hat{x}$, potom $\hat{x}$ je rovněž optimálním řešením.

Poznámka. Povšimněte si, že - poněkud paradoxně - se nezavádí pojem „řešení", ale pouze „přípustné řešení" a „optimální řešení".

B-značení

Nechť A je matice typu $m \times n$, $m \leq n$, a nechť $B = (B_1, \ldots, B_m)$ je uspořádaná m-tice vzájemně různých čísel z $\{1, \ldots, n\}$. Potom symbolem A_B značíme čtvercovou matici o sloupcích $A_{\bullet B_1}, \ldots, A_{\bullet B_m}$, tj.

$$(A_B)_{\bullet j} = A_{\bullet B_j}$$

pro $j = 1, \ldots, m$.

Podobně pro $x \in \mathbb{R}^n$ definujeme $x_B = (x_{B_1}, \ldots, x_{B_m})^T$, tj. $(x_B)_j = x_{B_j}$ pro $j = 1, \ldots, m$; analogicky c_B.

Poznámka. Povšimněte si, že čísla B_j nemusí být uspořádaná podle velikosti, takže v matici A_B mohou jít sloupce matice A ve zpřeházeném pořadí.

Další postup

Simplexová metoda, k jejímuž popisu směřujeme, pracuje tak, že v každém kroku udržuje jistou indexovou množinu $B = (B_1, \ldots, B_m)$ (ve smyslu předchozího značení), k níž jsou jednoznačně přiřazeny průběžné veličiny $\overline{A}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{h}$.

Věta 123 uvádí, jak při daném B mohou tyto veličiny být vypočteny posloupností elementárních operací, a rovněž vzorce pro ně. To ukazuje, že výpočty mohou být prováděny v tabulce obsahující bloky B, $\overline{A}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ a $\overline{h}$. Věty 124 až 126 uvádějí význam jednotlivých bloků z hlediska fungování algoritmu (dvojí možnost zastavení, výpočet optimálního řešení), věta 127 ukazuje jak provést běžný krok algoritmu změnou jednoho prvku indexové množiny B, a věta 128 zaručuje konečnost algoritmu při libovolných vstupních datech. Věta 130 popisuje množinu optimálních řešení a věta 131 ukazuje, jak lze přímo z tabulky ověřit, že vypočtené optimální řešení je jediné.

Transformace na tabulkový tvar

Věta 123. *Nechť matice*

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{pmatrix}$$

je elementárními operacemi s pivoty jen v části A převedena na tvar

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \bar{b} \\ \bar{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix},$$

kde $\overline{A}_B = I$ a $\bar{c}_B^T = 0^T$ pro jisté B (tj. v B_j-tém sloupci vznikne j-tý sloupec jednotkové matice ($j = 1, \ldots, m$)). Potom pro výslednou matici platí

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A_B^{-1} A, \\ \bar{b} &= A_B^{-1} b, \\ \bar{c}^T &= c^T - c_B^T A_B^{-1} A, \\ \overline{h} &= -c_B^T A_B^{-1} b. \end{aligned}$$

Důkaz

Podle věty 10 a jejího důkazu je

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{pmatrix},$$

kde $Q = Q_q \cdot \ldots \cdot Q_1$ a matice Q_j, $j = 1, \ldots, q$, odpovídají jednotlivým elementárním operacím. Jelikož pivot se nikdy nevybírá v posledním řádku, stojí v posledním sloupci každé matice Q_j poslední sloupec e_{m+1} jednotkové matice I (viz větu 9), a totéž tedy platí (indukcí) i pro matici Q. To znamená, že Q je tvaru

$$Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ y^T & 1 \end{pmatrix}$$

pro jistou matici $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a jistý vektor $y \in \mathbb{R}^m$. Tedy upravená matice má tvar

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ y^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & Pb \\ y^T A + c^T & y^T b \end{pmatrix}.$$

(Pokračování důkazu)

To znamená, že $\overline{A} = PA$ a podle předpokladu je

$$I_{\bullet j} = (\overline{A}_B)_{\bullet j} = \overline{A}_{\bullet B_j} = (PA)_{\bullet B_j} = PA_{\bullet B_j} = P(A_B)_{\bullet j} = (PA_B)_{\bullet j}$$

pro každé j, tedy $PA_B = I$ a $P = A_B^{-1}$ (věta 16). Podobně $\overline{c}^T = y^T A + c^T$ a podle předpokladu

$$0 = \overline{c}_{B_j} = (y^T A + c^T)_{B_j} = y^T A_{\bullet B_j} + c_{B_j} = (y^T A_B)_j + (c_B^T)_j = (y^T A_B + c_B^T)_j$$

pro každé j, což znamená, že $y^T A_B + c_B^T = 0^T$, tedy $y^T = -c_B^T A_B^{-1}$, takže výsledná matice má tvar

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} A & A_B^{-1} b \\ c^T - c_B^T A_B^{-1} A & -c_B^T A_B^{-1} b \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Tabulka

Místo s maticí

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{b} \\ \overline{c}^T & \overline{h} \end{pmatrix}$$

budeme dále pracovat s tabulkou

B	$\overline{A}$	$\overline{b}$
	$\overline{c}^T$	$\overline{h}$

(T)

která navíc obsahuje první sloupec s indexovou množinou B, kterou budeme nazývat bází. Je zřejmé, že tohoto sloupce se eliminace netýká.

Bázická řešení

Věta 124. *Jestliže v tabulce (T) je* $\overline{b} \geq 0$, *potom vektor* x^B *definovaný předpisem*

$$\begin{aligned} (x^B)_{B_j} &= \overline{b}_j \qquad (j = 1, \ldots, m), \\ (x^B)_j &= 0 \qquad (j \notin B) \end{aligned}$$

je přípustným řešením úlohy (P) a platí $\overline{h} = -c^T x^B$.

Definice. Jestliže v tabulce (T) je $\overline{b} \geq 0$, nazýváme ji simplexovou tabulkou a x^B nazýváme bázickým přípustným řešením s bází B.

Důkaz

Z definice x^B plyne, že $x^B \geq 0$ a podle věty 123 je $x^B_B = (x^B)_B = \bar{b} = A_B^{-1} b$, tedy $A_B x^B_B = b$, což znamená, že

$$Ax^B = \sum_{j=1}^{n} A_{\bullet j}(x^B)_j = \sum_{j \in B} A_{\bullet j}(x^B)_j = \sum_{j=1}^{m} A_{B_j}(x^B)_{B_j} = A_B x^B_B = b.$$

Tedy x^B je přípustným řešením (P) a $\bar{h} = -c_B^T A_B^{-1} b = -c_B^T x^B_B = -c^T x^B$. $\square$

Příklad

2	0	1	-0.5738	0	0.7424	0.0682
4	0	0	-0.5303	1	1.1970	0.4773
1	1	0	1.8182	0	-1.8293	2.8636
	0	0	2.1836	0	-6.3182	-3.6136

Toto je simplexová tabulka, která ukazuje bázické přípustné řešení $x_2 = 0.0682$, $x_4 = 0.4773$, $x_1 = 2.8636$, $x_3 = x_5 = 0$, tj.

$$x^B = (2.8636, 0.0682, 0, 0.4773, 0)^T,$$

kde $B = (2, 4, 1)$. Odpovídající hodnota účelové funkce je

$$c^T x^B = +3.6136.$$

Kritérium optimality

Věta 125. *Jestliže v simplexové tabulce (T) platí*

$$\overline{c} \geq 0,$$

potom x^B je optimální řešení úlohy (P).

Poznámka. Z hlediska tabulky je adekvátnější zápis $\overline{c}^T \geq 0^T$, neboť v ní pracujeme s vektorem $\overline{c}^T$. Slovně, tabulka ukazuje optimální řešení, jestliže všechny prvky kriteriálního řádku jsou nezáporné.

Důkaz

Nechť x je libovolné přípustné řešení úlohy (P). Potom z $\overline{c} \geq 0$ podle věty 123 plyne

$$c^T \geq c_B^T A_B^{-1} A$$

a přenásobením nezáporným vektorem x

$$c^T x \geq c_B^T A_B^{-1} A x = c_B^T A_B^{-1} b = c_B^T x_B^B = c^T x^B,$$

tedy x^B je optimální řešení. $\square$

Kritérium neomezenosti

Věta 126. *Nechť v simplexové tabulce (T) existuje s tak, že $\overline{c}_s < 0$ a $\overline{A}_{\bullet s} \leq 0$ (tj. $\overline{a}_{js} \leq 0$ pro každé j)[‡‡]. Potom*

$$\inf\{c^T x\,;\, Ax = b,\, x \geq 0\} = -\infty,$$

tj. hodnota účelové funkce není na množině přípustných řešení zdola omezená (a tedy úloha nemá optimální řešení).

Poznámka. Jak vysvítá z důkazu, v tomto případě množina přípustných řešení obsahuje polopřímku, podél níž účelová funkce klesá do $-\infty$.

[‡‡] nikoliv $\overline{A}_s < 0$ (častá chyba u zkoušek); potom by v případě že $\overline{A}_s \leq 0$ a $\overline{A}_s \not< 0$ došlo k selhání algoritmu protože by nebylo možno vybrat pivota, viz věta 127 dále

Důkaz

Protože $\bar{c}_s < 0$, je $s \notin B$. Definujme $z \in R^n$ předpisem $z_B = -\overline{A}_{\bullet s}$ (tj. $z_{B_j} = -\bar{a}_{js}$ pro $j = 1, \dots, m$), $z_s = 1$, $z_j = 0$ jinak. Potom $z \geq 0$ a podle věty 123 je

$$Az = A_B z_B + A_{\bullet s} = -A_B (A_B^{-1} A)_{\bullet s} + A_{\bullet s} = -A_{\bullet s} + A_{\bullet s} = 0$$

a dále

$$c^T z = c_B^T z_B + c_s z_s + \sum_{j \notin B,\, j \neq s} c_j z_j = c_s - c_B^T A_B^{-1} A_{\bullet s} = \bar{c}_s < 0.$$

Z toho plyne, že každý bod tvaru $x^B + \alpha z$, $\alpha \in R^1$, $\alpha \geq 0$ je přípustným řešením (P) (neboť $x^B + \alpha z \geq 0$ a $A(x^B + \alpha z) = Ax^B = b$) a platí

$$\lim_{\alpha \to \infty} c^T (x^B + \alpha z) = \lim_{\alpha \to \infty} (c^T x^B + \alpha \bar{c}_s) = -\infty,$$

což znamená, že

$$\inf\{c^T x;\ Ax = b, x \geq 0\} = -\infty. \qquad \square$$

Běžný krok algoritmu

Věta 127. *Nechť v simplexové tabulce (T) není splněno kritérium optimality ani kritérium neomezenosti. Potom určíme-li indexy s, r ze vzorců*

$$s = \min\{j\,;\, \overline{c}_j < 0\}, \tag{61}$$

$$B_r = \min\left\{B_k\,;\, \frac{\overline{b}_k}{\overline{a}_{ks}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}}\,;\, \overline{a}_{js} > 0\right\},\ \overline{a}_{ks} > 0\right\} \tag{62}$$

(tzv. Blandovo pravidlo), provedeme-li eliminaci s pivotem $\overline{a}_{rs}$ a položíme-li $B_r := s$, dostáváme opět simplexovou tabulku

B'	$\overline{A}'$	$\overline{b}'$
	$\overline{c}'^T$	$\overline{h}'$

(tj. $\overline{b}' \geq 0$) a nové bázické přípustné řešení $x^{B'}$ splňuje $c^T x^{B'} \leq c^T x^B$. Je-li navíc $\overline{b}_r > 0$, potom $c^T x^{B'} < c^T x^B$.

Důkaz

Jelikož v tabulce (T) není splněno kritérium optimality, je $\overline{c}_j < 0$ pro jisté j, takže s je vzorcem (61) dobře definováno. Rovněž, jelikož není splněno kritérium neomezenosti, existuje j pro které $\overline{a}_{js} > 0$, takže množina $\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}};\, \overline{a}_{js} > 0\right\}$ je neprázdná a tedy i r je vzorcem (62) dobře definováno. Navíc $\overline{a}_{rs} > 0$, takže $\overline{a}_{rs}$ lze vybrat za pivota.

V tabulce (T) byl v B_j-tém sloupci j-tý sloupec jednotkové matice, $j = 1, \ldots, m$ (věta 123). Při eliminaci s pivotem $\overline{a}_{rs}$ se vytvoří r-tý sloupec jednotkové matice v s-tém sloupci tabulky, přičemž žádný z ostatních sloupců jednotkové matice se nezmění (ty mají v r-tém řádku nuly, takže eliminace se jich nedotkne). To znamená, že nová tabulka odpovídá indexové množině

$$B' = (B_1, \ldots, B_{r-1}, s, B_{r+1}, \ldots, B_m).$$

Eliminací v původní tabulce

(Pokračování důkazu)

$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$
B_r	$\dots$	$\dots$	$\overline{a}_{rs}$	$\dots$	$\dots$	$\overline{b}_r$
$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$
B_j	$\dots$	$\dots$	$\overline{a}_{js}$	$\dots$	$\dots$	$\overline{b}_j$
$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$
	$\dots$	$\dots$	$\overline{c}_s$	$\dots$	$\dots$	$\overline{h}$

s pivotem $\overline{a}_{rs}$ dostaneme tabulku

(Pokračování důkazu)

$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$
s	$\dots$	$\dots$	1	$\dots$	$\dots$	$\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$
$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$
B_j	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$	$\dots$	$\overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$
$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$
	$\dots$	$\dots$	0	$\dots$	$\dots$	$\overline{h} - \overline{c}_s\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$

tj. $\overline{b}'_r = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$ a $\overline{b}'_j = \overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$ pro $j \neq r$. Dokážeme, že $\overline{b}' \geq 0$. Protože $\overline{b}_r \geq 0$ a $\overline{a}_{rs} > 0$, je $\overline{b}'_r \geq 0$. Je-li $j \neq r$ a $\overline{a}_{js} \leq 0$, potom $\overline{b}'_j = \overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \geq \overline{b}_j \geq 0$. Nakonec, je-li $j \neq r$ a $\overline{a}_{js} > 0$, potom ze vzorce (62) vyplývá

$$\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}};\, \overline{a}_{js} > 0\right\} \leq \frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}},$$

(Pokračování důkazu)

z čehož plyne $\overline{b}_j - \overline{a}_{js}\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \geq 0$, čili $\overline{b}'_j \geq 0$. Tím jsme dokázali, že $\overline{b}' \geq 0$. Tedy tabulka po provedení eliminace odpovídá bázickému přípustnému řešení $x^{B'}$, pro které podle věty 124 platí

$$c^T x^{B'} = -\overline{h}' = -\overline{h} + \overline{c}_s \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \leq -\overline{h} = c^T x^B$$

(neboť $\overline{c}_s < 0$, $\overline{b}_r \geq 0$, $\overline{a}_{rs} > 0$), tedy

$$c^T x^{B'} \leq c^T x^B,$$

a při $\overline{b}_r > 0$ je $\overline{c}_s \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} < 0$, takže

$$c^T x^{B'} < c^T x^B. \qquad \square$$

Příklad na Blandovo pravidlo

4	0	0.7500	1.5000	1.0000	-0.2500	2.2500
1	1.0000	1.2500	1.5000	0	0.2500	3.7500
0	0	-0.7500	-1.5000	0	1.2500	-2.2500

V této tabulce dává pravidlo (61) $s = 2$. Protože oba podíly $\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{12}}$ a $\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}}$ jsou rovny 3, nabývá se vnitřní minimum v pravidle (62) v obou řádcích a nelze podle něho rozhodnout. Protože $B_2 = 1 < 4 = B_1$, dává celé pravidlo (62) $r = 2$, takže pivotem bude prvek $\bar{a}_{22}$.

Chybná formulace Blandova pravidla (62) je nejčastější chybou u zkoušky z lineárního programování (přes 30% špatných odpovědí).

Simplexový algoritmus

Algoritmus (simplexová metoda; Dantzig 1947)

sestav výchozí simplexovou tabulku; % (bude probráno dále)
opt: = *false; neom:* = *false;*
repeat
    if $\overline{c} \geq 0$ **then** *opt:* = *true* **else**
        begin
            $s := \min\{j; \overline{c}_j < 0\}$;
            if $\overline{A}_{\bullet s} \leq 0$ **then** *neom:*= *true* **else**
                begin
                    urči r podle Blandova pravidla (62);
                    proveď eliminaci s pivotem $\overline{a}_{rs}$;
                    $B_r := s$
                end
        end
until *(opt* **or** *neom);*
if *opt* **then** $\{x^B$ je optimální řešení$\}$ **else** $\{$úloha je neomezená$\}$.

Cyklus

Cyklem rozumíme konečnou posloupnost kroků simplexového algoritmu, která začíná i končí stejnou bází B (a tedy i stejnou simplexovou tabulkou).

Tvrzení 1 *V průběhu cyklu:*

(i) zůstává poslední sloupec beze změny,

(ii) v každém kroku pro řádek r obsahující pivota platí $\overline{b}_r = 0$.

Důkaz

Jestliže algoritmus konstruuje cyklus $B^1, B^2, \ldots, B^\ell = B^1$, potom podle věty 127 platí

$$c^T x^{B^1} \geq c^T x^{B^2} \geq \ldots \geq c^T x^{B^\ell} = c^T x^{B^1},$$

z čehož plyne

$$c^T x^{B^1} = c^T x^{B^2} = \ldots = c^T x^{B^\ell}.$$

Potom podle věty 127 v každé tabulce cyklu s pivotem $\overline{a}_{rs}$ musí být $\overline{b}_r = 0$ (jinak by účelová funkce klesla). Z toho pak plyne, že při eliminaci se sloupec $\overline{b}$ nemění (viz vzorce pro $\overline{b}'_j$ v důkazu věty 127), stejně tak jako hodnota účelové funkce $\overline{h}$. $\square$

Konečnost algoritmu

Věta 128. *Simplexový algoritmus je konečný.*

Důkaz. Dokážeme sporem, že v žádné úloze LP nemůže nastat cyklus. To znamená, že algoritmus se nemůže vrátit do báze, kterou už jednou prošel, a protože bází je konečně mnoho, bude z toho plynout konečnost algoritmu.

Předpokládejme, že algoritmus se pro jistou úlohu zacyklí. Označme T množinu všech indexů s, vstupujících do báze během cyklu, a nechť $q = \max T$. Z počáteční a koncové tabulky cyklu zkonstruujeme index $k \in T$ pro který $k > q$, což bude spor.

(Pokračování důkazu)

Nechť q vstupuje do báze v tabulce

B_0	$\cdots$	$\vdots$
	$\cdots \quad y_q < 0 \quad \cdots$	$\cdots$

a vystupuje v tabulce

$\vdots$ q $\vdots$	$\vdots$ $\cdots \quad \overline{a}_{rs} \quad \cdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\overline{b}_r$ $\vdots$
	$\cdots \quad \overline{c}_s < 0 \quad \cdots$	$\cdots$

(Pokračování důkazu)

s bází B. Definujme z předpisem $z_B = \overline{A}_{\bullet s}$ (tj. $z_{B_j} = \overline{a}_{js}$ pro $j = 1, \ldots, m$), $z_s = -1$, $z_j = 0$ jinak, tedy $z_B = A_B^{-1} A_{\bullet s}$, $Az = A_B z_B + (-1)A_{\bullet s} = 0$, což dává

$$\begin{aligned} \sum_k y_k z_k &= y^T z = (c^T - c_{B_0}^T A_{B_0}^{-1} A)z = c^T z = c_B^T z_B + c_s z_s = c_B^T A_B^{-1} A_{\bullet s} - c_s \\ &= -(c^T - c_B^T A_B^{-1} A)_s = -\overline{c}_s > 0, \end{aligned}$$

to znamená, že existuje k takové, že $y_k z_k > 0$. Protože $y_k \neq 0$, je $k \notin B_0$; $z_k \neq 0$ implikuje buď $k \in B$, nebo $k = s$, tj. buď je v bázi, nebo do ní právě vstupuje, tedy $k \in T$. Dále $y_q z_q = y_q \overline{a}_{rs} < 0$ (neboť pivot je kladný), tedy $k \neq q$. Dokážeme, že $q < k$, to bude spor s volbou q jako maximálního prvku T.

(Pokračování důkazu)

Protože $y_k z_k > 0$, je buď a) $y_k < 0$, $z_k < 0$, nebo b) $y_k > 0$, $z_k > 0$.

a) Je-li $y_k < 0$, potom k připadalo v úvahu pro vstup do báze B_0, ale nebylo vybráno, takže podle pravidla (61) je $q < k$.

b) Je-li $y_k > 0$, $z_k > 0$, potom $z_k = z_{B_p} = \overline{a}_{ps} > 0$ pro jisté p. Protože $y_k > 0$, k nebylo v bázi B_0, ale je v B, tedy muselo vstoupit, což podle předchozího tvrzení znamená že $\overline{b}_p = 0$, tj.

$$0 = \frac{\overline{b}_p}{\overline{a}_{ps}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}};\ \overline{a}_{js} > 0\right\}.$$

Tedy B_p bylo vhodné pro výběr, ale nebylo vybráno, takže podle pravidla (62) muselo být $B_r < B_p$, tj. $q < k$.

V obou případech je $q < k$, tedy jsme nalezli $k \in T$, $k > q$, kde $q = \max T$, a to je spor. Proto cyklus nemůže nastat. $\square$

Dvoufázová simplexová metoda: úvod

V popisu simplexového algoritmu na str. 368 bylo v prvním řádku uvedeno „sestav výchozí simplexovou tabulku". To ovšem není tak snadné, protože tabulka musí obsahovat všechny sloupce jednotkové matice, pod nimi nuly, a mít nezápornou pravou stranu.

K překonání této obtíže se proto simplexový algoritmus používá dvoufázově. V první fázi se aplikuje na uměle sestrojenou pomocnou úlohu, jejíž výchozí tabulka má požadované vlastnosti. Po konečně mnoha krocích (věta 128) se buď zjistí nepřípustnost původní úlohy, nebo se nalezne její bázické přípustné řešení. V tom případě se jemu odpovídající tabulka použije pro začátek druhé fáze, ve které se už řeší původní úloha a po konečně mnoha krocích se buď nalezne optimální řešení, nebo ověří neomezenost.

Fáze I

Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $b \geq 0$, jinak v soustavě omezení nahradíme každou rovnici $(Ax)_i = b_i$, kde $b_i < 0$, rovnicí $-(Ax)_i = -b_i$. Sestavíme výchozí tabulku

B_0	A	I	b
	0^T	e^T	0

kde I je jednotková matice, $e = (1, \ldots, 1)^T \in R^m$ a $B_0 = (n+1, \ldots, n+m)$, a eliminací s pivoty v bloku I vytvoříme pod tímto blokem nuly.

(Pokračování)

Tím dostaneme simplexovou tabulku

B_0	A	I	b
	$-e^T A$	0^T	$-e^T b$

(T$_0$)

Z věty 123 plyne, že (T$_0$) je simplexová tabulka pro pomocnou úlohu

$$\min\{0^T x + e^T x' \,;\; Ax + Ix' = b,\ x \geq 0,\ x' \geq 0\} \tag{63}$$

s bází $B_0 = (n+1, \dots, n+m)$. Zde x' je vektor tzv. umělých proměnných, které jsme přidali proto, abychom vytvořili tabulku v simplexovém tvaru.

(Pokračování)

Aplikujeme-li na úlohu (63) s výchozí tabulkou (T_0) simplexový algoritmus (str. 368), dojdeme po konečném počtu kroků k tabulce

B	$\overline{A}$	$\overline{I}$	$\overline{b}$
	$\overline{c}^T \geq 0^T$	$\overline{d}^T \geq 0^T$	$-h^*$

(T_1)

(neomezenost nemůže nastat, protože účelová funkce $0^T x + e^T x'$ je nezáporná).

Je-li $h^* > 0$, neexistuje přípustné řešení pomocné úlohy (63) s $x' = 0$, tedy původní úloha (P) není přípustná a její řešení můžeme ukončit.

Je-li $h^* = 0$, potom $x' = 0$, takže x-ová část optimálního řešení pomocné úlohy (63) je přípustným řešením (P), a můžeme přejít k fázi II.

Fáze II

I když na konci fáze I je $x' = 0$, může některá z proměnných x'_j být v bázi (s nulovou hodnotou). Na začátku fáze II se proto nejprve snažíme tyto proměnné z báze vyloučit.

Jestliže v tabulce (T_1) je $B_j > n$ pro jisté j, nalezneme libovolný prvek $\overline{a}_{js} \neq 0$ a provedeme s ním jako s pivotem obvyklou eliminaci, čímž dostaneme $B_j := s \leq n$ (zde připouštíme i záporného pivota protože $\overline{b}_j = 0$, takže touto úpravou se pravá strana nezmění).

Je-li $\overline{a}_{js} = 0$ pro všechna s, obsahuje celý j-tý řádek bloku $\overline{A}$ tabulky (T_1) nuly. V tom případě ponecháme umělou proměnnou v bázi (tato situace indikuje, že soustava $Ax = b$ má lineárně závislé řádky).

(Pokračování)

V tabulce (T_1) dosadíme nyní vektor c^T účelové funkce původní úlohy pod blok $\overline{A}$ a nuly do zbytku posledního řádku

B	$\overline{A}$	$\overline{I}$	$\overline{b}$
	c^T	0^T	0

a eliminací vynulujeme prvky pod bázickými sloupci

B	$\overline{A}$	$\overline{I}$	$\overline{b}$
	$\overline{c}^T$	$\overline{d}^T$	$-\overline{h}$

(Pokračování)

Tím jsme vytvořili simplexovou tabulku pro fázi II a dále pokračujeme simplexovým algoritmem s tím, že za kriteriální řádek považujeme pouze blok $\overline{c}^T$ (blok $\overline{d}^T$ při výběru pivota nebereme v úvahu). Po konečně mnoha krocích buď ověříme neomezenost účelové funkce, nebo dojdeme k tabulce

B	$\overline{A}$	$\overline{I}$	$\overline{b}$
	$\overline{c}^T \geq 0^T$	$-y^{*T}$	$-\overline{h}$

která dává optimální řešení původní úlohy. Vektor y^* je tzv. duální optimální řešení (viz str. 404).

Tři možnosti ukončení

Věta 129. *Pro každou úlohu (P) nastává právě jedna ze tří možností:*

(i) úloha nemá přípustné řešení,
(ii) úloha má optimální řešení,
(iii) účelová funkce je na množině přípustných řešení neomezená zdola.

Důkaz. Fáze I i II jsou podle věty 128 konečné a proto po konečném počtu kroků dojde k jednomu ze tří možných zastavení. □

Množina optimálních řešení

Věta 130. *Nechť v simplexové tabulce (T) je nalezeno optimální řešení (tj. $\overline{c} \geq 0$). Potom množina všech optimálních řešení je popsaná soustavou*

$$\begin{aligned} \overline{A}x^* &= \overline{b} \\ \overline{c}^T x^* &= 0 \\ x^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Důkaz. Je-li x^* optimální řešení, potom je přípustné, tedy z $Ax^* = b$ plyne $\overline{A}x^* = A_B^{-1}Ax^* = A_B^{-1}b = \overline{b}$, a $\overline{c}^T x^* = (c^T - c_B^T A_B^{-1} A)x^* = c^T x^* - c_B^T A_B^{-1} b = c^T x^* - c_B^T x_B^B = c^T x^* - c^T x^B = 0$. Naopak, z $\overline{A}x^* = \overline{b}$ plyne $Ax^* = b$, tedy x^* je přípustné, a $0 = \overline{c}^T x^* = c^T x^* - c_B^T x_B^B = c^T x^* - c^T x^B$, takže $c^T x^* = c^T x^B$, kde x^B je optimální řešení, a proto i x^* je optimální řešení. $\square$

Parametrický popis množiny optimálních řešení

Protože $\bar{c} \geq 0$ a $x^* \geq 0$, vyplývá z $\bar{c}^T x^* = \sum_j \bar{c}_j x_j^* = 0$, že $x_j^* = 0$ pro $\bar{c}_j > 0$. Položíme-li $J = \{j\,;\, j \notin B, \bar{c}_j = 0\}$, dostáváme tak z předchozí věty parametrický popis množiny optimálních řešení:

$$\begin{aligned} x_{B_i}^* &= \bar{b}_i - \sum_{j \in J} \bar{a}_{ij} x_j^* && (i = 1, \ldots, m), \\ x_j^* &\geq 0 && (j \in J), \\ x_j^* &= 0 && (\bar{c}_j > 0). \end{aligned}$$

Proměnné x_j^*, $j \in J$, zde vystupují v roli parametrů a musí splňovat

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \bar{a}_{ij} x_j^* &\leq \bar{b}_i && (i = 1, \ldots, m), \\ x_j^* &\geq 0 && (j \in J). \end{aligned}$$

Jednoznačnost optimálního řešení

Věta 131. *Je-li v poslední simplexové tabulce*

$$\bar{c}_j > 0 \text{ pro každé } j \notin B,$$

potom x^B je jediným optimálním řešením úlohy (P).

Důkaz. Podle věty 130 každé optimální řešení x^* splňuje $\bar{c}^T x^* = \sum_j \bar{c}_j x_j^* = 0$, kde $\bar{c}_j \geq 0$ a $x_j^* \geq 0$ pro každé j, tedy $\bar{c}_j x_j^* = 0$ pro všechna j. Z předpokladu potom plyne, že $x_j^* = 0$ pro každé $j \notin B$. To znamená, že $Ax^* = A_B x_B^* = b$, tedy $x_B^* = A_B^{-1} b = \bar{b}$ a $x_j^* = 0$ pro každé $j \notin B$, takže podle věty 124 je $x^* = x^B$ a optimální řešení je jediné. □

Ukázka výpočtu v MATLABu: příklad

```
A =

     1     2     3     4
     5     6     7     8

b =

     3     7

c =

     1     1     1    -5

[x,y,flag]=simplex(A,b,c)
```

Tabulka na začátku fáze I

```
AS=

5     1     2     3     4     1     0     3
6     5     6     7     8     0     1     7
0     0     0     0     0     1     1     0


AS =

5     1     2     3     4     1     0     3
6     5     6     7     8     0     1     7
0    -6    -8   -10   -12     0     0   -10
```

Fáze I

```
AS =

5        0    0.8000    1.6000    2.4000    1.0000   -0.2000    1.6000
1   1.0000    1.2000    1.4000    1.6000         0    0.2000    1.4000
0        0   -0.8000   -1.6000   -2.4000         0    1.2000   -1.6000


AS =

5  -0.6667         0    0.6667    1.3333    1.0000   -0.3333    0.6667
2   0.8333    1.0000    1.1667    1.3333         0    0.1667    1.1667
0   0.6667         0   -0.6667   -1.3333         0    1.3333   -0.6667
```

Konec fáze I

```
AS =

5   -1.1429   -0.5714         0    0.5714    1.0000   -0.4286         0
3    0.7143    0.8571    1.0000    1.1429         0    0.1429    1.0000
0    1.1429    0.5714         0   -0.5714         0    1.4286         0


AS =

4   -2.0000   -1.0000         0    1.0000    1.7500   -0.7500         0
3    3.0000    2.0000    1.0000         0   -2.0000    1.0000    1.0000
0         0         0         0         0    1.0000    1.0000         0
```

Tabulka na začátku fáze II

```
AS =

4   -2.0000   -1.0000         0    1.0000    1.7500   -0.7500         0
3    3.0000    2.0000    1.0000         0   -2.0000    1.0000    1.0000
0         1         1         1        -5         0         0         0

AS =

4   -2.0000   -1.0000         0    1.0000    1.7500   -0.7500         0
3    3.0000    2.0000    1.0000         0   -2.0000    1.0000    1.0000
0  -12.0000   -6.0000         0         0   10.7500   -4.7500   -1.0000
```

Konec fáze II

```
AS =

4    0.0000    0.3333    0.6667    1.0000    0.4167   -0.0833    0.6667
1    1.0000    0.6667    0.3333         0   -0.6667    0.3333    0.3333
0    0.0000    2.0000    4.0000         0    2.7500   -0.7500    3.0000

x =
     0.3333         0         0    0.6667

y =
    -2.7500    0.7500

flag =
unique optimal solution
```

Ukázka zacyklení I: výpočet podle Blandova pravidla

Při počáteční simplexové tabulce

1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.6	−6.4	4.8	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.2	−1.8	0.6	0.0
3	0.0	0.0	1.0	0.0	0.4	−1.6	0.2	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	−0.4	−0.4	1.8	0.0

postupuje simplexový algoritmus v následujících krocích:

5	1.7	0.0	0.0	0.0	1.0	−10.7	8.0	0.0
2	−0.3	1.0	0.0	0.0	0.0	0.3	−1.0	0.0
3	−0.7	0.0	1.0	0.0	0.0	2.7	−3.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.7	0.0	0.0	0.0	0.0	−4.7	5.0	0.0

(Pokračování)

5	−9.0	32.0	0.0	0.0	1.0	0.0	−24.0	0.0
6	−1.0	3.0	0.0	0.0	0.0	1.0	−3.0	0.0
3	2.0	−8.0	1.0	0.0	0.0	0.0	5.0	0.0
4	1.0	−3.0	0.0	1.0	0.0	0.0	3.0	1.0
	−4.0	14.0	0.0	0.0	0.0	0.0	−9.0	0.0

5	0.0	−4.0	4.5	0.0	1.0	0.0	−1.5	0.0
6	0.0	−1.0	0.5	0.0	0.0	1.0	−0.5	0.0
1	1.0	−4.0	0.5	0.0	0.0	0.0	2.5	0.0
4	0.0	1.0	−0.5	1.0	0.0	0.0	0.5	1.0
	0.0	−2.0	2.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0

(Pokračování)

5	0.0	0.0	2.5	4.0	1.0	0.0	0.5	4.0
6	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
1	1.0	0.0	−1.5	4.0	0.0	0.0	4.5	4.0
2	0.0	1.0	−0.5	1.0	0.0	0.0	0.5	1.0
	0.0	0.0	1.0	2.0	0.0	0.0	2.0	2.0

Výsledná tabulka dává optimální řešení

$$x^* = (4.0, 1.0, 0, 0, 4.0, 1.0, 0)^T.$$

Ukázka zacyklení II: modifikace Blandova pravidla

Modifikované pravidlo:

$$s = \min\{k\,;\ \overline{c}_k = \min_j \overline{c}_j\},$$

$$r = \min\left\{k\,;\ \frac{\overline{b}_k}{\overline{a}_{ks}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{js}}\,;\ \overline{a}_{js} > 0\right\},\ \overline{a}_{ks} > 0\right\}.$$

1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.6	−6.4	4.8	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.2	−1.8	0.6	0.0
3	0.0	0.0	1.0	0.0	0.4	−1.6	0.2	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	−0.4	−0.4	1.8	0.0

(Pokračování)

5	1.7	0.0	0.0	0.0	1.0	−10.7	8.0	0.0
2	−0.3	1.0	0.0	0.0	0.0	0.3	−1.0	0.0
3	−0.7	0.0	1.0	0.0	0.0	2.7	−3.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.7	0.0	0.0	0.0	0.0	−4.7	5.0	0.0

5	−9.0	32.0	0.0	0.0	1.0	0.0	−24.0	0.0
6	−1.0	3.0	0.0	0.0	0.0	1.0	−3.0	0.0
3	2.0	−8.0	1.0	0.0	0.0	0.0	5.0	0.0
4	1.0	−3.0	0.0	1.0	0.0	0.0	3.0	1.0
	−4.0	14.0	0.0	0.0	0.0	0.0	−9.0	0.0

(Pokračování)

5	0.6	−6.4	4.8	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
6	0.2	−1.8	0.6	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
7	0.4	−1.6	0.2	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
4	−0.2	1.8	−0.6	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0
	−0.4	−0.4	1.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

1	1.0	−10.7	8.0	0.0	1.7	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.3	−1.0	0.0	−0.3	1.0	0.0	0.0
7	0.0	2.7	−3.0	0.0	−0.7	0.0	1.0	0.0
4	0.0	−0.3	1.0	1.0	0.3	0.0	0.0	1.0
	0.0	−4.7	5.0	0.0	0.7	0.0	0.0	0.0

(Pokračování)

1	1.0	0.0	−24.0	0.0	−9.0	32.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	−3.0	0.0	−1.0	3.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	5.0	0.0	2.0	−8.0	1.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.0	0.0	−9.0	0.0	−4.0	14.0	0.0	0.0

1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.6	−6.4	4.8	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.2	−1.8	0.6	0.0
3	0.0	0.0	1.0	0.0	0.4	−1.6	0.2	0.0
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	−0.4	−0.4	1.8	0.0

Zacyklení: poslední tabulka identická s první. Tento příklad ukazuje význam Blandova pravidla (61), (62) pro zaručení konečnosti simplexového algoritmu.

Dodatek: Vlastnosti bázických řešení

Věta 132. *Nechť řádky matice A jsou lineárně nezávislé. Potom pro dané přípustné řešení x jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) x je bázické (tj. $x = x^B$ pro jisté B),
(ii) množina $\{A_{\bullet j}\,;\, x_j > 0\}$ je lineárně nezávislá,
(iii) x je vrcholem množiny přípustných řešení.

Poznámka. Bod $x \in X$ se nazývá vrcholem množiny X jestliže neexistují $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$ tak, že $x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$ (tj. x není středem žádné úsečky s koncovými body v X). Vlastnost (ii) je v mnohých učebnicích alternativně používána k definici bázického řešení. Tvrzení (iii) říká, že bázická řešení jsou právě všechny vrcholy množiny přípustných řešení (ve smyslu vrcholů konvexního polyedru). Simplexový algoritmus lze tedy geometricky interpretovat tak, že postupuje po vrcholech množiny přípustných řešení a v každém kroku přechází k jednomu ze sousedních vrcholů s menší nebo stejnou hodnotou účelové funkce.

Důkaz

Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(ii)⇒(i). Položme $J = \{j;\ x_j > 0\}$.

(i)⇒(ii): Pro přípustné řešení x tvaru x^B je podle věty 124 $\{A_{\bullet j}\,;\ j \in J\} \subseteq \{A_{\bullet B_1}, \ldots, A_{\bullet B_m}\}$, přičemž $\{A_{\bullet B_1}, \ldots, A_{\bullet B_m}\}$, jakožto množina sloupců regulární matice A_B, je lineárně nezávislá, tedy i $\{A_{\bullet j}\,;\ j \in J\}$ je lineárně nezávislá.

(ii)⇒(iii): Předpokládejme sporem, že existují přípustná řešení x^1, x^2, $x^1 \neq x^2$, pro která $x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$. Potom pro každé j takové, že $x^1_j > 0$ nebo $x^2_j > 0$, je $x_j > 0$, tj. $j \in J$, takže

$$\sum_{j \in J} A_{\bullet j} x^1_j = Ax^1 = b = Ax^2 = \sum_{j \in J} A_{\bullet j} x^2_j,$$

což implikuje

$$\sum_{j \in J} A_{\bullet j}(x^1_j - x^2_j) = 0$$

(Pokračování důkazu)

kde $x_j^1 \neq x_j^2$ pro jisté $j \in J$, tedy množina $\{A_{\bullet j}\,;\, j \in J\}$ je lineárně závislá, což je spor.

(iii)⇒(ii): Sporem: předpokládejme, že množina $\{A_{\bullet j}\,;\, j \in J\}$ je lineárně závislá, takže existují z_j, $j \in J$ tak, že $\sum_{j \in J} A_{\bullet j} z_j = 0$, přičemž $z_j \neq 0$ pro jisté $j \in J$. Protože $x_j > 0$ pro každé $j \in J$, existuje dostatečně malé α s vlastností $x_j - \alpha z_j > 0$, $x_j + \alpha z_j > 0$ pro každé $j \in J$. Dodefinujme $z_j = 0$ pro $j \notin J$, potom $Az = 0$ a $z \neq 0$, a položme $x^1 = x - \alpha z$, $x^2 = x + \alpha z$. Potom je $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$, $Ax^1 = Ax^2 = b$, takže x^1 a x^2 jsou přípustná řešení taková, že $x^1 \neq x^2$ a $x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$, tj. x není vrcholem množiny přípustných řešení, což je spor.

(ii)⇒(i): Jelikož A má řádkovou hodnost m, má i sloupcovou hodnost m, proto existuje m-prvková množina B taková, že $J \subseteq B$ a $\{A_{\bullet j}\,;\, j \in B\}$ je lineárně nezávislá. Potom A_B je regulární a pro $x_j > 0$ je $j \in B$, tedy x splňuje $A_B x_B = b$, tj. $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$ a $x_j = 0$ pro $j \notin B$, takže tabulka s bází B je simplexová a podle věty 124 platí $x = x^B$. $\square$

Primární a duální úloha

K úloze

$$\min\{c^T x\,;\ Ax = b,\ x \geq 0\}, \tag{P}$$

kterou dále budeme nazývat primární, uvažujme tzv. duální úlohu

$$\max\{b^T y\,;\ A^T y \leq c\}. \tag{D}$$

Povšimněte si, že se nepožaduje nezápornost duální proměnné y. Vektor y splňující $A^T y \leq c$ se nazývá přípustným řešením (D); optimální řešení se definuje analogicky jako u primární úlohy. Pro úlohu (D) opět nastává právě jedna ze tří možností ukončení uvedených ve větě 129 (nepřípustnost, existence optimálního řešení, neomezenost).

Slabá věta o dualitě

Věta 133. *Jsou-li x, y libovolná přípustná řešení (P), (D), potom platí*

$$c^T x \geq b^T y.$$

Navíc, platí-li pro jistou dvojici přípustných řešení

$$c^T x^* = b^T y^*,$$

potom x^* je optimální řešení (P) a y^* je optimální řešení (D).

Důkaz. Vzhledem k nezápornosti vektoru x platí

$$c^T x = x^T c \geq x^T A^T y = (Ax)^T y = b^T y.$$

Je-li $c^T x^* = b^T y^*$, potom pro každé přípustné řešení x je podle právě dokázané nerovnosti $c^T x \geq b^T y^* = c^T x^*$, tedy x^* je optimální řešení (P), a analogicky pro každé přípustné řešení y je $b^T y^* = c^T x^* \geq b^T y$, tedy y^* je optimální řešení (D). □

Výpočet duálního optimálního řešení

Věta 134. *Je-li x^B bázické optimální řešení úlohy (P) nalezené v posledním kroku simplexového algoritmu, potom vektor*

$$y^* = (A_B^T)^{-1} c_B$$

je optimálním řešením úlohy (D) a platí

$$c^T x^B = b^T y^*.$$

Poznámka. Jak je vidět, y^* je řešením soustavy

$$A_B^T y^* = c_B$$

a dá se vyčíst z poslední simplexové tabulky, viz str. 381 (pozor, je tam se znamením minus).

Důkaz

V poslední tabulce je $\overline{c}^T := c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0^T$, tedy

$$c^T - ((A_B^T)^{-1} c_B)^T A = c^T - y^{*T} A \geq 0^T,$$

tj. $A^T y^* \leq c$, takže y^* je přípustné řešení (D). Dále $c^T x^B = c_B^T x_B^B = c_B^T A_B^{-1} b = ((A_B^T)^{-1} c_B)^T b = y^{*T} b = b^T y^*$ a podle druhé části věty 133 je y^* optimální řešení (D) a $c^T x^B = b^T y^*$. $\square$

Věta o dualitě

Věta 135. *Pro dvojici úloh (P), (D) jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) (P) má optimální řešení,
(ii) (D) má optimální řešení,
(iii) obě úlohy (P), (D) jsou přípustné.

Platí-li libovolné z těchto tvrzení, potom obě úlohy mají stejnou optimální hodnotu.

Poznámka. Věta o dualitě je považovaná za nejdůležitější teoretický výsledek lineárního programování. V některých učebnicích se za větu o dualitě označuje pouze ekvivalence „(i)$\Leftrightarrow$(ii)“, případně implikace „(iii)$\Rightarrow$(i)$\wedge$(ii)“.

Důkaz

Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

(i)⇒(ii): Má-li (P) optimální řešení, potom podle věty 128 simplexová metoda po konečně mnoha krocích najde tabulku s optimálním řešením (P), z ní lze podle věty 134 zkonstruovat optimální řešení (D) a podle téže věty se optimální hodnoty rovnají.

(ii)⇒(iii): Nechť (D) má optimální řešení y^*. Uvažujme pomocnou úlohu lineárního programování

$$\min\left\{\begin{pmatrix}-b\\ b\\ 0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix};\ (-A^T, A^T, -I)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = -c,\ \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} \geq 0\right\}. \quad (64)$$

(Pokračování důkazu)

Ukážeme, že tato úloha má optimální řešení. Zvolme $y_1' \geq 0$, $y_2' \geq 0$ tak, aby $y^* = y_1' - y_2'$ (to lze) a položme $y_3' = c - A^T y^*$. Potom $y_3' \geq 0$ a platí

$$-A^T y_1' + A^T y_2' - y_3' = -A^T y^* - y_3' = -c,$$

což znamená, že úloha (64) je přípustná. Dále, je-li y_1, y_2, y_3 libovolné přípustné řešení (64), potom z

$$-A^T y_1 + A^T y_2 - y_3 = -c$$

plyne

$$A^T (y_1 - y_2) \leq c,$$

tedy $y_1 - y_2$ je přípustné řešení (D) a proto platí $b^T (y_1 - y_2) \leq b^T y^*$, takže

$$-b^T y_1 + b^T y_2 + 0^T y_3 = -b^T (y_1 - y_2) \geq -b^T y^*.$$

(Pokračování důkazu)

Tedy úloha (64), která je v primárním tvaru, je přípustná a její účelová funkce je omezená zdola, takže podle věty 129 má optimální řešení, proto podle důkazu části „(i)⇒(ii)" má optimální řešení i k ní duální úloha

$$\max\left\{-c^T x;\ \begin{pmatrix} -A \\ A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

kterou lze psát ve tvaru

$$\max\left\{-c^T x;\ Ax = b, x \geq 0\right\},$$

a tedy má optimální (tj. přípustné) řešení i úloha

$$\min\left\{c^T x;\ Ax = b, x \geq 0\right\},$$

což je (P).

(Pokračování důkazu)

(iii)⇒(i): Je-li (P) přípustná a má-li (D) přípustné řešení y_0, potom podle věty 133 pro libovolné přípustné řešení x úlohy (P) platí

$$c^T x \geq b^T y_0,$$

takže její účelová funkce je zdola omezená a podle věty 129 má (P) optimální řešení. $\square$

Podmínky optimality

Věta 136. *Nechť x, y jsou přípustná řešení úloh (P), (D). Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) x, y *jsou optimální řešení (P), (D),*
(ii) $x^T(c - A^T y) = 0$,
(iii) $(\forall j)(x_j > 0 \Rightarrow (A^T y)_j = c_j)$,
(iv) $(\forall j)((A^T y)_j < c_j \Rightarrow x_j = 0)$.

Poznámka. Hlavním obsahem věty je ekvivalence (i)⇔(ii); (iii) a (iv) jsou složkovým přepisem (ii).

Důkaz

Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i).

(i)⇒(ii): Jsou-li x, y optimální řešení, potom podle věty o dualitě $c^T x = b^T y$ a podle slabé věty o dualitě (věta 133) je $c^T x \geq (Ax)^T y = b^T y = c^T x$, tedy $x^T c = x^T A^T y$ a $x^T (c - A^T y) = 0$.

(ii)⇒(iii): Protože $x^T (c - A^T y) = \sum_j x_j (c - A^T y)_j = 0$, přičemž $x_j \geq 0$ a $(c - A^T y)_j \geq 0$ pro všechna j, znamená to, že pro každé j je $x_j (c - A^T y)_j = 0$ a tedy $x_j > 0$ implikuje $(A^T y)_j = c_j$.

(iii)⇒(iv): Tvrzení (iv) vznikne obrácením implikace (iii) s přihlédnutím k tomu, že x, y splňují $x \geq 0$, $A^T y \leq c$.

(iv)⇒(i): Platí-li (iv), potom $x^T (c - A^T y) = \sum_j x_j (c_j - (A^T y)_j) = 0$ a odtud $c^T x = x^T A^T y = (Ax)^T y = b^T y$, takže podle slabé věty o dualitě jsou x, y optimální řešení (P), (D). □

Farkasova věta

Věta 137. (Farkas 1902) *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *a* $b \in \mathbb{R}^m$. *Potom soustava*

$$\begin{aligned} Ax &= b, \qquad (65)\\ x &\geq 0 \qquad (66)\end{aligned}$$

má řešení právě když platí

$$(\forall y)(A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0). \qquad (67)$$

Důsledek. $Ax = b$, $x \geq 0$ *nemá řešení právě když existuje* y_0 *tak, že* $A^T y_0 \geq 0$ *a* $b^T y_0 < 0$.

Poznámka. Farkasova věta dává teoretickou podmínku nezáporné řešitelnosti; pro praktické účely se používá fáze I simplexového algoritmu.

Důkaz

Uvažujme úlohu

$$\min\left\{0^T x;\, Ax = b, x \geq 0\right\} \tag{68}$$

a k ní duální úlohu

$$\max\left\{b^T y;\, A^T y \leq 0\right\}. \tag{69}$$

Jestliže soustava (65), (66) má řešení x, potom pro každé y splňující $A^T y \geq 0$ je $A^T(-y) \leq 0$, tedy $-y$ je přípustné řešení (69) a podle slabé věty o dualitě je $0 = 0^T x \geq b^T(-y) = -b^T y$, takže $b^T y \geq 0$. Naopak, nechť platí (67). Potom (69) je přípustná, protože $y = 0$ je přípustné. Dále, její účelová funkce je omezená: je-li $A^T y \leq 0$, potom $A^T(-y) \geq 0$, z čehož podle (67) plyne $b^T(-y) \geq 0$ a $b^T y \leq 0$, tedy (69) má podle věty 129 optimální řešení, a podle věty o dualitě má i (68) optimální řešení, které splňuje $Ax = b$, $x \geq 0$. $\square$

Charakteristika neomezenosti

Věta 138. *Nechť (P) je přípustná. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) (P) je neomezená,

(ii) (D) je nepřípustná,

(iii) existuje vektor z pro který platí $Az = 0$, $z \geq 0$ a $c^T z < 0$.

Poznámka. Vektor z s vlastností (iii) lze vyčíst ze simplexové tabulky, viz důkaz věty 126.

Důkaz

Dokážeme (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

(i)⇒(ii): Jestliže (P) je neomezená, potom (D) nemůže být přípustná (kdyby byla přípustná, potom podle věty o dualitě, implikace „(iii)⇒(i)" by (P) měla optimální řešení, což je spor).

(ii)⇒(iii): Je-li (D) je nepřípustná, potom soustava

$$A^T y_1 - A^T y_2 + y_3 = c,$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

nemá řešení (jinak by platilo $A^T(y_1 - y_2) \leq c$ a $y_1 - y_2$ by bylo přípustným řešením (D)), což podle důsledku Farkasovy věty implikuje existenci vektoru z takového, že $Az \geq 0$, $-Az \geq 0$, $z \geq 0$ a $c^T z < 0$, tj. $Az = 0$, $z \geq 0$ a $c^T z < 0$.

(Pokračování důkazu)

(iii)$\Rightarrow$(i): Je-li x libovolné přípustné řešení (P), potom pro každé $\alpha \geq 0$ je $x + \alpha z \geq 0$ a $A(x + \alpha z) = Ax + \alpha Az = Ax = b$, tedy $x + \alpha z$ je přípustné řešení (P) a platí

$$\lim_{\alpha \to \infty} c^T(x + \alpha z) = \lim_{\alpha \to \infty} (c^T x + \alpha c^T z) = -\infty,$$

tj. (P) je neomezená. $\square$

Úlohy s nerovnostmi

Uvažujme nyní úlohu v primárním tvaru s omezením ve tvaru nerovnosti:

$$\min\{c^T x\,;\, Ax \geq b, x \geq 0\}. \tag{P'}$$

Tuto úlohu lze převést na primární úlohu s omezením ve tvaru rovnosti

$$\min\{c^T x + 0^T x'\,;\, Ax - x' = b, x \geq 0, x' \geq 0\}, \tag{70}$$

která je zřejmě nepřípustná (neomezená, má optimální řešení) právě když (P') má stejnou vlastnost; navíc v posledním případě mají úlohy (P'), (70) stejnou optimální hodnotu. Na úlohu (70), která je v primárním tvaru, můžeme tedy aplikovat předchozí teorii. Duální úloha k (70), a tedy i k (P'), je

$$\max\{b^T y\,;\, A^T y \leq c, y \geq 0\}. \tag{D'}$$

(Slabá) věta o dualitě pro úlohy s nerovnostmi

Věta 139. *Slabá věta o dualitě (věta 133) a věta o dualitě (věta 135) platí ve stejném znění i pro úlohy (P'), (D').*

Důkaz. Tvrzení plyne z vět 133 a 135, aplikovaných na dvojici (70), (D'), a z výšeuvedené korespondence mezi úlohami (P') a (70). □

Podmínky optimality pro úlohy s nerovnostmi

Věta 140. *Přípustná řešení x, y úloh (P'), (D') jsou jejich optimální řešení právě když platí*

$$\begin{aligned} x^T(c - A^T y) &= 0, \\ y^T(Ax - b) &= 0. \end{aligned}$$

Poznámka. Podmínky lze ekvivalentně přepsat ve složkovém tvaru

$$\begin{aligned} (\forall j)(x_j > 0 &\Rightarrow (A^T y)_j = c_j), \\ (\forall i)(y_i > 0 &\Rightarrow (Ax)_i = b_i). \end{aligned}$$

Důkaz

x, y jsou optimální řešení (P'), (D') právě když $x, x' = Ax - b$ a y jsou optimální řešení (70), (D'), což je podle věty 136 ekvivalentní podmínce

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c - A^T y \\ y \end{pmatrix} = 0$$

resp.

$$x^T(c - A^T y) = 0,$$

$$x'^T y = y^T(Ax - b) = 0. \qquad \square$$

Dodatek

Analogickým postupem můžeme dokázat, že Farkasova podmínka pro soustavu

$$\begin{aligned} Ax &\le b, \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

má tvar

$$(\forall y \ge 0)(A^T y \ge 0 \Rightarrow b^T y \ge 0)$$

a že charakteristika neomezenosti (věta 138) platí i pro úlohy (P'), (D') jestliže v tvrzení (iii) zaměníme „$Az = 0$" na „$Az \ge 0$".

Teorie her: základní pojmy

V konečné maticové hře hrají proti sobě hráči 1 a 2, kteří mají k dispozici m resp. n tzv. čistých strategií. Volí-li hráč 1 čistou strategii $i \in \{1, \dots, m\}$ a hráč 2 čistou strategii $j \in \{1, \dots, n\}$, je výsledek jednoznačně určen a hráč 2 vyplácí hráči 1 částku a_{ij} (v případě $a_{ij} < 0$ to znamená, že hráč 1 vyplácí hráči 2 částku $|a_{ij}|$). Hra je tedy úplně určena tzv. výplatní maticí $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$.

Nechť x_i je pravděpodobnost použití čisté strategie i hráčem 1 ($i = 1, \dots, m$). Potom vektor $x = (x_i) \in R^m$ splňuje $e^T x = 1$, $x \geq 0$ (kde $e = (1, \dots, 1)^T$) a nazývá se smíšenou strategií hráče 1, podobně vektor $y = (y_j) \in R^n$ splňující $e^T y = 1$, $y \geq 0$ se nazývá smíšenou strategií hráče 2 a složku y_j interpretujeme jako pravděpodobnost použití čisté strategie j hráčem 2.

(Pokračování)

Nechť se hraje N her, kde N je velké číslo, a oba hráči se přidržují smíšených strategií x, y. Potom pravděpodobnost střetu i-té čisté strategie hráče 1 a j-té čisté strategie hráče 2 je $x_i y_j$, očekávaný zisk hráče 1 je $a_{ij} x_i y_j N$, v sumě přes všechny možné dvojice smíšených strategií $\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j N = (x^T A y) N$, průměrný očekávaný zisk hráče 1 na jednu hru je tedy $x^T A y$. Z toho vyplývá snaha hráče 1 maximalizovat $x^T A y$, kdežto snahou hráče 2 je tuto hodnotu minimalizovat. To vede k této úvaze: předpokládejme, že existují smíšené strategie x^*, y^* hráčů 1, 2 s vlastností

$$x^T A y^* \leq x^{*T} A y^* \leq x^{*T} A y \tag{71}$$

pro libovolné smíšené strategie x, y. Z levé nerovnosti je zřejmé, že použije-li hráč 2 smíšenou strategii y^*, potom hráč 1 nemůže dosáhnout většího zisku než $x^{*T} A y^*$, naopak z pravé nerovnosti plyne, že při volbě smíšené strategie x^* hráčem 1 nemůže hráč 2 žádnou smíšenou strategií

(Pokračování)

snížit jeho zisk pod hodnotu ${x^*}^T A y^*$. Předpokládá-li každý z obou hráčů, že jeho soupeř hraje jak nejlépe je možné, je výsledná hodnota ${x^*}^T A y^*$ přijatelná pro obě strany, protože každý z hráčů ví, že při správné hře soupeře nemůže získat více. Proto se x^*, y^* (pakliže existují) nazývají optimálními smíšenými strategiemi a číslo ${x^*}^T A y^*$ se nazývá cenou hry.

Poznámka. Definice (71) vypadá uměle a existence optimálních smíšených strategií je na první pohled nepravděpodobná. O to více překvapuje, že optimální smíšené strategie vždy existují (viz dále).

Cena hry

Především ukážeme, že cena hry nezávisí na volbě optimálních smíšených strategií:

Tvrzení 2 *Jsou-li* x^*, y^* *a* $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ *optimální smíšené strategie, potom*

$$x^{*T}Ay^* = \tilde{x}^T A\tilde{y}.$$

Důkaz. Z definice plyne, že platí (71) a

$$x^T A\tilde{y} \leq \tilde{x}^T A\tilde{y} \leq \tilde{x}^T Ay \tag{72}$$

pro každé smíšené strategie x, y. Dosazením $x := x^*$, $y := y^*$ do (72) a $x := \tilde{x}$, $y := \tilde{y}$ do (71) dostáváme

$$x^{*T}A\tilde{y} \leq \tilde{x}^T A\tilde{y} \leq \tilde{x}^T Ay^* \leq x^{*T}Ay^* \leq x^{*T}A\tilde{y},$$

z čehož plyne že všude platí rovnost a tedy $x^{*T}Ay^* = \tilde{x}^T A\tilde{y}$. □

Existence a výpočet optimálních smíšených strategií

Věta 141. *Pro danou hru zadanou výplatní maticí A nechť $\overline{A} = A + \alpha e e^T$, kde $\alpha = 1 - \min_{ij} a_{ij}$. Potom dvojice duálních úloh lineárního programování*

$$\min\{e^T x\,;\ \overline{A}^T x \geq e,\ x \geq 0\} \tag{P'}$$

$$\max\{e^T y\,;\ \overline{A} y \leq e,\ y \geq 0\} \tag{D'}$$

má optimální řešení. Jsou-li x_0, y_0 libovolná optimální řešení (P'), (D'), potom

$$x^* = \frac{x_0}{e^T x_0},\ y^* = \frac{y_0}{e^T y_0} \tag{73}$$

jsou optimální smíšené strategie obou hráčů, $\omega = x^{*T} A y^*$ je cena hry a pro množiny optimálních smíšených strategií obou hráčů platí

$$\begin{aligned} X_{\text{opt}} &= \{x\,;\ A^T x \geq \omega e,\ e^T x = 1,\ x \geq 0\}, \\ Y_{\text{opt}} &= \{y\,;\ \ A y \leq \omega e,\ e^T y = 1,\ y \geq 0\}. \end{aligned}$$

Důkaz

Z $\alpha = 1 - \min_{ij} a_{ij}$ plyne $a_{ij} + \alpha \geq \min_{ij} a_{ij} + \alpha = 1$ pro každé i, j, tedy $\overline{A} = A + \alpha e e^T > 0$. Úloha (D') je přípustná ($y = 0$ je přípustné) a pro každé její přípustné řešení y a pro každé j platí $\overline{a}_{1j} y_j \leq (\overline{A} y)_1 \leq 1$, tedy $0 \leq y_j \leq \frac{1}{\overline{a}_{1j}}$, z čehož plyne, že množina přípustných řešení (D') je omezená, proto (D') má podle věty 129 optimální řešení a podle věty 139 má i (P') optimální řešení.

Nechť x_0, y_0 jsou optimální řešení (P'), (D'). Potom podle věty o dualitě je $e^T x_0 = e^T y_0$ a z $\overline{A}^T x_0 \geq e$ plyne $x_0 \neq 0$, tedy $e^T x_0 > 0$, tudíž vektory x^*, y^* definované vztahy (73) jsou nezáporné a platí $e^T x^* = \frac{e^T x_0}{e^T x_0} = 1 = e^T y^*$, tedy jsou to smíšené strategie.

Nechť x, y jsou libovolné smíšené strategie. Potom z $\overline{A} y_0 \leq e$ plyne $x^T \overline{A} y_0 \leq e^T x = 1$, tedy $x^T \overline{A} y^* \leq \frac{1}{e^T y_0}$ a analogicky z $\overline{A}^T x_0 \geq e$ plyne

(Pokračování důkazu)

$y^T \overline{A}^T x_0 \geq e^T y = 1$, tj. $x_0^T \overline{A} y \geq 1$ a $x^{*T} \overline{A} y \geq \frac{1}{e^T x_0}$, celkem

$$x^T \overline{A} y^* \leq \frac{1}{e^T y_0} = \frac{1}{e^T x_0} \leq x^{*T} \overline{A} y. \qquad (74)$$

Avšak $x^T \overline{A} y^* = x^T (A + \alpha e e^T) y^* = x^T A y^* + \alpha (x^T e)(e^T y^*) = x^T A y^* + \alpha$, analogicky $x^{*T} \overline{A} y = x^{*T} A y + \alpha$, díky čemuž můžeme od matice $\overline{A}$ přejít k původní matici A a z (74) tak dostáváme

$$x^T A y^* \leq x^{*T} A y$$

pro každou dvojici smíšených strategií x, y. Nyní, dosazením za prvé $y := y^*$, za druhé $x := x^*$ dostáváme odtud

$$x^T A y^* \leq x^{*T} A y^* \leq x^{*T} A y,$$

tedy podle definice jsou x^*, y^* optimální smíšené strategie obou hráčů a $\omega = x^{*T} A y^*$ je cena hry.

(Pokračování důkazu)

Je-li $\tilde{y}$ libovolná optimální smíšená strategie hráče 2, potom z $x^T A\tilde{y} \le \omega$ plyne pro $x = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T = e_i$, že $(A\tilde{y})_i \le \omega$ pro každé i, tedy $A\tilde{y} \le \omega e$, a ovšem $e^T\tilde{y} = 1$, $\tilde{y} \ge 0$, tedy $\tilde{y} \in Y_{\text{opt}}$. Naopak, nechť $\tilde{y} \in Y_{\text{opt}}$. Potom z $A\tilde{y} \le \omega e$ plyne pro každou smíšenou strategii x, že $x^T A\tilde{y} \le \omega(x^T e) = \omega$, tedy

$$x^T A\tilde{y} \le \omega \le x^{*T} Ay,$$

a pro $x := x^*$, $y := \tilde{y}$ dostáváme odsud $\omega = x^* A\tilde{y}$, což znamená, že platí

$$x^T A\tilde{y} \le x^{*T} A\tilde{y} \le x^{*T} Ay$$

pro každé smíšené strategie x, y obou hráčů a podle definice jsou x^*, $\tilde{y}$ optimální smíšené strategie, tedy $\tilde{y}$ je optimální smíšená strategie hráče 2. Tím jsme dokázali, že Y_{opt} je množina všech optimálních smíšených strategií hráče 2, podobně X_{opt} pro hráče 1. $\square$

Optimální smíšené strategie vždy existují

Věta 142. (von Neumann) *Každá konečná maticová hra má optimální smíšené strategie obou hráčů.*

Důkaz. Plyne přímo z předchozí věty. $\square$

Poznámka. J. von Neumann dokázal tento výsledek nekonstruktivně r. 1929 (údajně inspirován karetními hrami). Teprve objevem simplexové metody (Dantzig 1947) se naskytla možnost optimální strategie efektivně počítat, jak jsme ukázali ve větě 141.

Literatura

[1] J. Bečvář, *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000.

[2] L. Bican, *Lineární algebra a geometrie*, Academia, Praha, 2000.

[3] G. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, 1963.

[4] J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[5] J. Dupačová, *Lineární programování*, SPN, Praha, 1982.

[6] M. Fiedler, *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*, SNTL, Praha, 1981.

[7] S. H. Friedberg, A. J. Insel, and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997.

[8] G. H. Golub and C. F. van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[9] L. Grygarová, *Úvod do lineárního programování*, SPN, Praha, 1975.

[10] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[11] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[12] M. Marcus and H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1964.

[13] M. Maňas, *Teorie her a optimální rozhodování*, SNTL, Praha, 1974.

[14] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.

[15] O. Pokorná, *Pseudoinverzní matice*, SPN, Praha, 1978.

[16] G. W. Stewart, *Matrix Algorithms, Volume I: Basic Decompositions*, SIAM, Philadelphia, 1998.

[17] G. W. Stewart and J. Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, San Diego, 1990.

[18] R. J. Vanderbei, *Linear Programming: Foundations and Extensions*, Kluwer, Boston, 1996.

[19] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1953.

[20] D. S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons, New York, 2002.

[21] G. Williams, *Linear Algebra with Applications*, Jones and Bartlett, Sudbury, 2001.

Rejstřík

AB a BA mají stejná vlastní čísla, 321
Adjungovaná matice, 310
Algoritmus (Choleského rozklad), 249
Algoritmus metody nejmenších čtverců, 128
Algoritmus pro výpočet inverzní matice, 70
Algoritmus pro výpočet Moore-Penroseovy inverze, 103
Algoritmus pro výpočet odstupňovaného tvaru, 88
Algoritmus pro výpočet SVD rozkladu, 336

Báze a její existence, 160
Bázická řešení, 355
Běžný krok algoritmu, 362
B-značení, 349

Cauchy-Schwarzova nerovnost, 29, 189
Cena hry, 426
Co dělat v případě singulární nebo obdélníkové matice?, 82
Co vede k pojmu lineární nezávislosti vektorů, 149
Cramerovo pravidlo, 308
Cyklus, 369

Číslo podmíněnosti, 282

Další postup, 350
Definice determinantu, 289
Definice vektorového prostoru, 132
Definice vlastních čísel, 314
Determinant blokově trojúhelníkové matice, 298
Determinant matice se dvěma stejnými řádky, 294
Determinant transponované matice, 291
Dimenze direktního součtu, 182

Dimenze podprostoru, 170
Dimenze vektorového prostoru, 165
Direktní součet podprostorů, 180
Dodatek, 422
Dodatek k soustavám s regulární maticí, 68
Dodatek: Vlastnosti bázických řešení, 399
Důkaz, 11, 17, 23, 31, 33, 36, 40, 46, 55, 59, 64, 66, 74, 86, 90, 97, 101, 108, 115, 118, 123, 126, 137, 145, 153, 156, 161, 163, 168, 171, 174, 176, 181, 190, 195, 204, 220, 237, 239, 245, 247, 254, 312, 322, 325, 327, 339, 352, 356, 359, 361, 363, 370, 400, 405, 407, 412, 414, 416, 421, 428
Důkaz Cramerova pravidla, 309
Důkaz existence SVD rozkladu (viz str. 269), 337
Důležitý zvláštní případ, 129
Důsledek: jiná definice determinantu, 307
Důsledek: vliv změny jednoho koeficientu na inverzi, 75
Důsledky, 185, 301

Důsledky Penroseovy věty, 117
Dvoufázová simplexová metoda: úvod, 375

Ekvivalentní vyjádření, 253
Elementární operace, 37
Elementární operace a determinant, 295
Elementární operace zachovávají množinu řešení, 47
Eukleidovská norma, 28
Existence a výpočet optimálních smíšených strategií, 427
Existence ortonormální báze, 198

Farkasova věta, 413
Fáze I, 376, 388
Fáze II, 379
Fundamentální podprostory, 229

Gauss-Jordanova eliminace (Jordan 1888), 52

Gaussova eliminace pro řešení $\widehat{A}x = \widehat{b}$ (Gauss 1810), 49
Gram-Schmidtův ortogonalizační proces, 194
Gram-Schmidtův proces (algoritmus), 196

Hilbertovy matice, 77
Historická poznámka, 223
Hodnost matice, 93, 231
Hodnostní rozklad, 96, 232
Homogenní soustavy, 112
Householderova transformace, 258

Charakteristika neomezenosti, 415
Charakterizace řešení, 122
Charakterizace vlastních čísel, 315
Choleského metoda pro řešení $Ax = b$ s poz. def. maticí A, 251
Choleského rozklad, 246

Idea metody nejmenších čtverců, 120
Inkluze a rovnost lineárních obalů, 146
Intermezzo: Fourierovy řady, 200
Intermezzo: Počítače nepočítají přesně, 76
Inverzní matice, 63
Izomorfismus, 214

Jacobiho metoda pro výpočet vlastních čísel symetrické matice, 330
Jak řešit soustavy, které řešení nemají?, 119
Jak vypočítat ortogonální projekci na podprostor, 240
Jedna rovnost stačí, 65
Jednotková matice, 15
Jednoznačnost optimálního řešení, 385

Každý n-rozměrný prostor je izomorfní $\mathbb{R}^n$, 215
Komentář, 261
Konečnost algoritmu, 371

Konečný počet vlastních čísel, 316
Konec fáze I, 389
Konec fáze II, 391
Kritérium neomezenosti, 360
Kritérium optimality, 358
Kritérium regularity, 302

Laplaceův rozvoj, 304
Lineárně nezávislý systém lze rozšířit na bázi, 169
Lineární kombinace, 143
Lineární nezávislost a regularita, 95
Lineární nezávislost sloupců resp. řádků matice, 94
Lineární (ne)závislost vektorů, 150
Lineární obal, 144
Lineární zobrazení, 208
Lineární zobrazení je jednoznačně určeno hodnotami v bázi, 212
$L(V, W)$ je izomorfrní $\mathbb{R}^{m \times n}$, 218

Matice, 4
Matice inverzního zobrazení, 224
Matice jako reprezentace podprostoru, 230
Matice lineárního zobrazení, 216
Matice s $\varrho(A) < 1$, 342
Maticová reprezentace elementárních operací, 39
Maticová reprezentace lineárního zobrazení, 219
Maticová reprezentace posloupnosti elementárních operací, 45
Maticové nerovnosti, 344
Maticový zápis soustavy rovnic, 34
„Metamechanika" maticového součinu, 32
Množina optimálních řešení, 383
Moore-Penroseova inverze, 100
Multiplikativnost: nejdůležitější vlastnost determinantu, 299
Myšlenka důkazu, 305
Myšlenka důkazu SVD rozkladu (podle Jordana), 271

Myšlenka důkazu věty o násobení determinantů, 300
Myšlenka řešení soustavy lineárních rovnic, 48

Násobení matic, 13
Násobení matice skalárem, 8
(Ne)jednoznačnost SVD rozkladu, 272
Nekomutativnost součinu matic, 19
Norma, 187

Obsah, 2
Odmocnina z matice, 333
Odstupňovaný tvar matice: definice, 84
Odstupňovaný tvar matice: příklad, 83
Odvozené veličiny, 275
Operace s vektory, 26
Optimální smíšené strategie vždy existují, 431
Ortogonální doplněk, 202

Ortogonální doplněk a související vlastnosti, 238
Ortogonální matice, 252
Ortogonální projekce na podprostor, 205
Ortogonální vektory, 188
Ortonormální báze, 197
Ortonormální systém, 193

Přenásobení regulární maticí nemění hodnost, 235
Příklad, 51, 71, 99, 106, 111, 141, 234, 250, 265, 270, 297, 306, 317, 357
Příklad na Blandovo pravidlo, 367
Příklady, 148, 166, 186, 210, 290
Příklady vektorových prostorů, 135
Případ $n = 2$, 67, 255
Parametrický popis množiny optimálních řešení, 384
Permutace a její znaménko, 287
Perronova věta, 345

Podmínky optimality, 411
Podmínky optimality pro úlohy s nerovnostmi, 420
Podobné matice mají stejná vlastní čísla, 320
Podprostory, 140
(Pokračování), 20, 27, 201, 257, 335, 377, 378, 380, 381, 393, 394, 396–398, 424, 425
(Pokračování důkazu), 12, 18, 41–44, 56, 57, 60, 61, 87, 91, 92, 98, 102, 109, 110, 116, 124, 127, 138, 139, 154, 157–159, 177–179, 248, 323, 328, 340, 353, 364–366, 372–374, 401, 408–410, 417, 429, 430
Pomocné tvrzení, 85
Popis množiny řešení, 114
Použití Householderovy transformace I, 259
Použití Householderovy transformace II, 260
Použití Householderovy transf. III: redukce na Hessenbergův tvar, 262
Použití QR rozkladu k řešení soustav lineárních rovnic, 266
Použití QR rozkladu pro metodu nejmenších čtverců, 267
Použití RREF tvaru k řešení obecných soustav lin. rovnic, 107

Použití SVD I: hodnost a ortonormální báze, 276
Použití SVD II: (pseudo)inverze a ortogonální projekce, 277
Použití SVD III: řešení obecných soustav lineárních rovnic, 278
Použití SVD IV: polární rozklad, 279
Použití SVD V: význam singulárních čísel, 281
Použití SVD VI: komprese digitálního obrazu, 284
Pozitivně (semi)definitní matice, 243
Pozitivní (semi)definitnost a vlastní čísla, 332
Poznámky, 5, 9, 104, 151, 209
Poznámky 1, 133
Poznámky 2, 134
Poznámky k maticovému součinu, 14
Primární a duální úloha, 402
Proč „nejmenších čtverců"?, 121
Prostor lineárních zobrazení, 217

QR rozklad, 263

QR rozklad (algoritmus), 264

Redukce lineárně závislého systému generátorů, 152
Regularita, 35
Rekurentní vlastnost pozitivní definitnosti, 244
Rovnost matic, 6

Řádková linearita determinantu, 293
Řešení soustavy $H_n x = H_n e$ pro $n = 12, 13$ Gaussovou eliminací, 79
Řešení soustavy $H_n x = H_n e$ pro $n = 14$ (2 metody), 80
Řešení soustavy $x = Ax + b$, 343
Řešitelnost soustavy normálních rovnic, 125

Sečítání matic, 7
Sherman-Morrisonova formule, 73
Shrnutí, 164
Simplexový algoritmus, 368

Singulární čísla, 273
Skládání lineárních zobrazení, 221
Slabá věta o dualitě, 403
(Slabá) věta o dualitě pro úlohy s nerovnostmi, 419
Složené zobrazení a maticový součin, 222
Smysl zavedení báze: souřadnice, 162
Smysl zavedení ortonormální báze: vzorce pro souřadnice, 199
Souřadnicový vektor, 213
Soustavy $H_n x = H_n e$, 78
Soustavy s regulární maticí, 62
Souvislost determinantu s vlastními čísly, 318
Speciální normy a jejich značení, 192
Speciální případ, 241
Spektrální norma, 280
Spektrální poloměr, 341
Spektrální věta pro symetrické matice, 326
Spojení a průnik podprostorů, 173

Steinitzova věta o výměně, 155
Subdeterminant a algebraický doplněk, 303
SVD faktorizace, 283
SVD rozklad, 269
SVD rozklad: pro a proti, neboli dvoukolejnost lineární algebry, 274
SVD rozklad: úvod, 268
Sylvesterova věta o setrvačnosti , 338
Symetrická matice, 24
Systém generátorů, 147
Systém vektorů, 142

Tabulka, 354
Tabulka na začátku fáze I, 387
Tabulka na začátku fáze II, 390
Teorie her: základní pojmy, 423
Terminologie, 242
Transformace na tabulkový tvar, 351

Transponovaná matice, 21
Třetí elementární operaci lze složit z prvních dvou, 38
Tři možnosti ukončení, 382
Tvar matice v běžném kroku (na počátku kr. 1), 50, 53
Tvar množiny řešení, 113
Tvar podprostoru, 172

Ukázka výpočtu v MATLABu: příklad, 386
Ukázka zacyklení I: výpočet podle Blandova pravidla, 392
Ukázka zacyklení II: modifikace Blandova pravidla, 395

Úloha lineárního programování, 347
Úlohy s nerovnostmi, 418
Úvod, 286

Vektorový prostor se skalárním součinem, 184
Vektory, 25

Věta o dimenzi spojení a průniku, 175
Věta o dualitě, 406
Věta o hodnosti transponované matice, 236
Vlastnosti inverzní matice, 72
Vlastnosti normy, 30, 191
Vlastnosti ortogonálního doplňku, 203
Vlastnosti ortogonálních matic, 256
Vlastnosti sečítání matic a násobení matice skalárem, 10
Vlastnosti součinu matic, 16
Vlastnosti transpozice, 22
Vlastní čísla symetrických matic, 324
Vlastní čísla trojúhelníkové matice, 319
Vliv transpozice na znaménko, 288
Výpočet determinantu, 296
Výpočet duálního optimálního řešení, 404
Výpočet inverzní matice, 69
Výpočet ortogonální projekce, 206

Výpočet vlastních čísel symetrické matice, 329
Výsledná matice je v RREF a je jednoznačně určena, 89
Význam věty o determinantu transponované matice, 292
Vzorec pro inverzní matici, 311
Vztah mezi singulárními a vlastními čísly, 334
Vztah počtu prvků systému k dimenzi, 167

Zastavení algoritmu I, 54
Zastavení algoritmu II, 58
Základní pojmy, 348
Základní vlastnosti lineárního zobrazení, 211
Základní vlastnosti vektorového prostoru, 136
Závěr intermezza, 81
Zdůvodnění konvergence, 331
Změna souřadnic (pokračování), 226
Změna souřadnic vektoru při změně báze, 225
Zpět k maticím, 228

Zpět k RREF; výhled, 130
Zvláštní případy, 105